9. Sterowania optymalne

Sterowanie optymalne to takie sterowanie dopuszczalne, które minimalizuje (maksymalizuje) wskaźniki jakości.

Każde zagadnienie sterowania optymalnego wymaga matematycznego sformułowania wskaźnika jakości procesu, który ma być optymalizowany. Optymalizacja w układach rzeczywistych zawsze przebiega przy ograniczeniach nałożonych na zmienne procesu, które nie mogą przyjmować dowolnych wartości.

Niech dany będzie obiekt opisany równaniem:
$\dot{x} = f(x,u,t)$, gdzie

x=x(t) – n-wymiarowy wektor stanu,
u=u(t) – p-wymiarowy wektor sterowania,
t – czas ciągły.

W postaci dyskretnej równanie ma kształt:
$x(k+1) = f(x(k),u(k))$, gdzie

k – czas dyskretny,
pozostałe oznaczenia taj jak wyżej.

Wskaźnik jakości sterowania można przedstawić w postaci ogólnej jako funkcjonał:

$$I = G(x,u,t)\Big|_{t_0}^{t_u} + \int_{t_0}^{t_u} F(x,u,t)dt$$

Dla opisu dyskretnego ma postać:

$$I = G[x(N)] + \sum_{k=0}^{N-1} F[x(n),u(n)]$$

F, G – rzeczywiste, skalarne funkcje,
t_0 – czas początkowy,
t_u – czas końcowy.

Dla ułatwienia można przyjąć, że czas początkowy wynosi 0. Wówczas wskaźnik ma postać:

$$I = G(x,u,t)\Big|_{0}^{t_u} + \int_{0}^{t_u} F(x,u,t)dt$$

Wskaźniki jakości.

Z matematycznego punktu widzenia wskaźniki jakości są funkcjonałami f_i, funkcjami, których argumentami są funkcje, a wartościami – liczby rzeczywiste. Pod względem fizyko-technicznym wskaźniki jakości przedstawiają takie wielkości jak: zużycie energii, paliwa, koszt produkcji, zysk, czas, dokładność itp.
Niech dany będzie wskaźnik jakości (kryterium optymalności) postaci I=I(u).

Do najczęstszych typów wskaźników należą:

1) wskaźnik jakości typu całkowego

$$I(u) = \int_{0}^{t_u} F(x,u,t)dt$$

Jest to przypadek, gdy G=0, nazywany go zagadnieniem Lagrange'a.

2) wskaźnik jakości typu funkcji stanu końcowego

$$I(u) = G(x,u,t)\Big|_{0}^{t_u}$$

Jest to przypadek, gdy F=0, nazywany jest zagadnieniem Mayera.

3) wskaźnik jakości sterowania czasowo-optymalnego (dla $f_0(x,u,t)=1$)

$$I(u) = \int_{0}^{t_u} dt = t_u$$

W tym przypadku wskaźnik I jest czasem trwania procesu, więc mamy do czynienia z zagadnieniem minimalno-czasowym.

4) wskaźnik jakości kwadratowy

$$I(u) = \frac{1}{2}x^T(t_u)Qx(t_u) + \frac{1}{2}\int_{0}^{t_k}(x^T(t)Px(t) + u^T(t)Ru(t))dt$$

dla $t_u \to \infty$

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}(x^T(t)Px(t) + u^T Ru(t))dt$$

$\frac{1}{2}x^T(t)Qx(t_k)$ - składowe określające odchylenie stanu końcowego od jego wartości pożądanej.

$\frac{1}{2}\int_{0}^{t_k} x^T(t)Px(t)$ - składowe określające odchylenie trajektorii stanu od jej przebiegu pożądanego w przedziale $[0,t_k]$.

$\frac{1}{2}\int_{0}^{t_k} u^T(t)Ru(t)dt$ - składowe określające koszty sterowani.