
Laboratorium
Komputerowej Identyfikacji Obiektów

ĆWICZENIE 1

Obiekty identyfikacji, sygnały, modele

*dr inż. Tomasz Twardowski
Katedra Metrologii AGH*

Kraków 2004

1 WPROWADZENIE

Identyfikacja zajmuje się wyznaczaniem modeli matematycznych obiektów. Model matematyczny definiuje w sposób ścisły zachowanie się obiektu w określonych warunkach. Warunki te są określone przez wejścia i wyjścia obiektu w chwili obecnej i w przeszłości. Z natury rzeczy (nieskończona ilość wielkości oddziałujących na zachowanie się obiektu, nieliniowości, trudność ścisłego zdefiniowania wielkości wejściowych i wyjściowych) model jest pewnym przybliżeniem rzeczywistego obiektu, idealizacją z ograniczającymi założeniami (ograniczona ilość wejść i wyjść, liniowość). Stosuje się różne postacie modeli w zależności od przeznaczenia tworzonego modelu i struktury identyfikowanego obiektu. W dalszej części będziemy rozważać szczególną klasę modeli opisujących rzeczywiste obiekty, tj. klasę modeli dynamicznych i liniowych, wielowejściowych i wielowyjściowych (ang. *Multiple Input Multiple Output*, w skrócie MIMO), ze szczególnym ważnym przypadkiem modelu z jednym wejściem i jednym wyjściem (ang. *Single Input Single Output*, w skrócie SISO). Większa część zajęć będzie poświęcona obiektom ciągłym, tj. opisywanym modelami z czasem ciągłym. Modele z czasem dyskretnym, tj. z wejściami i wyjściami określonymi tylko w dyskretnych chwilach czasu, będą tematem jednych z końcowych zajęć. Dla układów niestacjonarnych parametry poszczególnych postaci modeli są funkcjami czasu.

Identyfikacja jest przeprowadzana na podstawie informacji pomiarowej o wielkościach wejściowych i wyjściowych obiektu. Ta informacja pomiarowa we współczesnych komputerowych systemach identyfikacji to próbki sygnałów wejściowych i wyjściowych. W odniesieniu do sygnałów również stosuje się często idealizację, przybliżając rzeczywiste sygnały ich idealnymi odpowiednikami opisywanymi matematycznie. Ten zabieg pozwala na łatwiejszą ich analizę w zadaniach identyfikacji. Niektóre sygnały idealne nie występują w rzeczywistości z powodu ograniczeń zmian energii w czasie (impuls Diraca, skok jednostkowy), są jednak, przy spełnieniu określonych założeń, dobrym przybliżeniem sygnałów rzeczywistych.

Wstępnym etapem identyfikacji jest określenie charakteru obiektu na podstawie rejestracji jego sygnałów (statyczny czy dynamiczny, jeśli dynamiczny to jakiego rzędu, o jakiej dynamice). Dlatego podstawową wiedzą w identyfikacji obiektów jest znajomość zachowania się standardowych obiektów (pierwszego i drugiego rzędu) pod wpływem standardowych sygnałów pobudzających (np. skok, impuls jednostkowy, pobudzenie sinusoidalne). Zadania w bieżącym ćwiczeniu służą przypomnieniu i ugruntowaniu wiedzy zdobytej na zajęciach z matematyki, fizyki i elektrotechniki.

2 MODELE MATEMATYCZNE LINIOWYCH SYSTEMÓW DYNAMICZNYCH

Definicja

Liniowy model dynamiczny to model spełniający zasadę superpozycji, tzn. model, którego działanie opisuje operator F spełnione jest równanie:

$$F(a \cdot u_1(t) + b \cdot u_2(t)) = a \cdot F(u_1(t)) + b \cdot F(u_2(t))$$

Jak łatwo sprawdzić operatorem liniowym jest zarówno operator całkowania jak i operator różniczkowania.

2.1 Postacie matematycznych modeli liniowych systemów dynamicznych

- równanie różniczkowe

$$y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} = b_0 u(t) + b_1 \frac{du(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m}$$

Systemy fizyczne spełniają warunek realizowalności: $m \leq n$.

Pojedyncze równanie opisuje układ SISO (jedno wejście, jedno wyjście) z określonymi warunkami początkowymi.

- równania stanu

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$\mathbf{A}$ – macierz kwadratowa $n \times n$, $\mathbf{B}$ – macierz $n \times m$,

$\mathbf{C}$ – macierz $p \times n$, $\mathbf{D}$ – macierz $p \times m$,

n – ilość stanów, m – ilość wejść, p – ilość wyjść.

Macierzowe równanie stanu opisuje układ MIMO (wiele wejść, wiele wyjść).

Ogólne rozwiązanie równań stanu ma postać:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

Jak wynika z powyższego równania zachowanie się obiektu nie zależy od historii sygnałów wejściowych, co osiągnięto dzięki wprowadzeniu do modelu zmiennych stanu.

- transmitancja operatorowa

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \dots + a_n s^n}$$

Jedna transmitancja opisuje układ SISO przy zerowych warunkach początkowych. Ogólne wyrażenie opisujące odpowiedź na wejście $u(t)$ ma postać:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\mathcal{L}\{u(t)\}\}$$

Podstawiając $s=j\omega$ otrzymujemy transmitancję widmową. W szczególnym przypadku pobudzenia harmonicznego o określonej pulsacji ω odpowiedź ustalona na wejściowy sygnał sinusoidalny ma postać sinusoidalną o amplitudzie i fazie zmienionej przez transmitancję w punkcie $j\omega$, tj.:

$$Y(j\omega) = U(j\omega) \cdot G(j\omega)$$

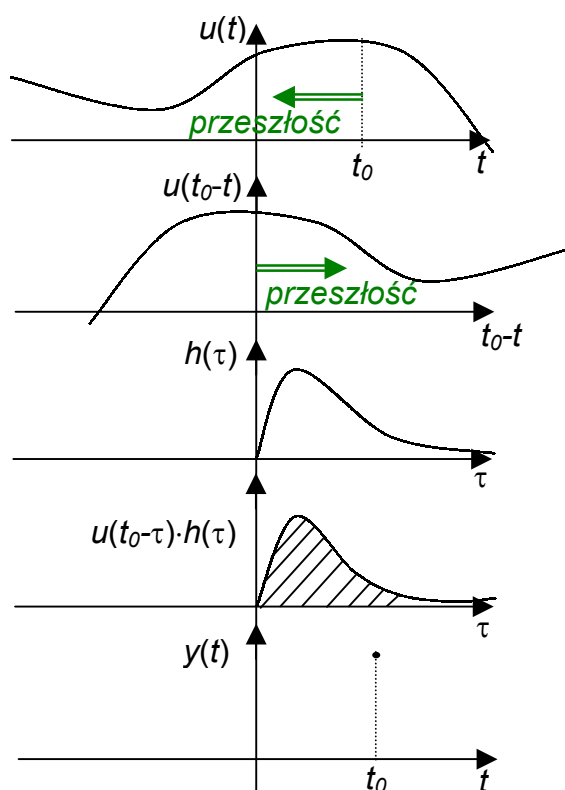
- odpowiedź impulsowa

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Impuls Diraca $\delta(t) \neq 0$ tylko dla $t=0$ oraz $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

Ogólne wyrażenie opisujące odpowiedź na wejście $u(t)$ ma postać splotową:

$$y(t_0) = h(t) * u(t) \Big|_{t=t_0} = \int_0^{\infty} h(\tau) u(t_0 - \tau) d\tau$$



Rys. 1 Wyjaśnienie znaczenia operacji splotu sygnałów

Wyznaczenie odpowiedzi w następnym punkcie wymaga powtórzenia całej procedury całkowania z innym przesunięciem.

2.2 Związki między poszczególnymi postaciami modeli.

równanie różniczkowe $\Rightarrow$ równania stanu

metoda podstawienia zmiennej stanu za pochodną

równanie różniczkowe $\Rightarrow$ transmitancja operatorowa

transformata Laplace'a

równania stanu $\Rightarrow$ transmitancja operatorowa

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

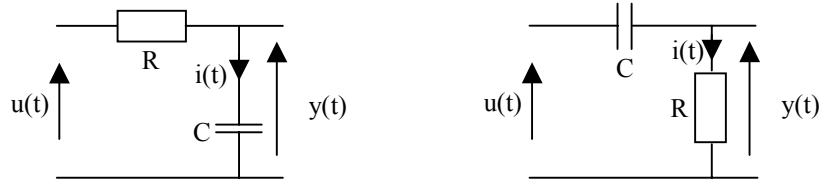
odpowiedź impulsowa $\Rightarrow$ transmitancja operatorowa

$$G(s) = \mathcal{L}(h(t))$$

3 PRAKTYKA OPISU MODELOWEGO

3.1 Model pierwszego rzędu

Obiekty termiczne (np. czujnik temperatury bez obudowy), elektryczne (np. układy RC uśredniające-dolnoprzepustowe lub różniczkujące-górnoprzepustowe).



Wyznaczamy równanie różniczkowe opisujące układ, będące w tym przypadku również równaniem stanu:

$u = Ri + y$ $u = RC \frac{dy}{dt} + y$ $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau} y + \frac{1}{\tau} u, \quad \tau = RC$ $G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$ $h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$	$y = RC \frac{d(u - y)}{dt}$ Podstawienia: $x = u - y, \quad \tau = RC$ $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\tau} x + \frac{1}{\tau} u \\ y = -x + u \end{cases}$ $G(s) = \frac{\tau s}{\tau s + 1}$
---	---

3.2 Model drugiego rzędu

Model obiektu drugiego rzędu, mechanicznego (np. belka do układu tensometrycznego, ustrój wskazówkowy, akcelerometr), termicznego (np. czujnik temperatury z obudową metalową), elektrycznego (wzmacniacz, filtr) z odpowiednią interpretacją ogólnych parametrów modelu.

Równanie różniczkowe:
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = \omega_0^2 k u(t)$$

Transmitancja:
$$G(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Bieguny transmitancji (pierwiastki mianownika):

$$s_{1,2} = -\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_0, \text{ zespolone sprzężone dla } \zeta < 1$$

Równanie stanu: patrz zadanie (1).

Odpowiedź impulsowa dla:

$$\xi < 1: \quad h(t) = \frac{k\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t\right),$$

$$\xi = 1: \quad h(t) = k\omega_0^2 t e^{-\omega_0 t},$$

$$\xi > 1: \quad h(t) = \frac{k}{T_1 - T_2} \left(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}\right).$$

3.3 Model silnika prądu stałego - układu elektromechanicznego

Zamodelujemy silnik prądu stałego z napięciem zasilającym $u(t)$ jako wielkością wejściową i prędkością obrotową $\omega(t)$ jako wielkością wyjściową.

Obwód elektryczny silnika reprezentuje rezystancja R i indukcyjność L uzwojeń oraz siła elektromotoryczna $u_e(t)$ indukowana w polu magnetycznym proporcjonalna na

prędkości obrotowej ze współczynnikiem K_e (prawo indukcji Faradaya). Równanie dynamiki dla części elektrycznej ma postać (prawo Kirchhoffa):

$$u(t) - u_e(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t), \quad u_e(t) = K_e \omega(t)$$

Elementy mechaniczne reprezentują moment bezwładności J , moment napędowy proporcjonalny do prądu ze współczynnikiem K_n (prawo Ampera) i moment tarcia proporcjonalny do prędkości obrotowej (tarcie wiskotyczne) ze współczynnikiem K_t . Równanie dynamiczne części mechanicznej ma postać (prawo Newtona):

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = -K_t \omega(t) + K_n i(t)$$

Porządkując równania i zapisując je w standardowej postaci równań stanu uzyskujemy:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_e}{L} \\ \frac{K_n}{J} & -\frac{K_t}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

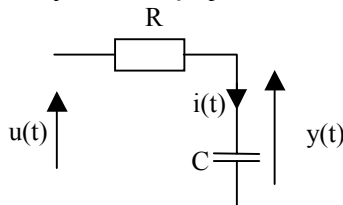
4 ANALIZA MODELI W MATLABIE

Funkcje Matlab'a związane z tematem:

impulse, *step*, *lsim*, *tf2ss*, *ss2tf*, *bode*, *linspace*, *logspace*, *semilogx*, *semilogy*, *abs*, *angle*.

4.1 Przykład 1

Rozważamy model obiektu pierwszego rzędu przedstawionego na poniższym schemacie, z napięciem wejściowym u , napięciem na kondensatorze y i prądem i .

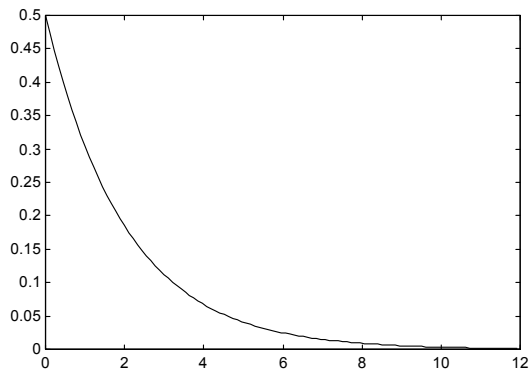


Przebieg napięcia na kondensatorze przy impulsowym dostarczeniu ładunku (lub przy jednostkowym napięciu początkowym) możemy wyznaczyć w Matlabie funkcją *impulse* z odpowiednimi parametrami z równania stanu, podstawiając konkretną wartość za parametr τ .

Instrukcje Matlab'a:

```
[y, x, t]=impulse(-1/Tau,1/Tau,1,0);
plot(t,y)
```

Przykładowy wynik tych wywołań dla $\tau=2$ przedstawiono na rysunku.



Taką samą odpowiedź możemy uzyskać gdy układ będzie opisany transmitancją.

$$sY = -\frac{1}{\tau} Y + \frac{1}{\tau} u$$

$$Y(\tau s + 1) = u$$

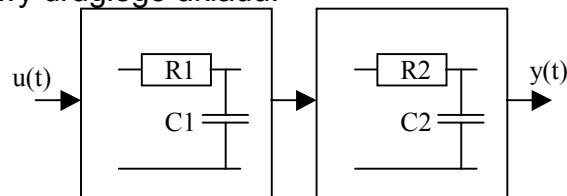
$$G(s) = \frac{1}{s\tau + 1}$$

Instrukcje Matlaba:

```
[y1, x, t1]=impulse(1,[Tau 1]);  
plot(t1,y1,'g')
```

4.2 Przykład 2

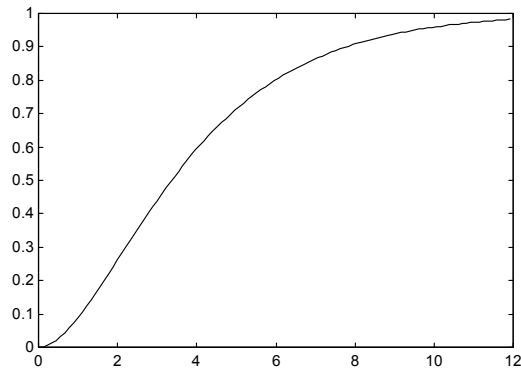
Szeregowo połączone dwa układy inercyjne pierwszego rzędu możemy analizować generując odpowiedź pierwszego układu i podając ją na wejście drugiego układu (przy upraszczającym założeniu że układy nie obciążają się wzajemnie). Tym razem wyznaczmy odpowiedź na skokową zmianę wielkości wejściowej, a interesować nas będzie sygnał wyjściowy drugiego układu.



Instrukcje Matlaba:

```
[y, x, t]=step(-1/Tau1,1/Tau1,1,0);  
plot(t,y)  
[y1, x]=lsim(-1/Tau2,1/Tau2,1,0,y,t);  
plot(t,y1,'g')
```

Poszukiwany przebieg pokazano na poniższym rysunku.



Ten sam wynik można otrzymać przez podanie łącznej transmitancji do funkcji *step* analogicznie jak w następnym przykładzie.

4.3 Przykład 3

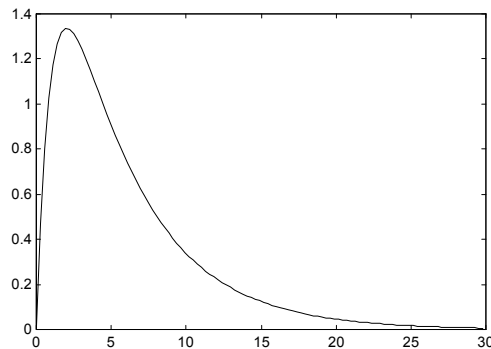
Wynik działania funkcji *impulse* porównamy z dokładną odpowiedzią obiektu inercyjnego z dwiema stałymi czasowymi.

Transmitancja układu ma postać $G(s) = \frac{k}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$.

Przyjmujemy: $k=10$; $T_1=5$; $T_2=1$

Instrukcje Matlab:

```
[y,x,t]=impulse(10, [5 6 1]);
y1=10/4*(exp(-t/5)-exp(-t/1));
plot(t, y, t, y1);
```

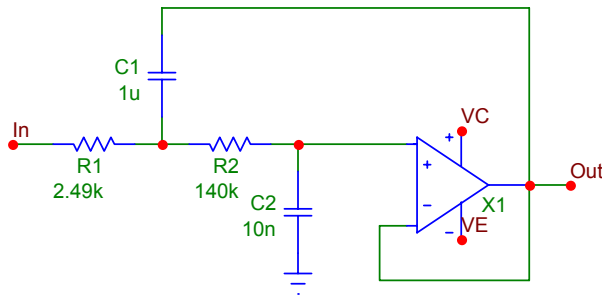


Na wykresie nie widać różnicy. W dalszej części przekonamy się jednak, że wyniki funkcji *impulse* nie są dokładne.

4.4 Przykład 4

Filtr dolnoprzepustowy można zrealizować w prostym układzie aktywnym ze wzmacniaczem operacyjnym. Przykład takiej realizacji jest przedstawiony na poniższym rysunku. Transmitancja tego układu ma postać

$$G(s) = \frac{u_{wy}(s)}{u_{we}(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + C_1 (R_1 + R_2) s + 1}.$$



Jeśli filtr ma mieć standardową postać np. Czebyszewa (filtr o największym spadku z dopuszczeniem zafalowania charakterystyki) to dobór elementów R i C wynika z ogólnej parametryzacji filtrów Czebyszewa [Tietze, Schenk]. Ponieważ projektowanie filtrów Czebyszewa jest standardowym zadaniem projektowym, to Matlab udostępnia funkcje *cheby1* (filtr pierwszego rodzaju) i *cheby2* (filtr drugiego rodzaju) realizujące to zadanie. Projektowanie filtra polega na wywołaniu funkcji z podaniem wymaganego rzędu i zafalowania filtra, a następnie na przeliczeniu uzyskanych współczynników transmitancji $G(s) = \frac{1}{bs^2 + as + 1}$ na wartości elementów R i C (przy założeniu wartości dwóch z czterech elementów).

4.5 Jak działa funkcja *impulse* ?

Jak wspomniano wcześniej, działanie funkcji *impulse* nie jest oparte na zależności analitycznej wiążącej odpowiedź impulsową z modelem równań stanu czy transmitancji. Śledzenie kolejnych wywołań funkcji Matlaba z tej funkcji pokazuje kolejne etapy generowania odpowiedzi impulsowej:

impulse - konwersja do zapisu obiektowego

lti/impulse - rysunki i konwersja modelu do postaci równań stanu

lti/gentresp

lti/trange - ustalenie zakresu czasu obliczeń na podstawie największej części rzeczywistej wartości własnych macierzy **A**

lti/private/timscale – ustalenie kroku obliczeń na podstawie najmniejszej części rzeczywistej wartości własnych macierzy **A**

ss/impresp - przejście do dyskretnych równań stanu, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}'$, $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}'$

ltitr(A',B') – obliczenia iteracyjne trajektorii stanu wg równań dyskretnych

Jak widać rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania dyskretnego równania stanu. Adaptacja kroku czasowego (ważnego dla dokładności obliczeń) i zakresu czasowego prezentowanego przebiegu (istotnego dla pokazania dynamiki) jest realizowana przez analizę wartości własnych macierzy dynamiki **A**.

5 ZADANIA

Zadanie 1

Wyznacz model obiektu oscylacyjnego drugiego rzędu w postaci równań stanu na podstawie modelu w postaci równania różniczkowego. Dla wybranych wartości parametrów porównaj uzyskany wynik z wynikiem działania funkcji konwersji postaci modelu *tf2ss*, której parametrami wywołania są współczynniki modelu transmitancyjnego.

Zadanie 2

Wyznacz z użyciem procedury numerycznej *impulse* odpowiedź impulsową obiektu oscylacyjnego drugiego rzędu opisanego transmitancją lub równaniem stanu. Czy procedura numeryczna daje wyniki zgodne z odpowiedzią dokładną? Utwórz charakterystyki częstotliwościowe tego obiektu z użyciem funkcji *bode* lub *freqs*. Podaj wartość wzmocnienia i fazy dla częstotliwości $0.1\omega_0$, $0.9\omega_0$ i $5.0\omega_0$.

Zadanie 3

Wyznacz przebieg prądu i prędkości silnika prądu stałego o modelu jak w przykładzie dla parametrów: $R = 10[\Omega]$, $L = 1.5[H]$, $K_e = 0.015$, $K_t = 0.2$, $K_n = 0.02$, $J = 0.02[\frac{kg \cdot m^2}{s^2}]$.

Zadanie 4

Dla obiektu oscylacyjnego drugiego rzędu i sygnału wejściowego w postaci sumy trzech sygnałów harmonicznnych (sinusoidalnych) o różnych częstotliwościach przedstawić postać czasową sygnału wejściowego, jego postać częstotliwościową, postać częstotliwościową sygnału wyjściowego i postać czasową tego ostatniego.

Zadanie 5

Na podstawie przeprowadzonego na zajęciach eksperymentu pomiarowego przedstaw dane pomiarowe w postaci charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej badanego obiektu. Wiedząc, że obiekt jest filtrem Czebyszewa drugiego rzędu o realizacji elektronicznej i nominalnych wartościach elementów jak w przykładzie porównaj jego charakterystykę nominalną z charakterystyką pomiarową.

6 LITERATURA

Hagel R., Zakrzewski J., *Miernictwo dynamiczne*, WNT Warszawa 1984 (rozdziały 6, 7 i 8 na temat sygnałów, obiektów i modeli)

Sydenham P.H., *Podręcznik Metrologii*, WKiŁ Warszawa 1988 (rozdziały 2 i 4 na temat sygnałów, systemów i modeli)

Tietze, Schenk, *Układy półprzewodnikowe*, WNT Warszawa 1987 (rozdział 14 na temat realizacji elektronicznych filtrów aktywnych)