## 1. DYSKRETNO-CZASOWA TRANSFORMATA FOURIERA (DTFT).

TRANSFORMATA DTFT

$$X(e^{j\omega}) = F[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$$

TRANSFORMATA ODWROTNA (IDFT)

$$x(n) = F^{-1} \cdot [X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega n} d\omega$$

Przykład 3.1

$x(n) = (0.5)^n u(n)$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (0,5)^n \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(0,5 \cdot e^{-j\omega}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{1 - 0,5 \cdot e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 0,5}$$

Przykład 3.2

x(n)=[1,2,3,4,5]

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = e^{j\omega} + 2 + 3e^{-j\omega} + 4e^{-j2\omega} + 5e^{-j\omega 3}$$

Właściwości DTFT

1. Okresowość

   $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$

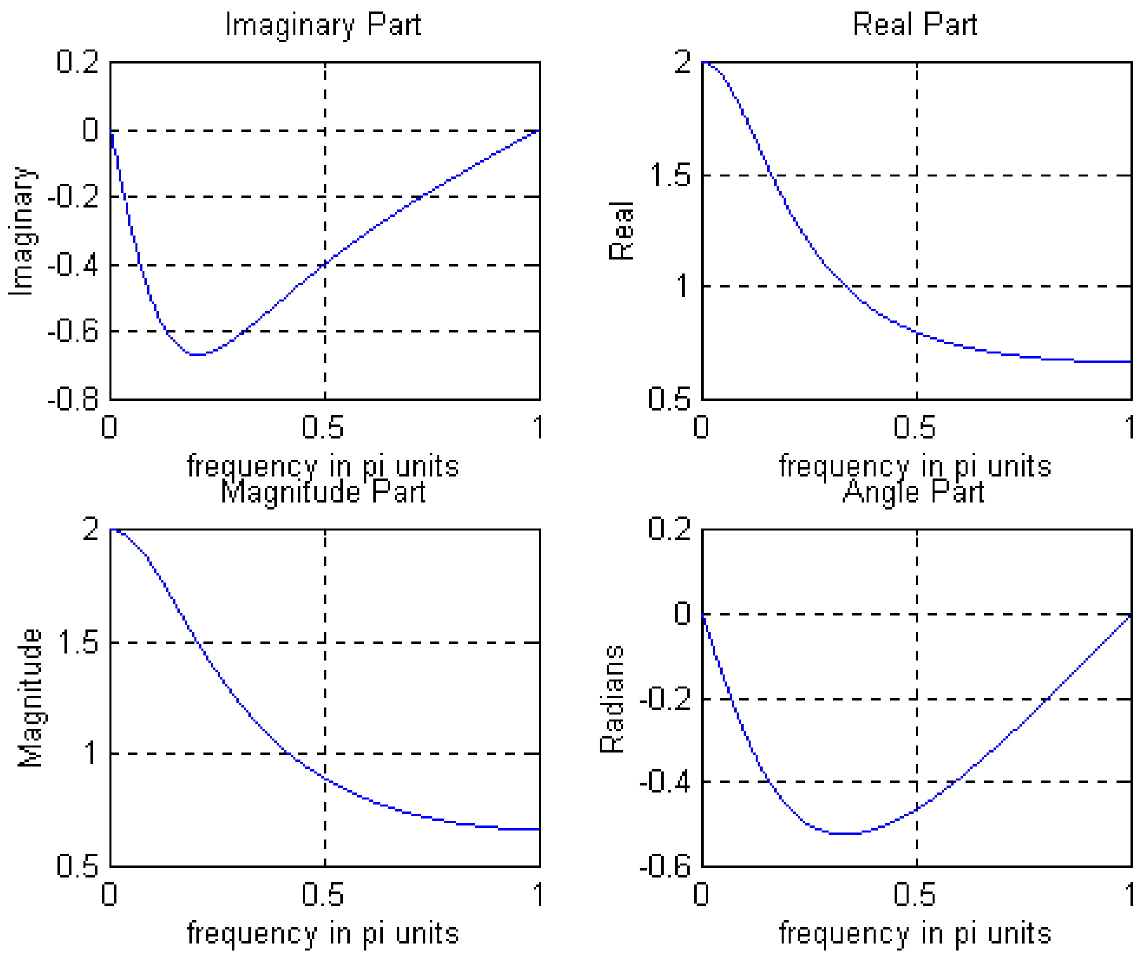
   Dla analizy wystarczy jeden okres $[0,2\pi]$.

2. Jeśli x(n) jest rzeczywistym ciągiem to

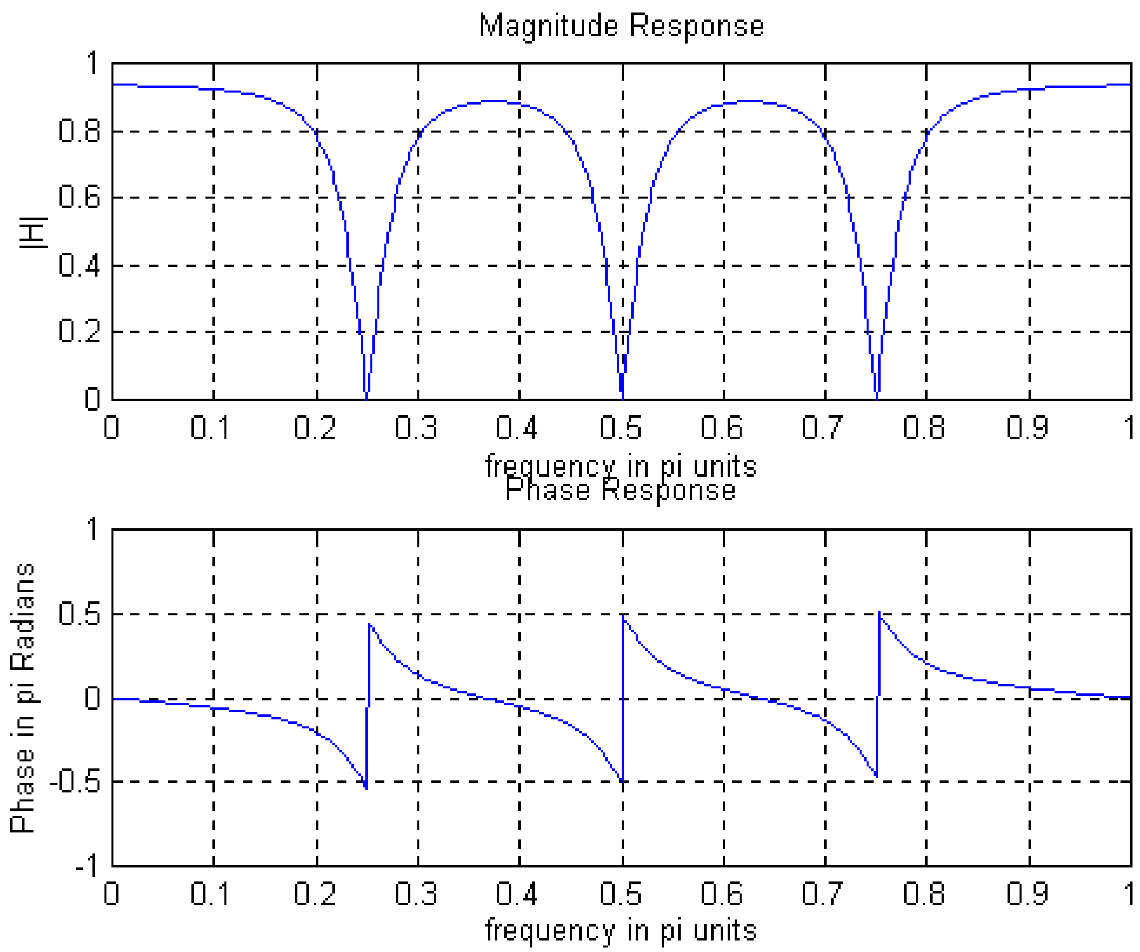
| | |
|---|---|
| $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$ | Conjugate symetric |
| $Re[X(e^{-j\omega})] = Re[X(e^{j\omega})]$ | Parzystość / Symetria |
| $Im[X(e^{-j\omega})] = -Im[X(e^{j\omega})]$ | Nieparzystość / Antysymetria |
| $\lvert X(e^{-j\omega})\rvert = \lvert X(e^{j\omega})\rvert$ | |
| $< X(e^{-j\omega}) = -< X(e^{j\omega})$ | |

   Dla analizy wystarczy przedział $[0, \pi]$.

```
function [Xk,w] = dtft(xn,n,k,N)
% Computes Discrete Time Fourier Transformation
% ----------------------------------------------
% [Xk,w] = dtft(xn,n,k,N)
% Xk = DTFT coeff. array
% xn = finite duration sequence
% n = sample position vector
% k = location of frequency position vector ( [0:N] is pi )
% N = circle divided at N points
w = (pi/N)*k;
Xk = xn * (exp(-j*pi/N)).^(n'*k);    % DTFT of x


%Przykład 3.03 transformata Fouriera sygnałow dyskretno-czasowych
close;
%n=[0:100]; x=0.9.^n;
n=[0:100]; x=0.5.^n;   % tylko ten przykład !!!
%n=[-1:3]; x=[1:5];
%n=[-5:5]; x=(-0.9).^n;
%n=[0:100]; x=cos(pi*n/5);
%nr=50; n=[-2*nr:2*nr]; x=[(n>=-nr & n<=nr)];
%nr=50; n=[-nr:nr]; x=1-abs(n)/nr;
%nr=50; n=[0:nr]; x=0.5+0.5*cos(pi*n/nr);
stem(x,'.');
pause;
close;
k = [0:500];  % [0, pi] axis divided into 501 points
%w=(pi/500)*k; X = exp(j*w) ./ (exp(j*w) - 0.5);   % tylko ten przykład !!!

[X,w] = dtft(x,n,k,500);    % DTFT of x
magX = abs(X); angX = angle(X);
realX = real(X); imagX = imag(X);
subplot(2,2,1); plot(w/pi,imagX); grid
xlabel('frequency in pi units'); title('Imaginary Part'); ylabel('Imaginary')
subplot(2,2,2); plot(w/pi,realX); grid
xlabel('frequency in pi units'); title('Real Part'); ylabel('Real')
subplot(2,2,4); plot(w/pi,angX); grid
xlabel('frequency in pi units'); title('Angle Part'); ylabel('Radians')
subplot(2,2,3); plot(w/pi,magX); grid
xlabel('frequency in pi units'); title('Magnitude Part'); ylabel('Magnitude')
```


Imaginary Part
Imaginary
frequency in pi units
Real Part
Real
frequency in pi units
Magnitude Part
Magnitude
frequency in pi units
Angle Part
Radians
frequency in pi units

```
% Przykład 3.16a Opis sytemu w postaci równania róznicowego: a, b

% Szukana jest cha-ka częstotliwościowa
close;
%a = [1.0000, -1.7600, 1.1829, -0.2781]; b = [0.0181,  0.0543, 0.0543,  0.0181];
%a = 1; b = [ones(1,8)]*1/8;
a = [1, 0, 0.81, 0, 0.81^2, 0, 0.81^3]; b = [1,0,1,0,1,0,1]*0.7;
m = 0:length(b)-1; l = 0:length(a)-1;
K = 500; k = 1:1:K;
w = pi*k/K;  % [0, pi] axis divided into 501 points
num = b * exp(-j*m'*w); % Numerator calculation
den = a * exp(-j*l'*w); % Denominator calculation
H = num ./ den;
%H = freqz(b,a,w);
magH = abs(H); angH = angle(H);
subplot(1,1,1);
subplot(2,1,1); plot(w/pi,magH); grid; axis([0,1,0,1]);
xlabel('frequency in pi units'); ylabel('|H|');
title('Magnitude Response')
subplot(2,1,2); plot(w/pi,angH/pi); grid
xlabel('frequency in pi units'); ylabel('Phase in pi Radians')
title('Phase Response');
```



## 2. TRANSFORMATA Z .

$$X(z) = Z\left[x(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \qquad z = |z| e^{j\omega}$$

ROC – REGION OF COVERGENCE

$R_{z-} < |z| < R_{z+}$

INVERSE Z TRANSFORM

$$X(n) = Z^{-1}\left[X(z)\right] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

C countur in ROC

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} = F\left[x(n)\right]$$

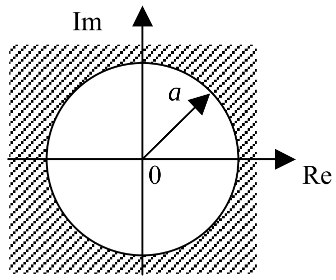
Przykład 4.1

$$x(n) = a^n U(n)$$

$$X(z) = \sum_{0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \qquad gdy \quad \left|\frac{a}{z}\right| < 1$$

$$|a| < |z| < +\infty$$

POSITIVE TIME SEQUENCE
(TAKŻE „CASUAL" SYSTEMS)




| x(n) | Z[x(n)] | ROC |
|---|---|---|
| $\delta(n)$ | 1 | $\forall z$ |
| u(n) | $1/(1-z^{-1})$ | $\lvert z\rvert>1$ |
| $e^n U(n)$ | $1/(1-az^{-1})$ | $\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$ |
| $a^n \sin(\omega_o n)U(n)$ | $\dfrac{a\sin(\omega_o)z^{-1}}{1-2a\cos(\omega_o)z^{-1}+a^2z^{-2}}$ | $\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$ |

| | |
|---|---|
| $Z[x(n-n_o)] = z^{-n_O} X(z)$ | $Z[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)] = a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$ |

**FUNKCJA SYSTEMOWA.**

$$H(z) = Z\left[h(n)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n}$$

**LTI**

$$y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{l=0}^{M} b_k x(n-l)$$

Ponieważ

$$Z\left[x(n-n_o)\right] = z^{-n_O} X(z)$$

to

$$Y(z) + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} y(z) = \sum_{l=0}^{M} b_k z^{-l} X(z)$$

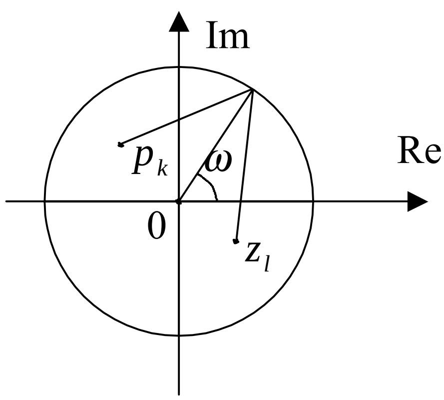
stąd

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l z^{-l}}{1 + \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_O z^{-M}\left(z^M + \ldots + \frac{b_M}{b_O}\right)}{z^{-N}(z^N + \ldots + a_N)} = b_O z^{M-N} \frac{\prod_{l=1}^{M}(z - z_l)}{\prod_{k=1}^{N}(z - p_k)}$$

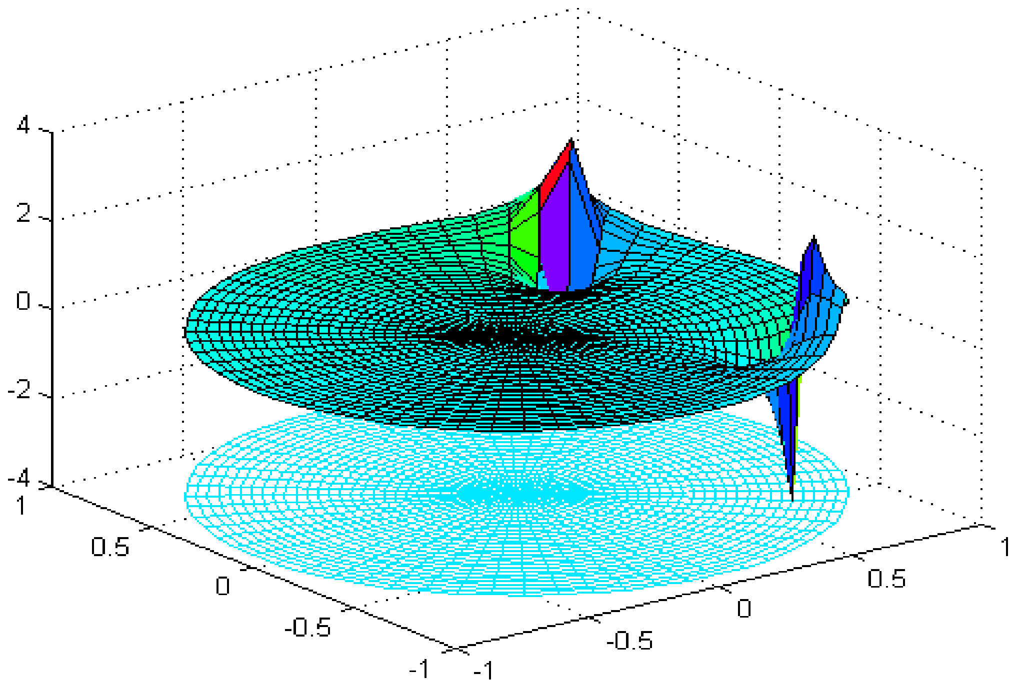
**ODPOWIEDŹ CZĘSTOTLIWOŚCIOWA**

$$z = e^{j\omega}$$

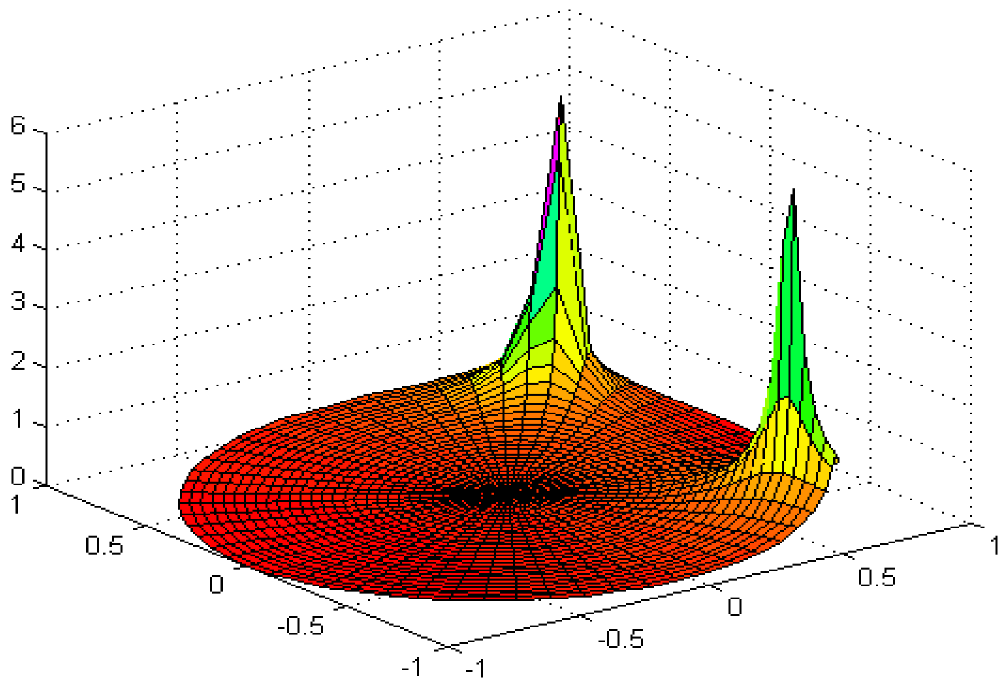
$$H(e^{j\omega}) = b_O e^{j(N-M)\omega} \frac{\prod_{l=1}^{M}(e^{j\omega} - z_l)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega} - p_k)}$$



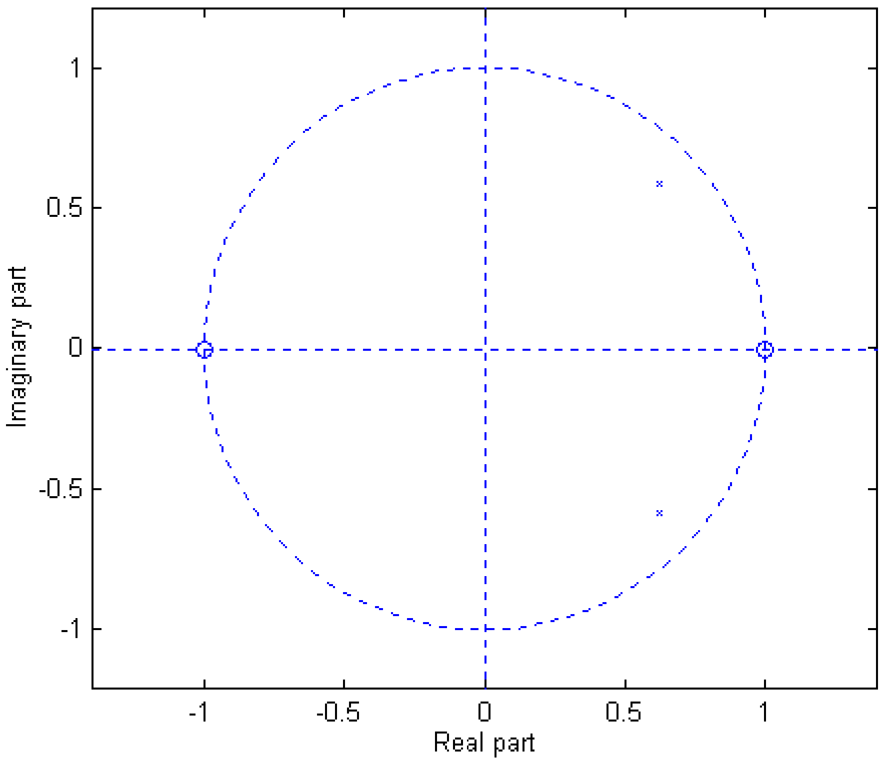
**Przykład 1.**
Dana jest transmitancja H(z) filtru Buterwortha o następujących współczynnikach:
b=[ 1 0 -1 ]*0.137; <<< Buterworth band pass filter
a=[ 1 -1.24 0.73 ];
Znajdź zera i bieguny filtru. Wynik przedstaw w postaci iloczynowej.



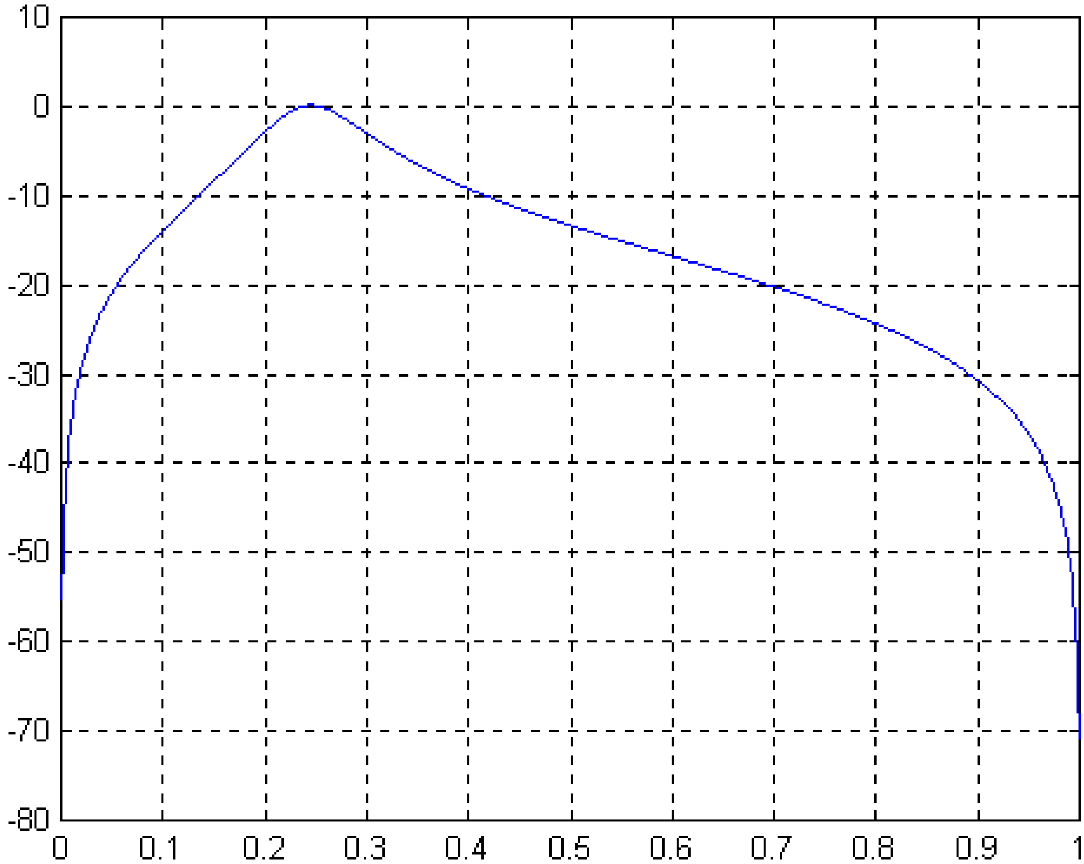

Bieguny filtru (układ REAL - amplituda IMAGINE – kolor)




Bieguny filtru (Z – amplituda)




Bieguny i zera filtru.

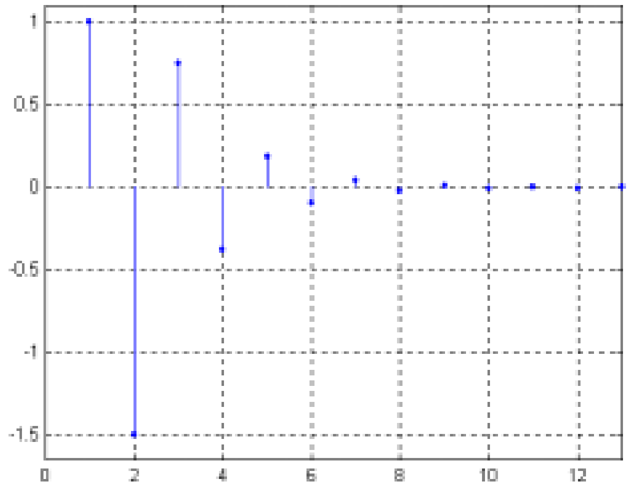



Charakterystyka amplitudowa (y – decybel; x=1 częstotliwość Nyquista).

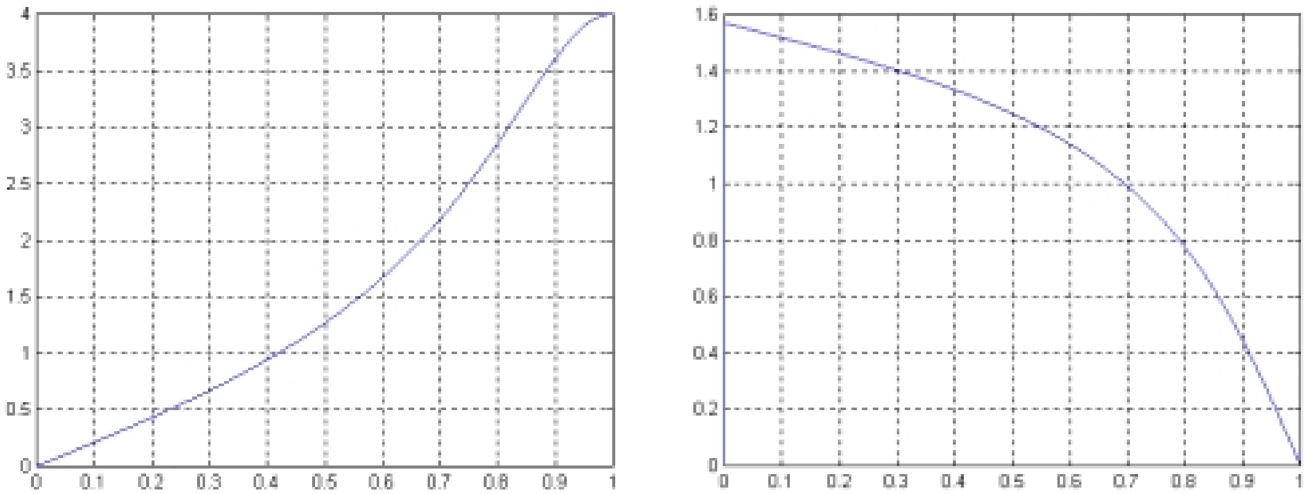
**Przykład 2.**

Dla układu o transmitancji H(z) znajdź odpowiedź impulsową.

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$$




Odpowiedź impulsowa




Charakterystyka amplitudowa i fazowa.

Rozwiązanie 1.

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\quad \underline{1\text{-}1.5z^{-1}+0.75z^{-2}0.375z^{-3}\ldots} \\
1+0.5z^{-1} \mid 1\text{-}\ z^{-1} \\
\qquad\qquad\quad \underline{1+0{,}5z^{-1}} \\
\qquad\qquad\qquad -1{,}5z^{-1} \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-1{,}5z^{-1}-0{,}75z^{-2}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0{,}75\ z^{-2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{0{,}75\ z^{-2}+0{,}375\ z^{-3}}
\end{array}
$$

h(0)=1; h(1)=-1,5; h(2)=0,75; h(3)=-0,375; **...**

Rozwiązanie 2.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}}$$

$Y(z) + 0{,}5Y(z)\, z^{-1} = X(z) – X(z)z^{-1}$
y(n) + 0,5y(n-1) = x(n) – x(n-1)
y(n) =  x(n) – x(n-1) – 0,5y(n-1)

Po pobudzeniu skokiem jednostkowym u(n)

$$x(n) = \begin{cases} 1\ gdy & n = 0 \\ 0\ gdy & n \neq 0 \end{cases}$$

y(0) = 1
y(1) = x(1) – x(0) – 0,5y(0) = 0 – 1 – 0,5 = –1,5
y(2) = x(2) – x(1) – 0,5y(1) = 0,5 * (–1,5 ) = 0,75
y(3) = x(3) – x(2) – 0,5y(2) = –0,5 * 0,75 = –0,375

stąd:

h(0) = 1; h(1) = –1,5; h(2) = 0,75; h(3) = –0,375; **...**

Przykład 3.

Znaleźć charakterystykę częstotliwościową układu

$$H(z) = \frac{z+1}{z - 0{,}7071} = K\frac{z - z_O}{z - z_P} = \frac{U\angle\theta}{V\angle\phi}$$

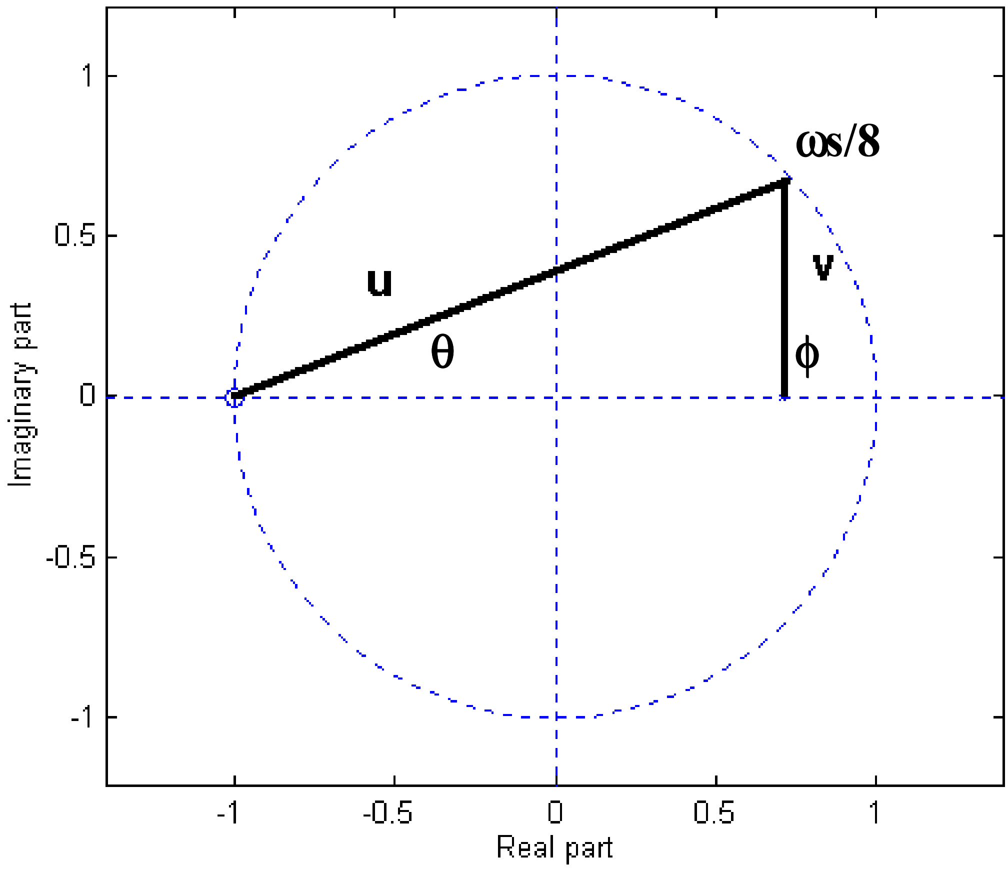
Charakterystyka częstotliwościowa uzyskiwana jest w wyniku podania na wejście sygnału sinusoidalnego o amplitudzie 1 i sprawdzeniu odpowiedzi układu dla wszystkich częstotliwości.

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{j\omega T} + 1}{e^{j\omega T} - 0{,}7071} = \frac{1 + \cos(\omega T) + j\sin(\omega T)}{\cos(\omega T) - 0{,}7071 + j\sin(\omega T)}$$

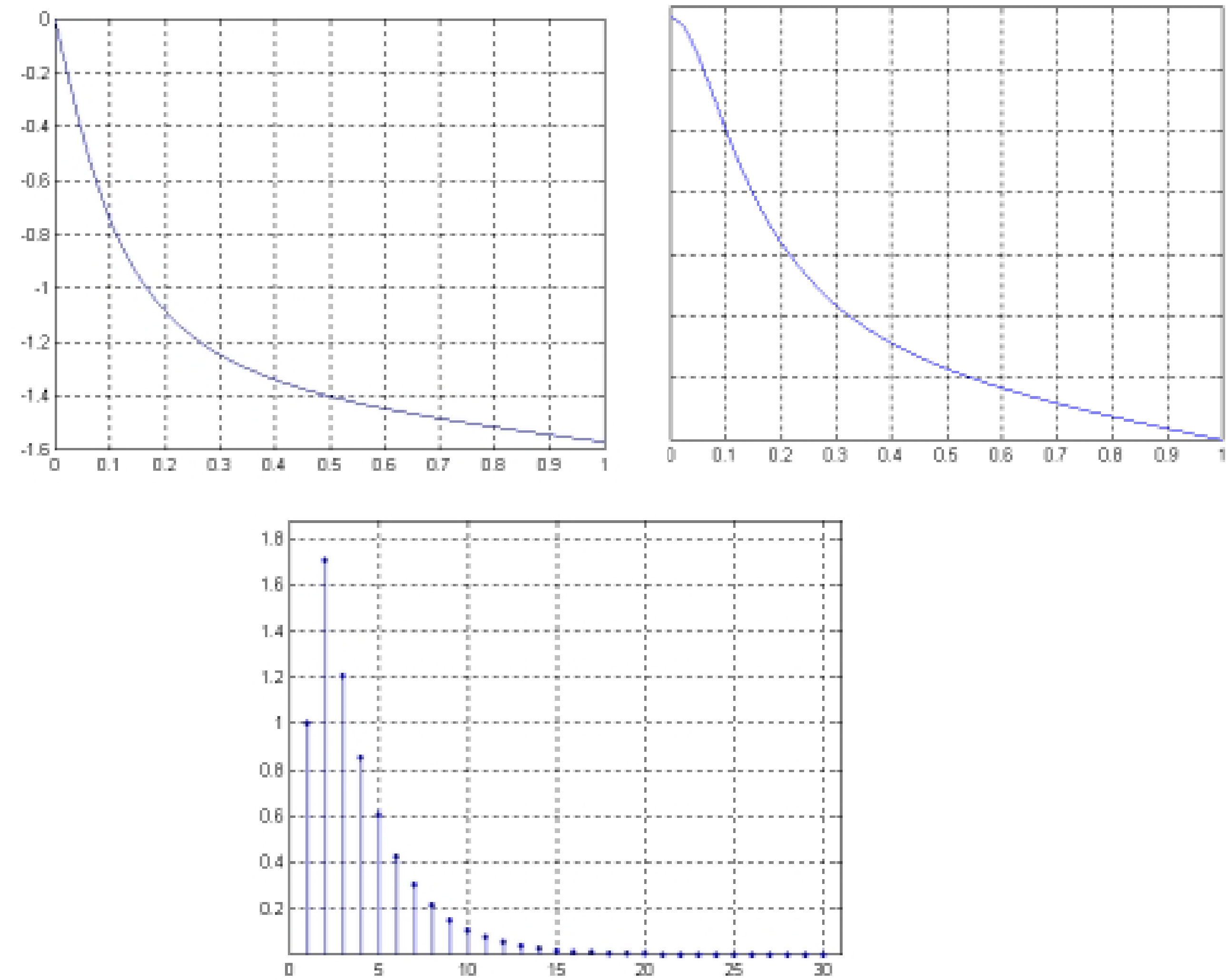
Aby ją uzyskać należy przyjąć pobudzenie $z = e^{j\omega T}$ .

Warunki obliczeń przedstawia tabela.

| ωT | Real(H)+Img(H) | abs(H) | angle(H) [radian] | angle(H) [deg] |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 6,8283 + 0,0000i | 6,8283 | 0 | 0 |
| π/4 | 1,0000 – 2,4142i | 2,6131 | -1,1781 | -67,4995 |
| π/2 | 0,1953 – 1,1381i | 1,1547 | -1,4009 | -80,2641 |
| ¾π | 0,0343 – 0,4828i | 0,4841 | -1,4998 | -85,9348 |
| π | 0,0000 – 0,0000i | 0,0000 | -1,5708 | -90,0000 |




Położenie zer i biegunów




Charakterystyka amplitudowa i fazowa .