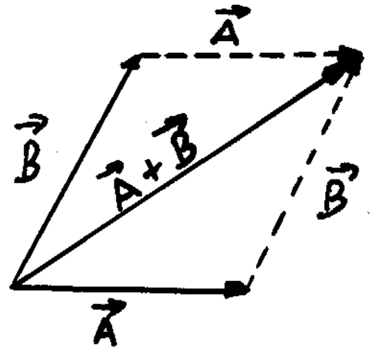
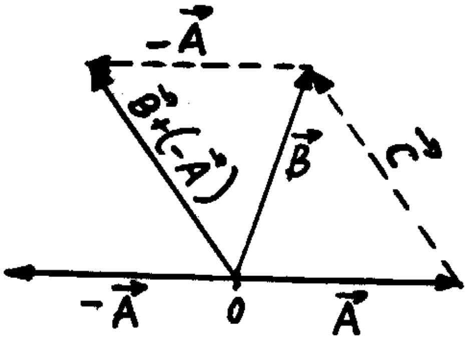
Rachunek wektorowy.

1. Dodawanie wektorów



$$\boxed{\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}}$$

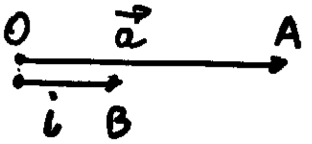


$$\vec{C} = \vec{B}+(-\vec{A}) = \vec{B}-\vec{A}$$

$$\boxed{\vec{C}+\vec{A} = \vec{B}}$$

2. Układ współrzędnych.

a) wektor jednostkowy.



$$|\overline{OA}| = a$$

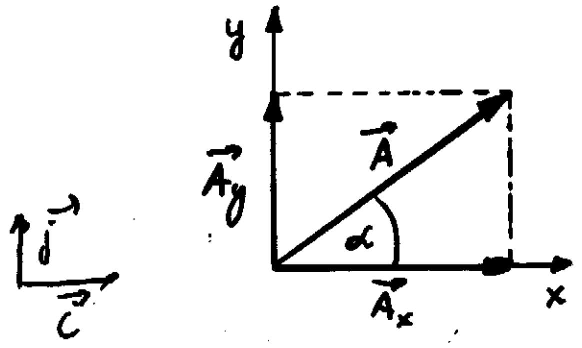
$$|\overline{OB}| = 1$$

$$\vec{a} = |\overline{OA}|\cdot\vec{i} = |\vec{a}|\,\vec{i} = a\,\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{i} = \frac{1}{a}\cdot\vec{a}}$$

wektor jednostkowy kierunku wyznaczonego przez wektor $\vec{a}$

b) kartezjański u. w.



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

$$|\vec{A}_x| = |\vec{A}|\cos\alpha$$

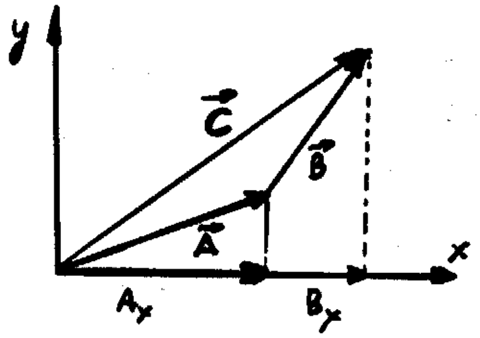
$$|\vec{A}_y| = |\vec{A}|\sin\alpha$$

$$\vec{A}_x = |\vec{A}_x|\cdot\vec{i} = |\vec{A}|\cos\alpha\cdot\vec{i}$$

$$\vec{A}_y = |\vec{A}|\cdot\sin\alpha\cdot\vec{j}$$

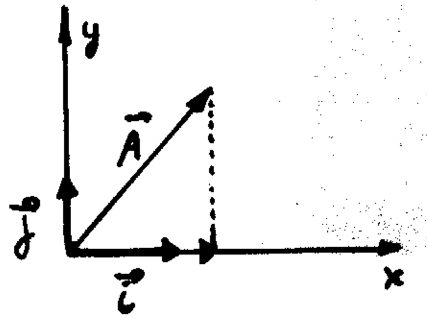
$$\vec{A} = |\vec{A}_x|\cdot\vec{i} + |\vec{A}_y|\cdot\vec{j}$$

$$\vec{A} = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j}$$



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$
$$\vec{C}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x$$
$$\vec{C}_y = A_y + \vec{B}_y$$

c) przedstawienie za pomocą wektora jednostkowego



$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$$
$$\vec{A}_x = |\vec{A}_x|\,\vec{i} = a_x \cdot \vec{i}$$
$$\vec{A}_y = |A_y|\,\vec{j} = a_y \cdot \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{A} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}}$$

d) dodawanie wektorów

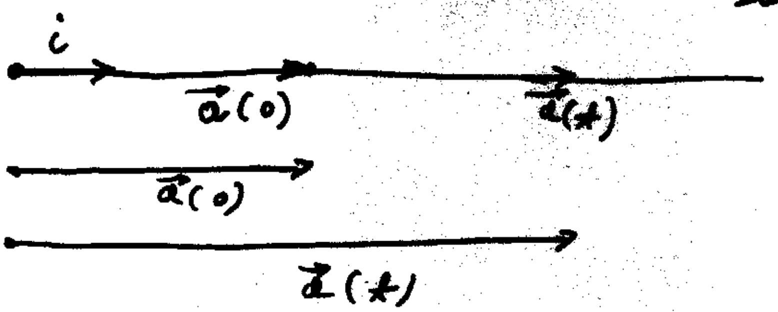
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{C}_x + \vec{C}_y = \vec{A}_x + \vec{B}_x + \vec{A}_y + \vec{B}_y$$
$$\boxed{\vec{C} = (a_x + b_x) \cdot \vec{i} + (a_y + b_y) \cdot \vec{j}}$$

e) mnożenie wektora przez stałą

$$\vec{C} = n \cdot \vec{A} = n(a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j})$$
$$\boxed{n\vec{A} = n a_x \cdot \vec{i} + n \cdot a_y \cdot \vec{j}}$$

Pochodna wektora

zał. $\vec{i} = \text{const.}$



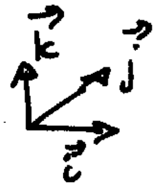
$$\frac{\Delta \vec{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{a}(t) - \vec{a}(0)}{\Delta t} = \frac{a(t) - a(0)}{\Delta t} \cdot \vec{i}$$

Def. szybkości zmian wektora $\vec{a}$ w chwili $t=0$

$$\vec{b}(0) = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a}{\Delta t} \cdot \vec{i} \right)$$

$$\boxed{\vec{b}(0) = \frac{da}{dt} \cdot \vec{i}}$$

*) Dla wektora w 3D u.w.



$$\vec{a} = a_x(t) \cdot \vec{i} + a_y(t) \cdot \vec{j} + a_z(t) \cdot \vec{k}$$

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \cdot \vec{k}$$

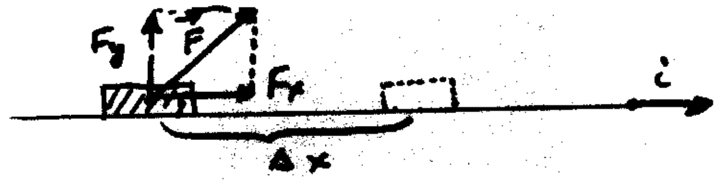
**) Kierunek wektora zależy od czasu

$$\vec{a} = |\vec{a}(t)| \cdot \vec{e}_a(t)$$

$$\dot{\vec{a}} = \vec{e}_a(t) \cdot \frac{d|\vec{a}(t)|}{dt} + |\vec{a}(t)| \cdot \frac{d\vec{e}_a(t)}{dt}$$

Iloczyn skalarny wektorów

a) praca siły



$$\Delta W = F_x \cdot \Delta x = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha \cdot \Delta x$$

$$\vec{\Delta x} = \Delta x \cdot \vec{i}$$

$$\Delta W = |\vec{F}| \cdot |\vec{\Delta x}| \cdot \cos\alpha$$

Def. iloczynu skalarnego

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\alpha$$

$$\boxed{\Delta W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta x}}$$

b) własności

1: $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

3: $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = a^2$

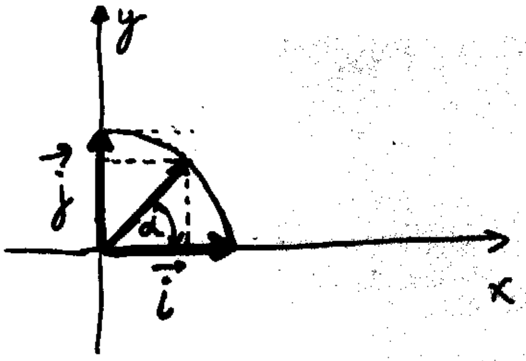
4: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

5: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$

dw. 4:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j})(b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = a_x b_x \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\vec{i}^2} + a_y b_y \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\vec{j}^2}$$

Obrót wektora jednostkowego $\vec{e}$



$$\vec{e} = 1 \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} + 1 \cdot \sin\alpha \cdot \vec{j}$$

Niech $\alpha = \omega t$

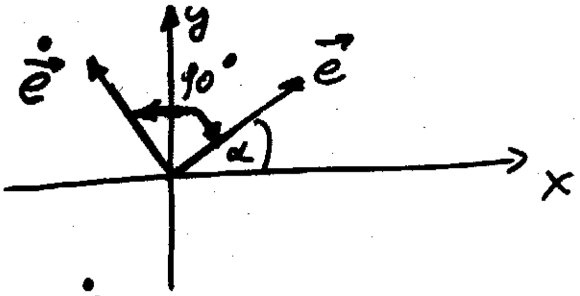
$$\vec{e} = \cos\omega t \cdot \vec{i} + \sin\omega t \cdot \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = -\omega \sin\omega t \cdot \vec{i} + \omega \cos\omega t \cdot \vec{j}$$

tw. $\sin(\beta + 90) = \cos\beta \Rightarrow \sin(\omega t + 90) = \cos\omega t$

$\cos(\beta + 90) = -\sin\beta \Rightarrow \cos(\omega t + 90) = -\sin\omega t$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \omega \left\{ \cos(\omega t + 90)\, \vec{i} + \sin(\omega t + 90) \cdot \vec{j} \right\}$$



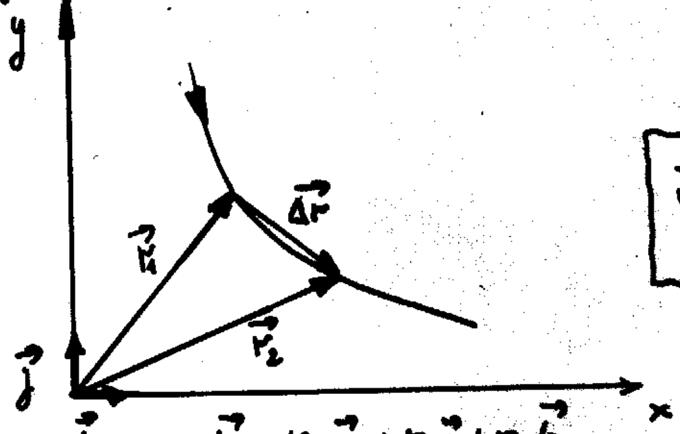
Oznaczenie
$$\vec{e}_\perp = \dot{\vec{e}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \vec{e}_\perp}$$ gdzie $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da(t)}{dt} \cdot \vec{e}_a + a(t) \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cdot \vec{e}_\perp$$

Ruch krzywoliniowy

a) prędkość



$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\boxed{\vec{V}_{śr} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}}$$

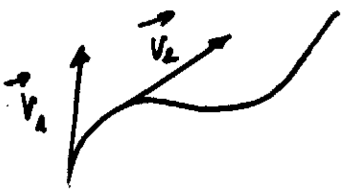
$$\vec{r} = r_x \cdot \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k}$$

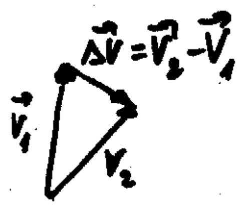
$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{V} = \frac{dr_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dr_y}{dt} \vec{j} + \frac{dr_z}{dt} \vec{k}$$

$$\boxed{\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \vec{k}}$$

b) przyspieszenie $\vec{a}$



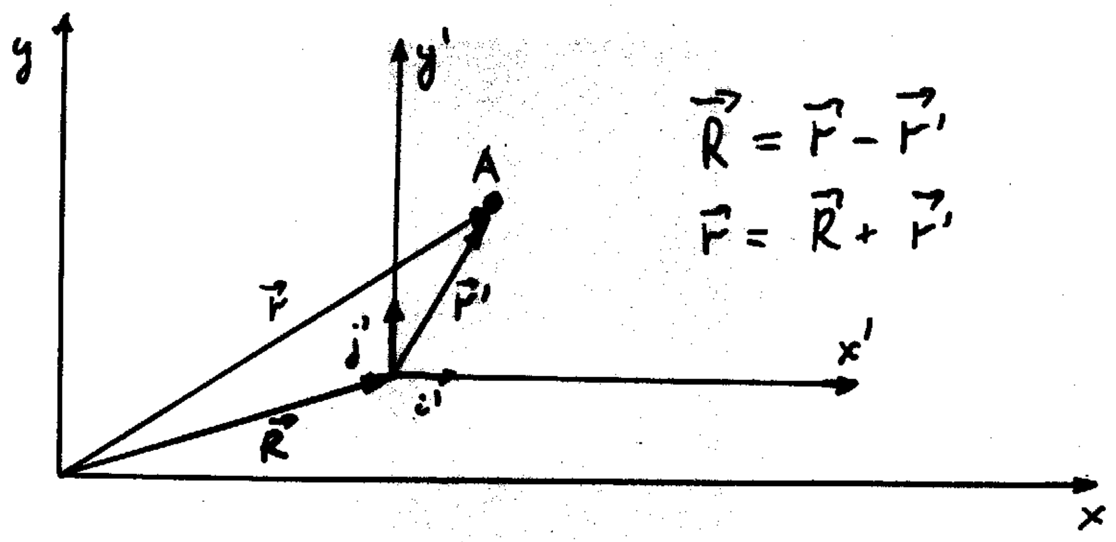


$$\vec{a}_{śr} = \frac{\vec{\Delta V}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{chw} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dV_x}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dV_y}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dV_z}{dt} \vec{k}}$$

Transformacje Galileusza



$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$
$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}'$$

Zał.

a) Czas w obu układach "biegnie z jednakową prędkością"

b) Odległość pomiędzy dowolnymi dwoma punktami jest niezależna od tego w jakim układzie jest mierzona

1. Transf. prędkości

$$\underset{\parallel \, v}{\frac{d\vec{r}}{dt}} = \underset{\parallel \, u}{\frac{d\vec{R}}{dt}} + \underset{\parallel \, v'}{\frac{d\vec{r}'}{dt}}$$

u - prędkość układu X'Y

$$\boxed{\vec{V} = \vec{u} + \vec{V}'}$$

2. Transformacja przyspieszenia

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

Jeżeli układ X'Y' porusza się ze stałą prędkością względem XY to $\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$, skąd:

$$\vec{a} = \vec{a}', \text{ oraz } m\vec{a} = m\vec{a}' \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}'$$

Zasady dynamiki klasycznej

I. Pierwsza zasada

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{v} = \mathrm{const.}}$$

tzn. a) wartość prędkości nie zależy od czasu

b) kierunek ruchu i zwrot nie ulegają zmianie

II Druga zasada.

1. Pęd - wielkość wektorowa

Def.

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$ ← punkt materialny

$$\boxed{\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}$$ ← układ punktów

2. Siła.

Aby nastąpiła zmiana pędu układu, na układ musi działać różna od zera siła wypadkowa.

$$\boxed{\Delta\vec{p} = \vec{F}\cdot\Delta t}$$ ← druga zasada dynamiki

lub

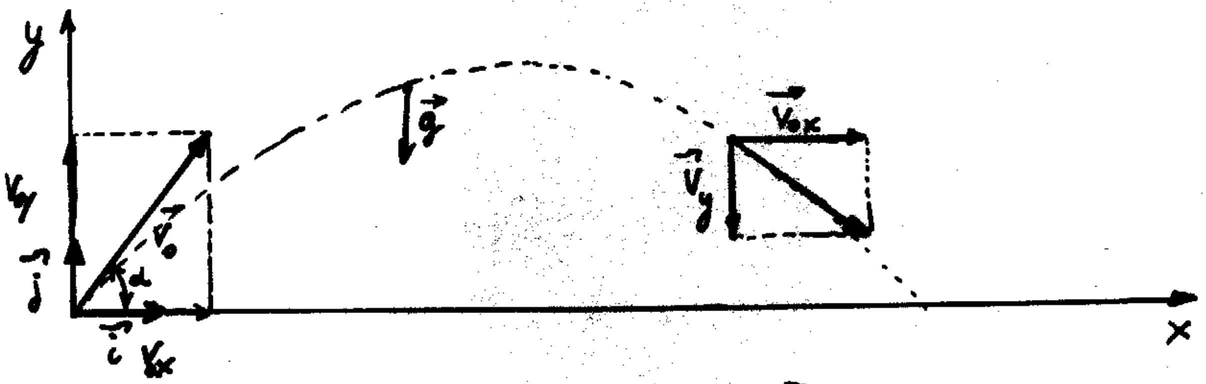
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Uwaga! W przypadku gdy masa nie zależy od prędkości ($v \ll c$) mamy:

$$\vec{F} = \frac{d(m\cdot\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\cdot\vec{a}$$

Równania ruchu - przykłady

1. Rzut ukośny



$$\vec{V}_0 = V_{0x}\cdot\vec{i} + V_{0y}\cdot\vec{j} \quad ; \quad \vec{F} = -gm\vec{i}$$

Równanie ruchu:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -mg\vec{j}$$

Rozwiązanie:

$$\vec{p} = -mgt\cdot\vec{j} + \vec{C}$$

warunek początkowy $\vec{p}(0) = m\vec{v}$

$$\vec{p}(0) = \vec{C} = mv_0\cos\alpha\,\vec{i} + mv_0\sin\alpha\,\vec{j}$$

$$\vec{p}(t) = (mv_0\sin(\alpha) - mgt)\vec{j} + mv_0\cos\alpha\,\vec{i}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = (v_0\sin\alpha - gt)\vec{j} + v_0\cos\alpha\,\vec{i}}$$

Tor cząstki:

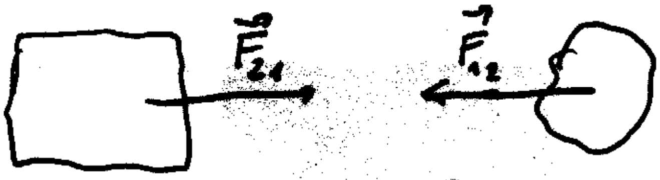
$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{r} = \int \vec{V}\cdot dt$$

$$\vec{r}(t) = \left(V_0\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j} + v_0\cos\alpha\cdot t\cdot\vec{i} + \vec{C}$$

$$\vec{r}(0) = 0 \Rightarrow \vec{C} = 0$$

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\left(v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{1}{2}gt^2\right)}_{y(t)}\vec{j} + \underbrace{v_0\cos\alpha\cdot t}_{x(t)}\cdot\vec{i}$$

IV. Prawo zachowania pędu



III zasada: $\vec F_{21} = -\vec F_{12}$

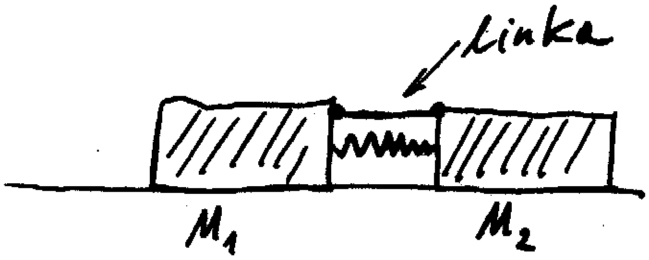
Zał.: Suma sił zewnętrznych $= 0$

$$\Delta\vec p = \Delta\vec p_1 + \Delta\vec p_2 = (\vec F_{12}+\vec F_{21})\cdot\Delta t = 0$$

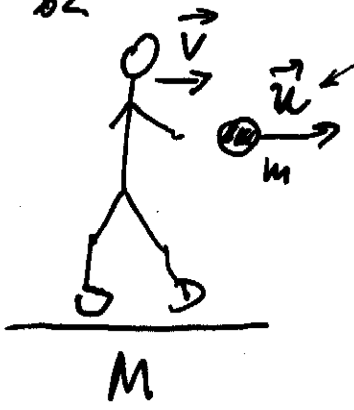
$$\boxed{\Delta \vec p = 0}$$

b). przykład

b1.



b2.



$$(M+m)\vec V = m\vec u + M\vec V_1$$