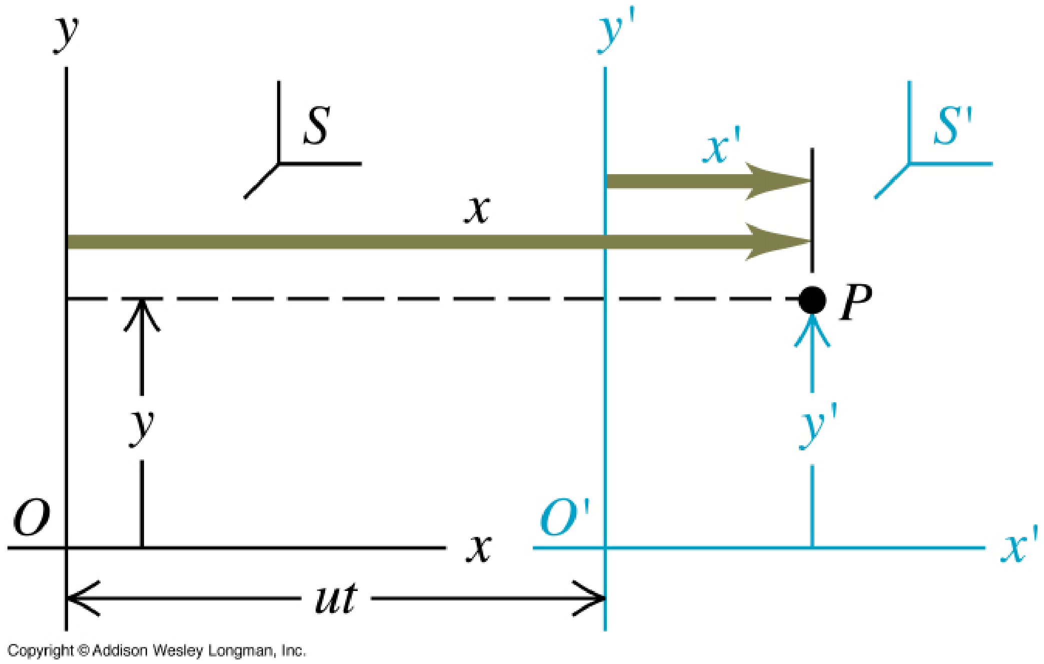
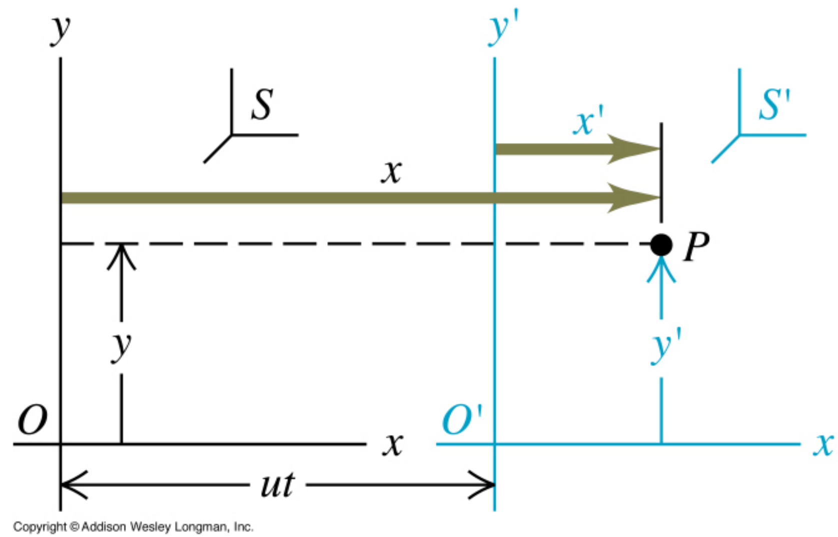
Transformacje Galileusza



$x = x' + ut \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = t'$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + u \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v = v' + u}$$

Zasada względności Galileusza



$$ma' = m\frac{d^2x'}{dt'^2}$$

$$x' = x - ut \quad \Rightarrow \quad \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'}$$

$$t = t' \quad \Rightarrow \frac{dt}{dt'} = 1$$

$$ma' = m\frac{d^2x'}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}(x - ut) = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} - u\right) = m\frac{d^2x}{dt^2} = ma$$

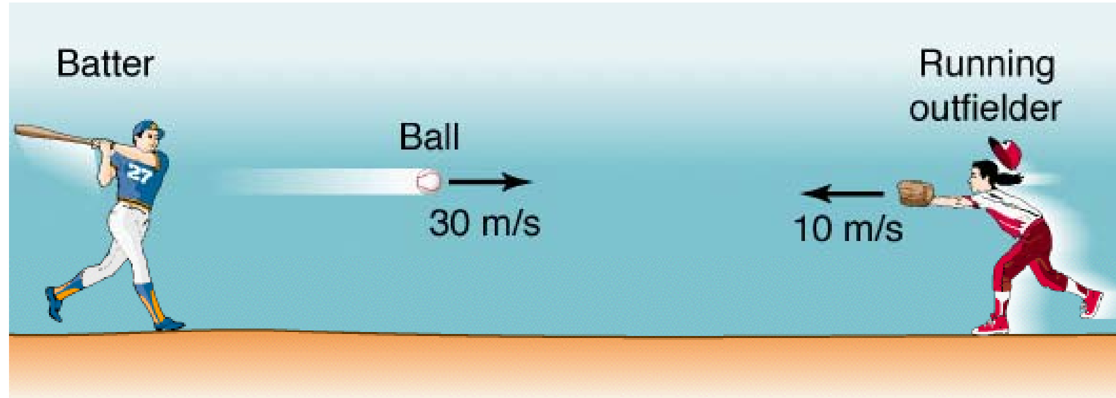
$$\boxed{ma' = ma} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}' = \vec{F}$$

Prawa fizyki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Zasady dynamiki Newtona są niezmiennicze względem transformacji Galileusza.

Szczególna teoria względności

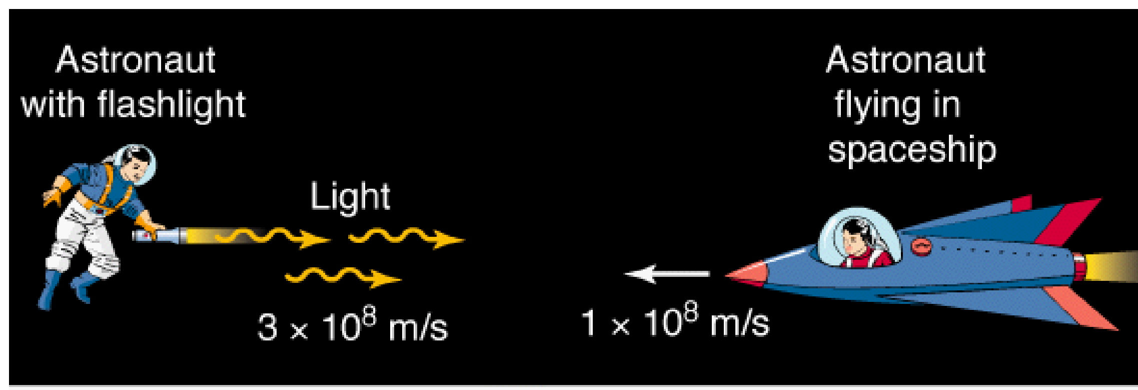
Czy to możliwe, aby prędkość światła była taka sama niezależnie od tego który obserwator ją mierzy?



As seen by outfielder, ball is approaching her at
(30 m/s) + (10 m/s) = 40 m/s

Z transformacji Galileusza:

$$v = v' + u$$

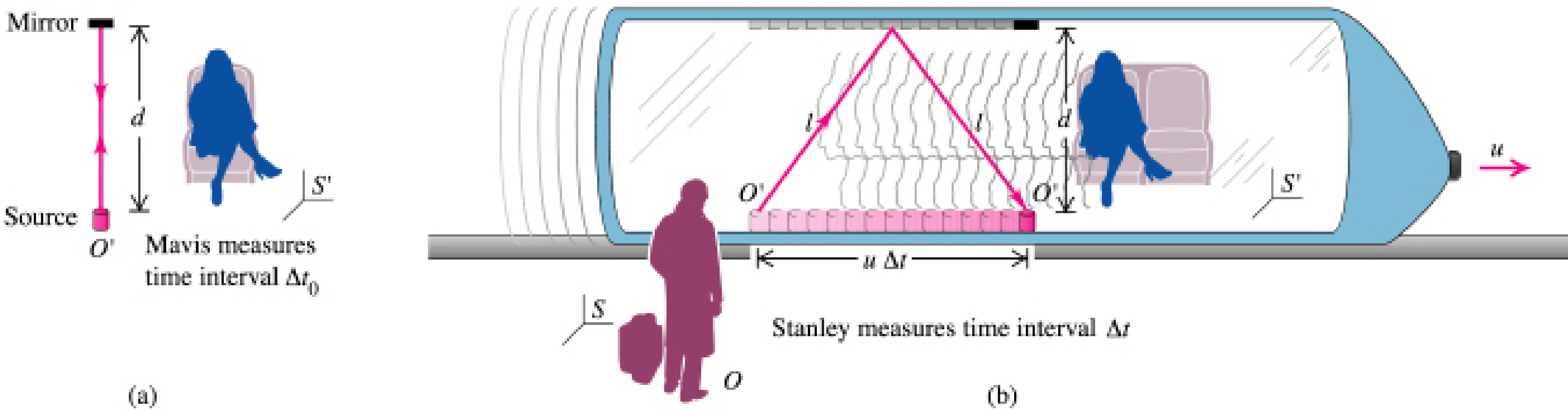


Incorrect Newtonian description:
As seen by astronaut in spaceship, light is approaching her at
$(3 \times 10^8$ m/s$) + (1 \times 10^8$ m/s$) = 4 \times 10^8$ m/s

Jeśli v'=c to v = c + u > c!! – sprzeczność z doświadczeniem.

Nie będzie sprzeczności, jeśli założyć, że $t' \neq t$

Szczególna teoria względności



Mavis mierzy odstęp czasu: $\Delta t_0 = \dfrac{2d}{c}$ $\qquad l = \sqrt{d^2 + \left(\dfrac{u\Delta t}{2}\right)^2}$

Stanley mierzy odstęp czasu: $\Delta t = \dfrac{2l}{c} = \dfrac{2}{c}\sqrt{d^2 + \left(\dfrac{u\Delta t}{2}\right)^2} = \dfrac{2}{c}\sqrt{\left(\dfrac{c\Delta t_0}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{u\Delta t}{2}\right)^2}$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}}$$

Δt_0 jest zwany czasem własnym

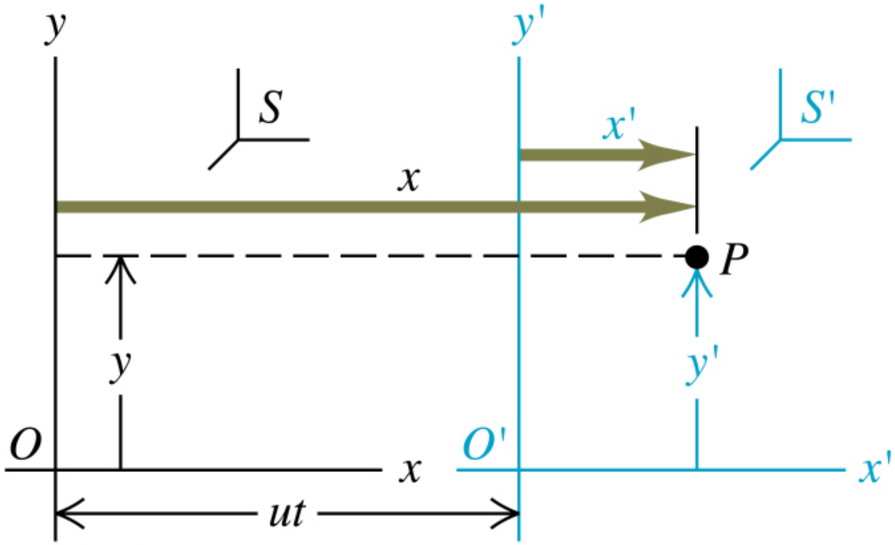
Szczególna teoria względności

Postulaty Einsteina:

I. Prawa fizyki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

II. Prędkość światła w próżni jest taka sama we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Transformacje Lorentza



Transformacje Galileusza:

$$x' = x - ut \qquad x = x' + ut$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

$$z' = z \qquad z = z'$$

$$t' = t \qquad t = t'$$

Transformacje Lorentza:

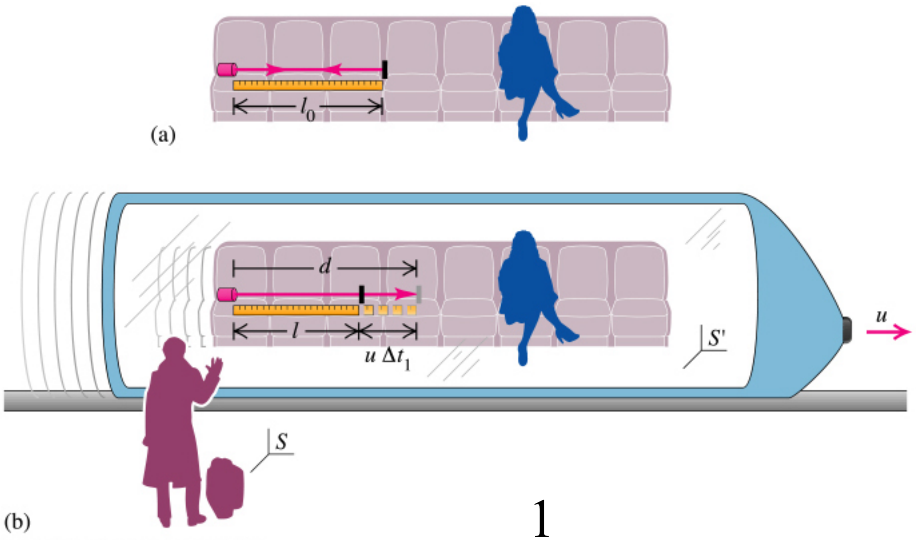
$$x' = \gamma\,(x - ut) \qquad x = \gamma\,(x' + ut)$$

$$y' = y \qquad z' = z \qquad y = y' \qquad z = z'$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{xu}{c^2}\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{xu}{c^2}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Skrócenie długości



$$l_0 = x_2{}' - x_1{}'$$

$$l_0 = \gamma\,(x_2 - ut) - \gamma\,(x_1 - ut)$$

$$l_0 = \gamma\,(x_2 - x_1)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

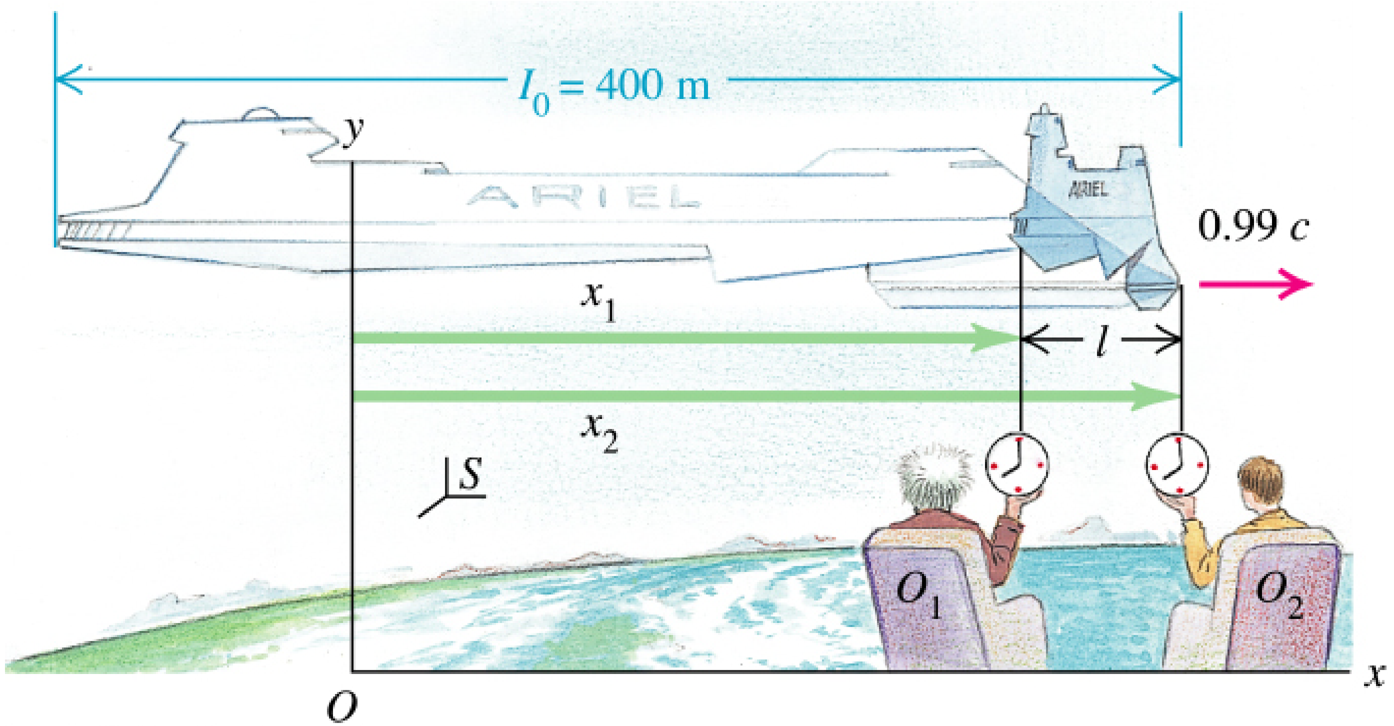
$$l_0 = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

$$\boxed{l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}} \Rightarrow \boxed{l = \sqrt{1 - (u/c)^2}\cdot l_0}$$

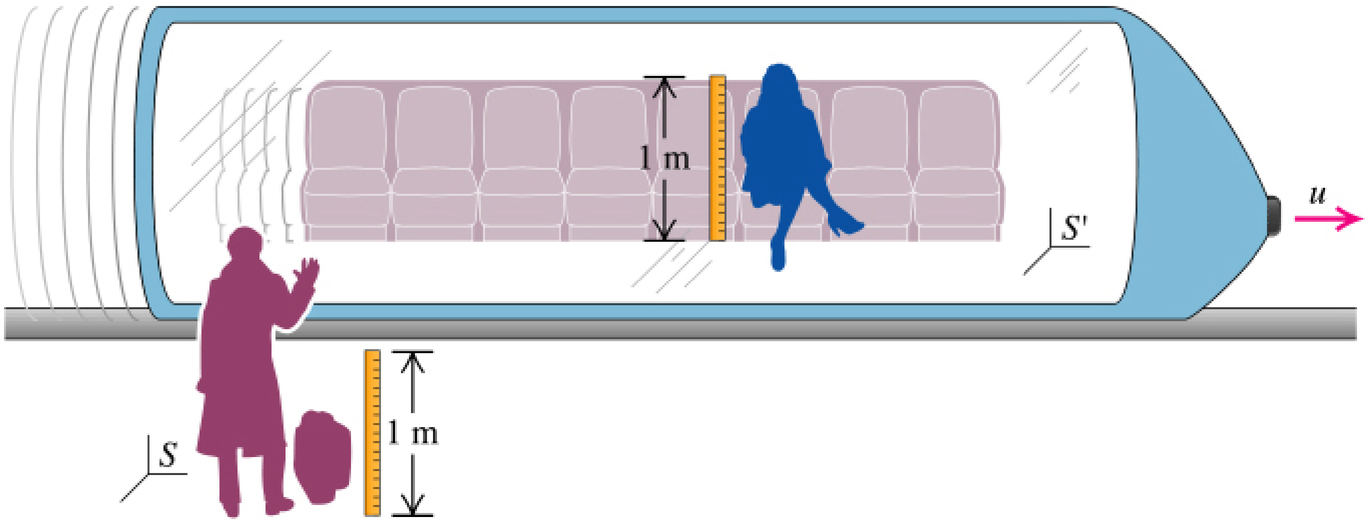
Przykład

- Załoga statku kosmicznego mierzy jego długość i otrzymuje wynik 400m. Jaką długość statku zmierzy obserwator na Ziemi, jeśli wiadomo, że prędkość statku u = 0.8c

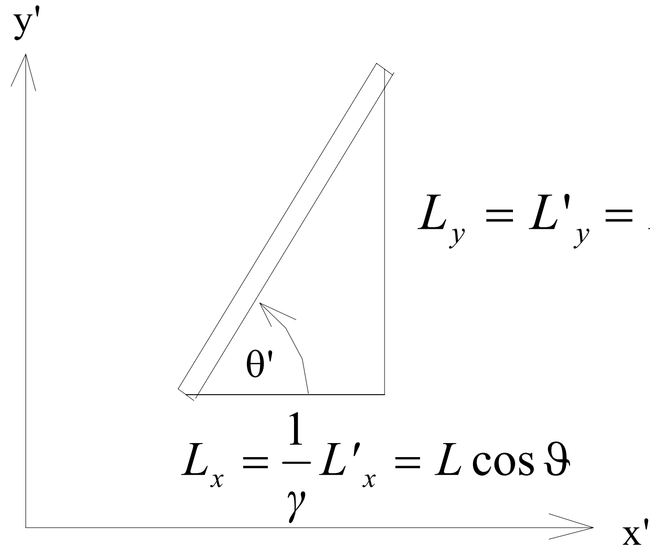
$$l = l_0\sqrt{1-u^2/c^2} = 400\sqrt{1-(0.8c/c)^2} = 400\sqrt{1-0.64} = 240\ m$$



Długość w kier. prostopadłym do kier. ruchu układu



$$l_{\perp} = l'_{\perp}$$



$$L_y = L'_y = L\sin\vartheta$$

$$L_x = \frac{1}{\gamma} L'_x = L\cos\vartheta$$

$$\tan\vartheta = \frac{L\sin\vartheta}{L\cos\vartheta} = \frac{L_y}{L_x} = \frac{\gamma L'_y}{L'_x} = \frac{\gamma \sin\vartheta'}{\cos\vartheta'} = \gamma \tan\vartheta'$$

$$\tan\vartheta = \gamma \tan\vartheta'$$

Czas pomiędzy dwoma zdarzeniami

a) Zdarzenia zachodzą w tym samym punkcie $x' = a$
i w chwilach t_1' *oraz* t_2' względem układu *S'*

$$t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' + \frac{x_2' u}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1' + \frac{x_1' u}{c^2}\right)$$

$$t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' + \cancel{\frac{au}{c^2}} - t_1' - \cancel{\frac{au}{c^2}}\right) = \gamma\left(t_2' - t_1'\right)$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

czas własny

Zdarzenia jednoczesne, zachodzące w tym samym punkcie w jednym inercjalnym u.w. są równoczesnymi w każdym innym układzie inercjalnym.

Czas pomiędzy dwoma zdarzeniami

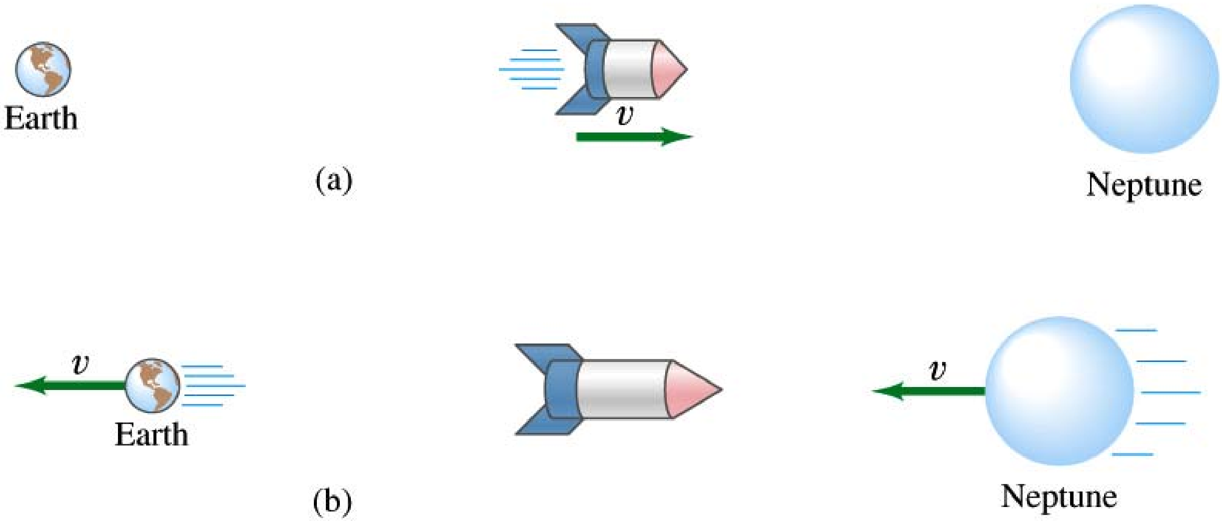
Przykład

- Statek kosmiczny wysyła impulsy świetlne trwające wg astronautów na statku $2x10^{-6}$s. Jak długo trwają te impulsy wg obserwatora na Ziemi, jeśli statek porusza się względem Ziemi z prędkością v=0.6c?

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{2x10^{-6}s}{\sqrt{1 - \frac{0.6c^2}{c^2}}} = \frac{2x10^{-6}s}{0.8} = 2.5x10^{-6}s$$

Paradoks bliźniąt

Kto żył dłużej ?

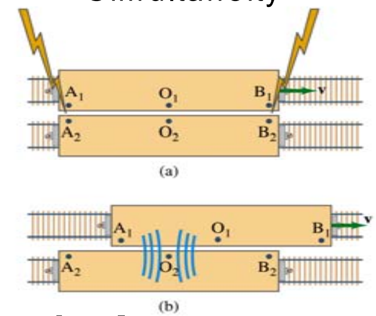


$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v = 0.99c \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t_0}{0.141}$$

$$\boxed{\Delta t_0 = 7 \cdot \Delta t}$$

Simultaneity



*) równoczesność zdarzeń

Niech w układzie spoczywającym zajdą równocześnie dwa zdarzenia w punktach x_A i x_B. Co stwierdzi obserwator w układzie poruszającym się?

$$t'_A - t'_B = \frac{(x_B - x_A)\, u/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

$$x_B - x_A > 0 \Rightarrow t'_A - t'_B > 0 \text{ tzn } t'_A > t'_B$$

zdarzenie A zaszło wcześniej niż B.

Obserwator poruszający się stwierdzi równoczesność zdarzeń A i B tylko wtedy gdy zachodzą one w tym samym miejscu ($x_A = x_B$).

Zdarzenia niezależne

$$\left.\begin{array}{l}\text{Zdarzenie A w chwili } t_1 \\ \text{Zdarzenie B w chwili } t_2\end{array}\right\} \quad \Delta t = t_2 - t_1$$

Światło potrzebuje czasu $\tau = \frac{d}{c}$ aby przebyć drogę d.

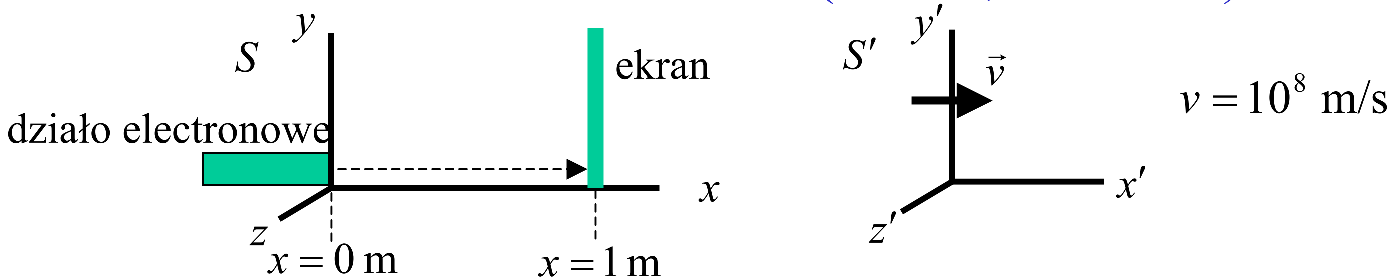
Zdarzenia niezależne gdy

$$\tau > \Delta t \Rightarrow d > c \cdot \Delta t$$

Związek przyczynowo - skutkowy

Zdarzenie A: działo elektronowe wysyła elektron (x=0, t=0)

Zdarzenie B: elektron uderza o ekran (x=1m, t=0.1 ns)



$$\Delta x = x_B - x_A = 1 \text{ m}$$

prędkość elektronu v=0.9c, Δt_0=3.7 ns

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma\left(\Delta t_0 - \frac{\Delta x v}{c^2}\right) = \gamma\left(3.7\times10^{-9} - \frac{1\cdot\left(0.9\cdot 3\times10^8\right)}{\left(3\times10^8\right)^2}\right)$$

$$= \gamma\left(0.7\times10^{-9}\right) s \quad \Rightarrow \quad \Delta t' > 0$$

Kolejność zdarzeń została zachowana

Związek przyczynowo - skutkowy

Rozpatrzmy dwa zdarzenia A i B występujące po sobie w przedziale czasowym Δt w odległości Δx od siebie .Wystąpienie zdarzenia B jest zależne od wystąpienia zdarzenia A.   Obserwator w spoczywającym u.w stwierdza, że zdarzenie A występuje wcześniej niż B .

$$\Delta t = t_B - t_A > 0$$

Czy w układzie poruszającym się sekwencja zdarzeń może być odwrotna ?

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma \underbrace{\left(\Delta t - \frac{\Delta x v}{c^2} \right)} < 0 \quad ?$$

$$\Delta t - \frac{\Delta x v}{c^2} < 0$$ czyli musi być $$\frac{\Delta x v}{c^2} > \Delta t$$

Jeżeli zdarzenie B jest wynikiem zajścia zdarzenia A, to $\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq c$. Stąd

$$\frac{\Delta x v}{\Delta t} > c^2$$ nie może być spełnione

Sekwencja zdarzeń zależnych jest taka sama we wszystkich u.w

Interwał

Dowolne zdarzenie opisane jest poprzez 4 współrzędne

$$(ct, x, y, z)$$

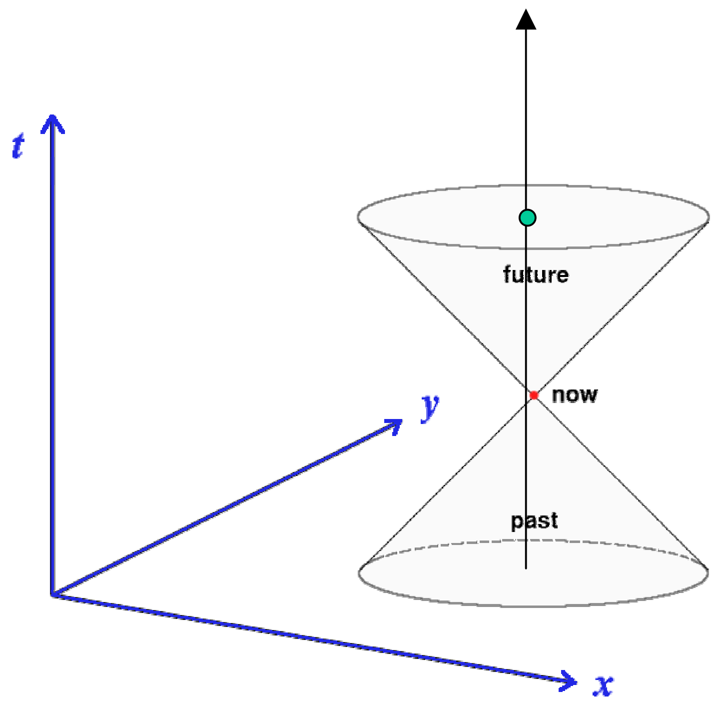
Odległość pomiędzy zdarzeniami

Interwał →
$$\boxed{\begin{aligned}\Delta s^2 &= c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \\ \Delta s^2 &= c^2\Delta t^2 - d^2\end{aligned}}$$

Tw.

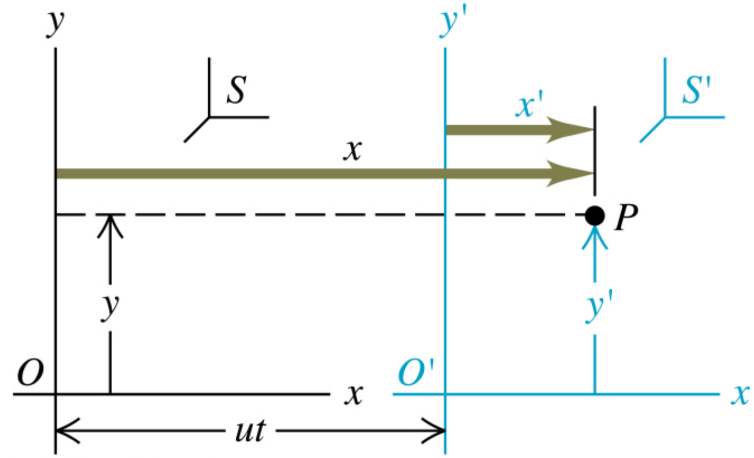
Wartość interwału nie zależy od układu odniesienia. Interwał jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.

Stożek zdarzeń



Transformacja prędkości

Załóżmy, że pewna cząstka porusza się z prędkością u wzdłuż osi Ox. Powiążmy z tą cząstką nowy u.w.



$$dx' = \gamma\,(dx - u\,dt)$$

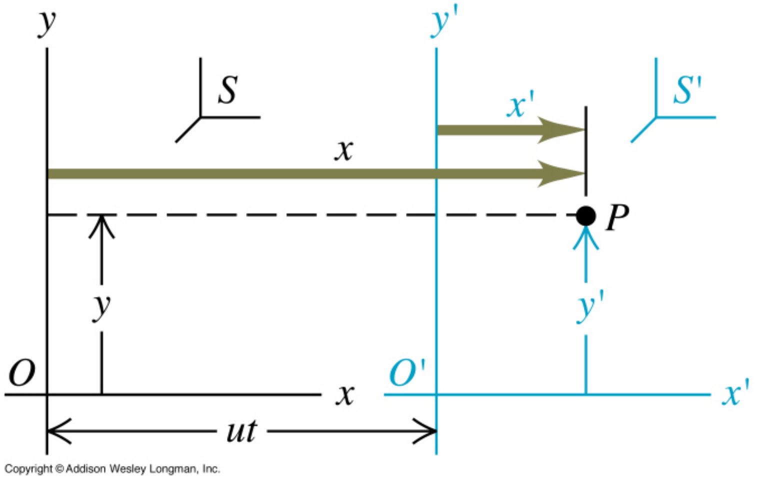
$$dt' = \gamma\,(dt - u\frac{dx}{c^2})$$

$$\mathrm{v}_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma\,(dx - u\,dt)}{\gamma\,(dt - u\frac{dx}{c^2})} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{\mathrm{v}_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}\mathrm{v}_x}$$

$$\boxed{\mathrm{v}_x = \frac{\mathrm{v}_{x'} + u}{1 + \frac{u}{c^2}\mathrm{v}_{x'}}} \qquad \boxed{\mathrm{v}_{x'} = \frac{\mathrm{v}_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}\mathrm{v}_x}}$$

Transformacja prędkości

Teraz ta cząstka porusza się w kierunku osi *Oy*, a ruch jej jest obserwowany przez obserwatora w układzie *O'x'*



$$dy' = dy$$

$$dt' = \gamma\,(dt - u\frac{dx}{c^2}) = \gamma dt$$

$$\boxed{\mathrm{v}_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma dt} = \mathrm{v}_y\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

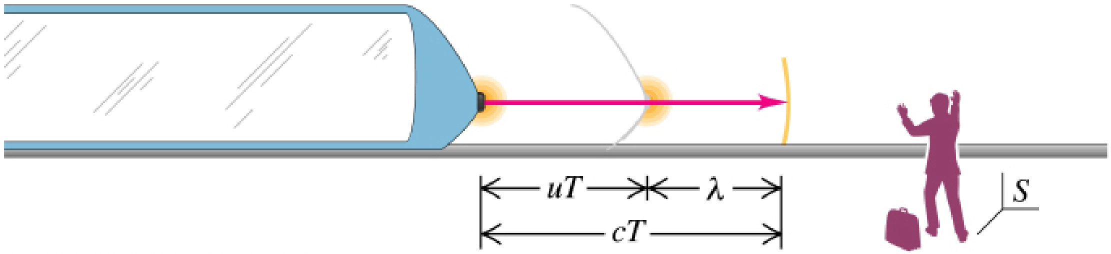
Czas pomiędzy dwoma zdarzeniami

Przykład

- Statek kosmiczny wysyła impulsy świetlne trwające wg astronautów na statku $2x10^{-6}$s. Jak długo trwają te impulsy wg obserwatora na Ziemi, jeśli statek porusza się względem Ziemi z prędkością v=0.6c?

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{2x10^{-6}s}{\sqrt{1-\frac{0.6c^2}{c^2}}} = \frac{2x10^{-6}s}{0.8} = 2.5x10^{-6}s$$

Efekt Dopplera



Źródło fali elekromagnetycznej porusza się w kierunku obserwatora (przybliża się):

$$f = \sqrt{\frac{(c+u)}{(c-u)}} f_0$$

f>f_0 oraz $\lambda<\lambda_0$

Źródło fali elekromagnetycznej oddala się od obserwatora:

$$f = \sqrt{\frac{(c-u)}{(c+u)}} f_0$$

f<f_0 oraz $\lambda>\lambda_0$

Efekt Dopplera