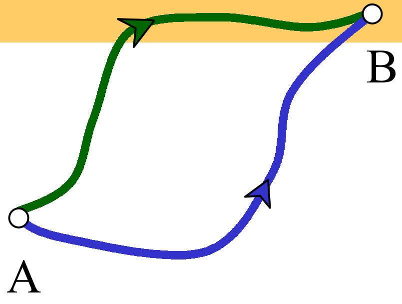
Siły zachowawcze

Jeśli praca siły przemieszczającej cząstkę z punktu A do punktu B nie zależy od tego po jakim torze poruszała się cząstka, to ta siła jest nazywana siłą zachowawczą.



Wszystkie inne siły nie są zachowawcze.

(Twierdzenie)

Praca siły zachowawczej przemieszczającej cząstkę po torze zamkniętym jest równa zeru.

Sily zachowawcze : grawitacji, sprężystości, elektrostatyczna.

Energia Potencjalna

Jeśli na cząstkę działa siła zachowawcza, to zmiana energii potencjalnej związana ze zmianą położenia cząstki dU jest zdefiniowana jako praca dW wykonana przez tę siłę.

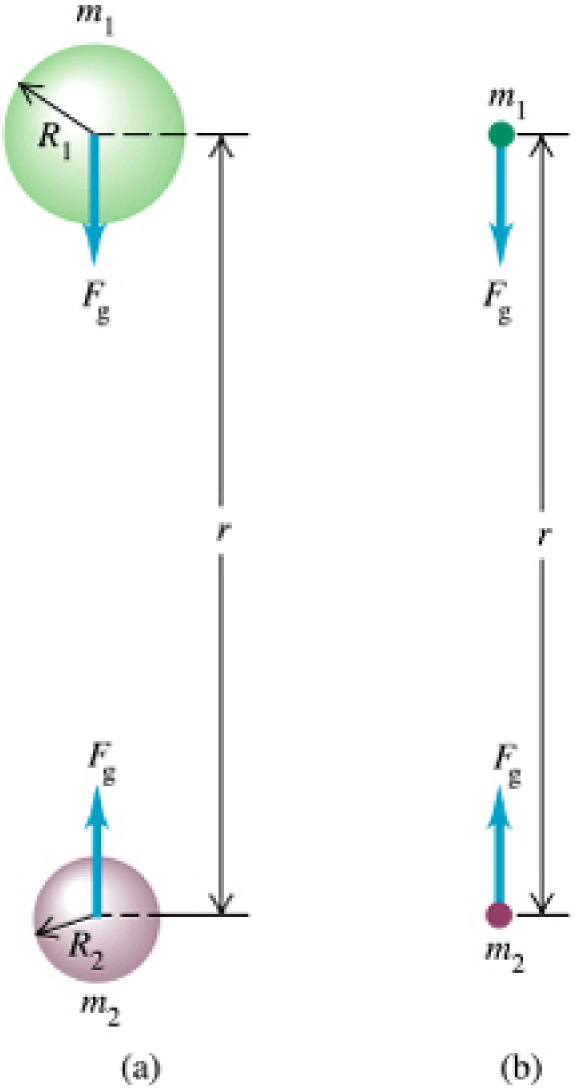
$$dU \equiv -\delta W \qquad (\text{lub } \Delta U = -\Delta W)$$

Ta definicja określa energię potencjalną z dokładnością do stałej.

Prawo powszechnego ciążenia

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

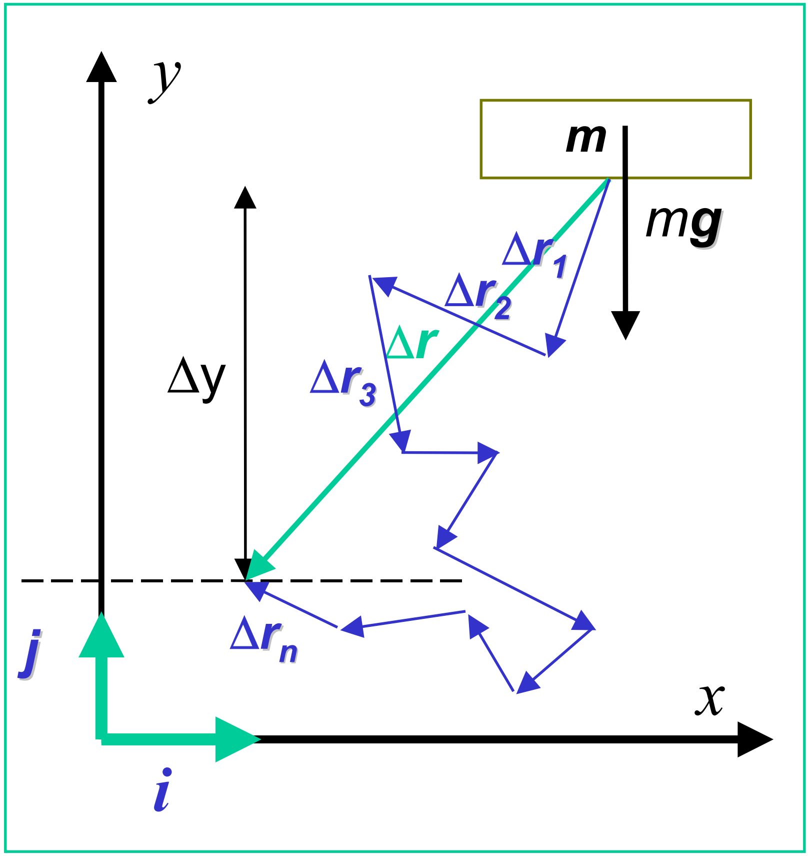
G=6.67×10^-11^ N•m²/kg²



Praca siły grawitacyjnej

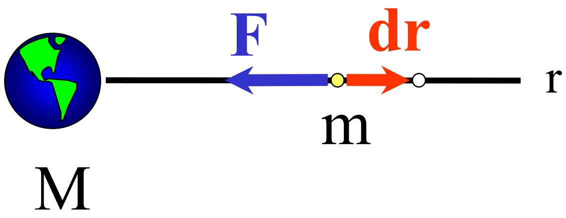
$$W_{NET} = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$$
$$= \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_2 + \ldots + \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r}_n$$
$$= \boldsymbol{F} \cdot (\Delta \boldsymbol{r}_1 + \Delta \boldsymbol{r}_2 + \ldots + \Delta \boldsymbol{r}_n)$$
$$= \boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r}$$
$$= \boldsymbol{F}\, \Delta y$$

$$\boxed{W_g = -mg\, \Delta y}$$



Energia potencjalna w polu grawitacyjnym

$$\Delta W = \int_{droga} (-G\frac{Mm}{r^3})\vec{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = \int_{r_0}^{r} (-G\frac{Mm}{r^2})dr == -GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

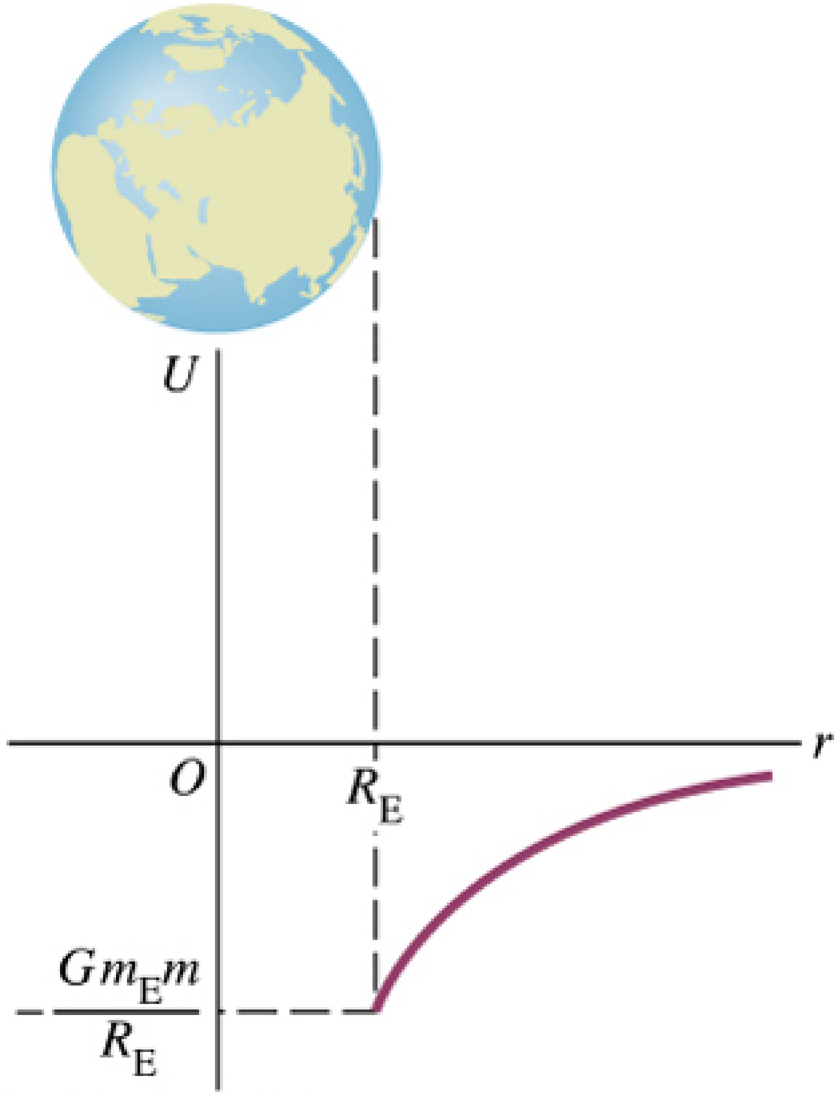


$$Dla \ r \approx r_0$$

$$\Delta U = -\Delta W = GMm\left(\frac{r_0 - r}{r_0^2}\right) = mgh$$

Energia potencjalna w polu grawitacyjnym cząstki o masie m, położonej w odległości r_0 od cząstki o masie M:

$$r \to \infty \quad \Delta U = -\Delta W = -\frac{GMm}{r_0}$$



U
r
O
R_E
$\frac{Gm_E m}{R_E}$

Satelita stacjonarny

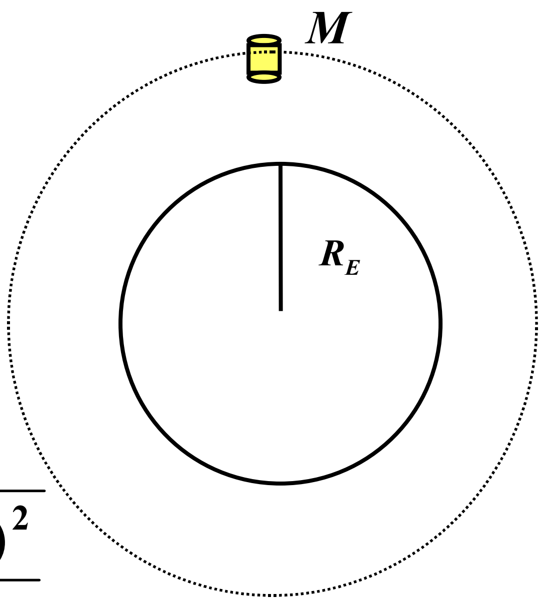
$$\begin{cases} F_G = G\dfrac{Mm_E}{R^2} = Ma_R = M\dfrac{v^2}{R} \\ R = R_E + h \\ v = \dfrac{2\pi R}{T} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{Gm_E T^2}{4\pi^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{6.67\times10^{-11}\times5.97\times10^{24}\times(24\times3600)^2}{4\times(3.14)^2}}$$

$$= \sqrt[3]{7.54\times10^{22}} = 4.23\times10^{7}\,m$$

$$\Rightarrow h = 3.60\times10^{7}\,m$$



Energia satelity

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_s m_p}{r}$$

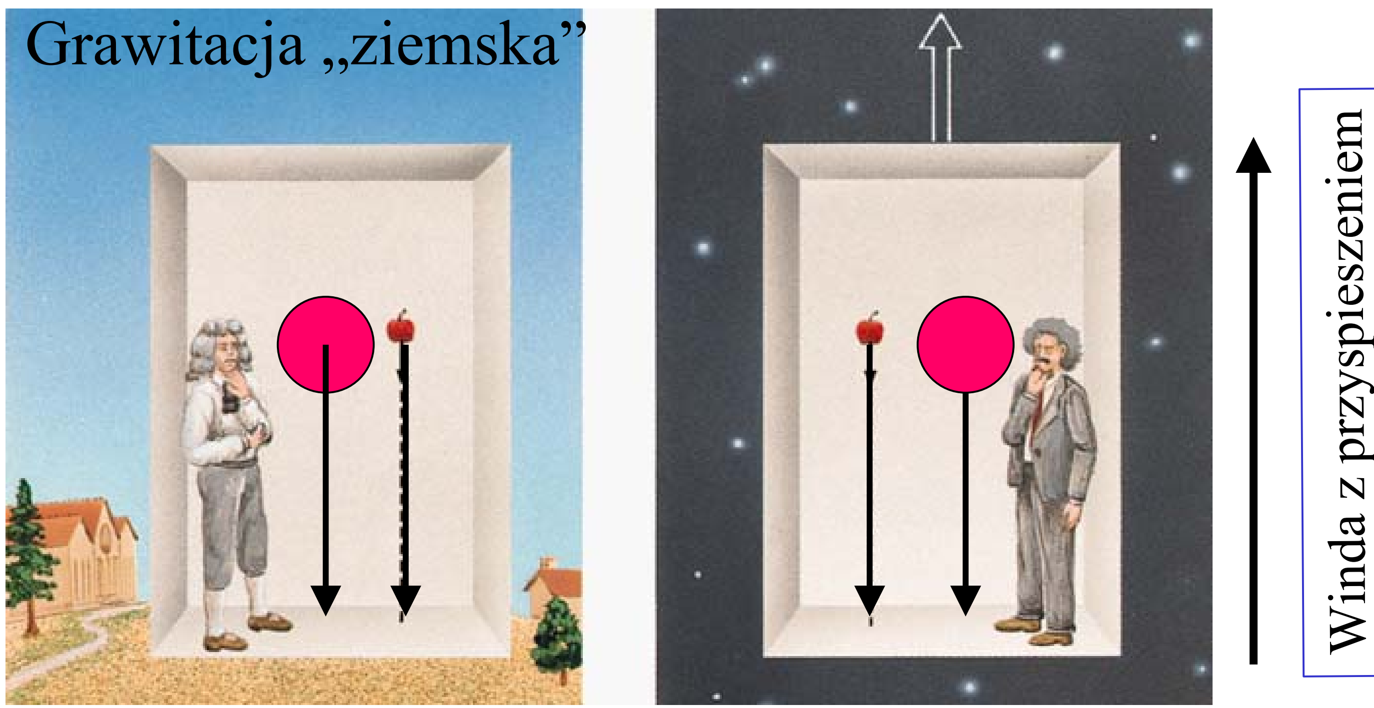
Z drugiej zasady dynamiki

$$\frac{GM_s m_p}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r}$$

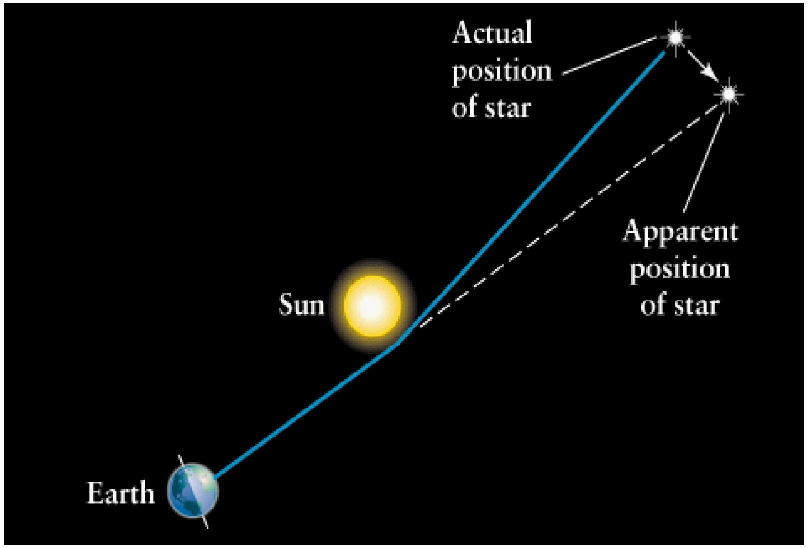
$$E = \frac{GM_s m_p}{2r} - \frac{GM_s m_p}{r} = -\frac{GM_s m_p}{2r}$$

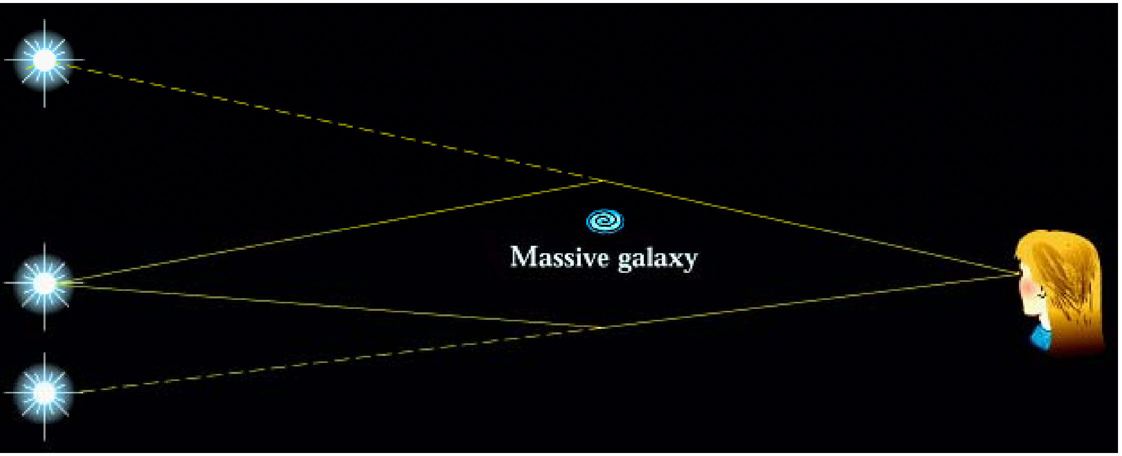
Ogólna teoria względności
Einstein 1915

Dla obu obserwatorów ruch jabłka ma te same własności.



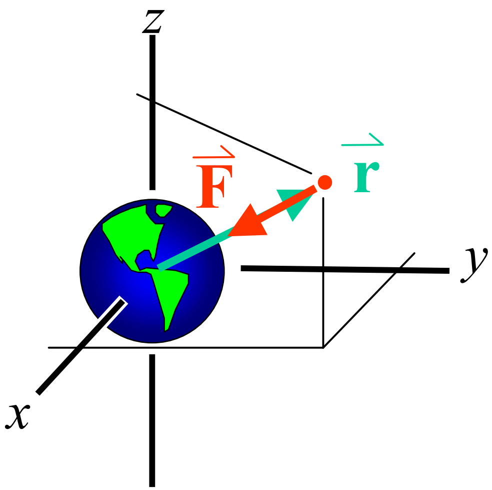
Soczewkowanie grawitacyjne





Pole grawitacyjne jest polem sił centralnych

$$U(x,y,z) = -\frac{GMm}{r(x,y,z)} = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} =$$

$$= -GMm\frac{2x_i}{2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -G\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{x_i}{r}$$

$$\vec{\mathbf{F}}_x(x,y,z) = -G\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{x_i}{r} = -G\frac{Mm}{r^2}\cdot\vec{i}$$

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\cdot\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{o}}$$

Pola sił centralnych

1. Pola sił centralnych

Siła zależy jedynie od odległości od centrum pola

$$\vec{F} = \vec{F}(|\vec{r}|) = \phi(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

2. Pola potencjalne o energii

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}$$

są polami sił centralnych.

Dowód:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{\alpha}{r^2} \cdot \frac{x}{r}$$

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2} \cdot \left\{ \frac{x}{r} \cdot \vec{i} + \frac{y}{r} \cdot \vec{j} + \frac{x}{r} \vec{k} \right\} = \frac{\alpha}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

3. Moment pędu punktu materialnego w polu sił centralnych

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad ; \quad M = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

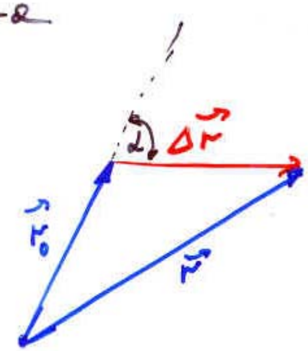
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(\phi(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{\phi(r)}{r} \, \vec{r} \times \vec{r} = 0$$

skąd w polu sił centralnych

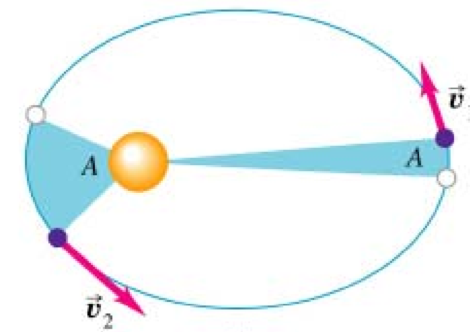
$$\boxed{\vec{L} = \text{const.}}$$

Oznacza to, że w polu sił centralnych tor cząstki jest torem płaskim.

4. prędkość polowa



$$\Delta S \approx \frac{1}{2}|\vec{r}_0|\cdot|\Delta\vec{r}|\cdot\sin\alpha$$



(c)

Dla $\Delta t \to 0 \quad \alpha \to \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{|\vec{r}_0\times\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}_0\times\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left|\vec{r}_0\times\vec{v}\right|\cdot\frac{m}{m}$$

$$V_{pol} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2m}\left|\vec{r}_0\times\vec{p}\right| = \frac{1}{2m}\left|\vec{L}\right|$$

$$\boxed{\vec{L} = const \implies V_{pol} = const.}$$

Prawa Keplera

1. W polu sił centralnych punkt materialny porusza się po krzywej stożkowej

w przypadku pól przyciągających gdy

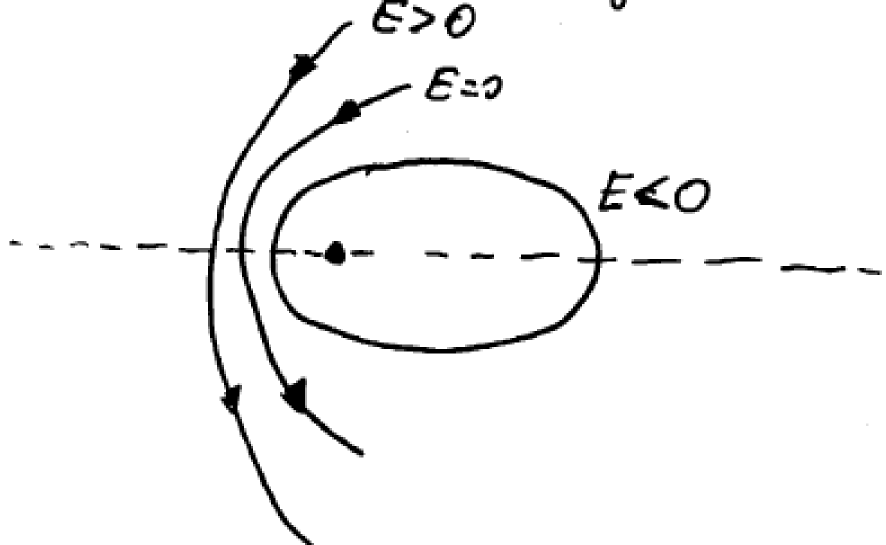
$$U(r) = -\frac{|\alpha|}{r}$$

tor zależy od energii całkowitej E

a) $E = 0$ – parabola

b) $E > 0$ – hiperbola

c) $E < 0$ – elipsa



2. W polu sił centralnych prędkość polowa jest stała

3. Dla ECO torem jest elipsa.
Okres obiegu:

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{m/|\alpha|}$$

*). W polu sił centralnych tor jest zawsze
torem płaskim