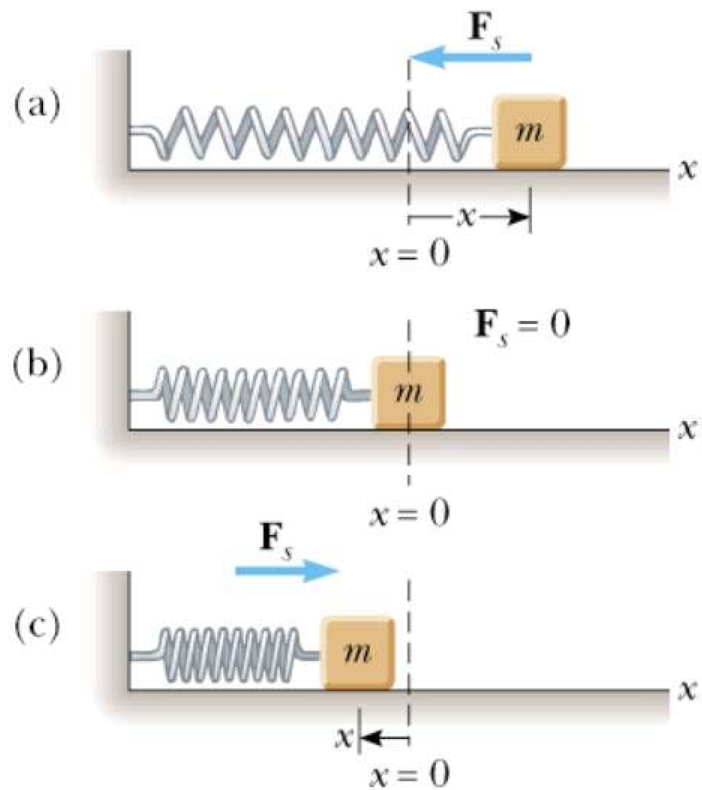
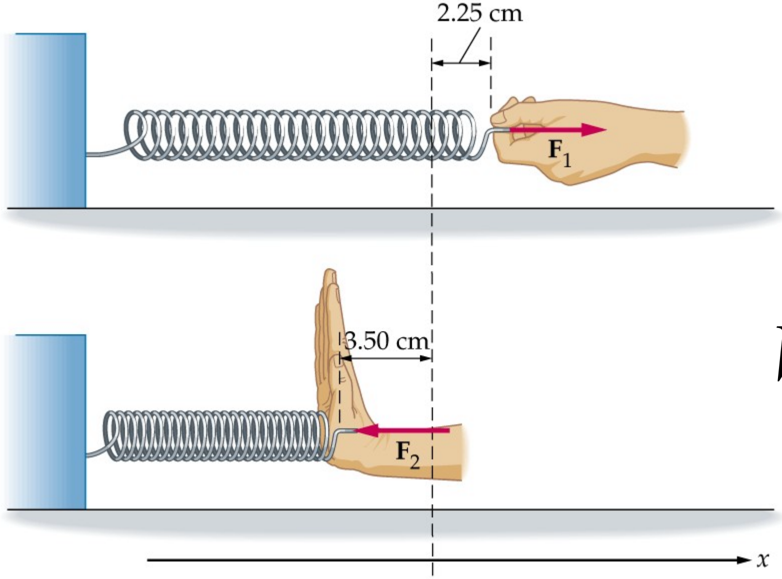
Serway, Physics for Scientists and Engineers, 5/e
Figure 13.1



$$\boxed{F = -k\,x}$$

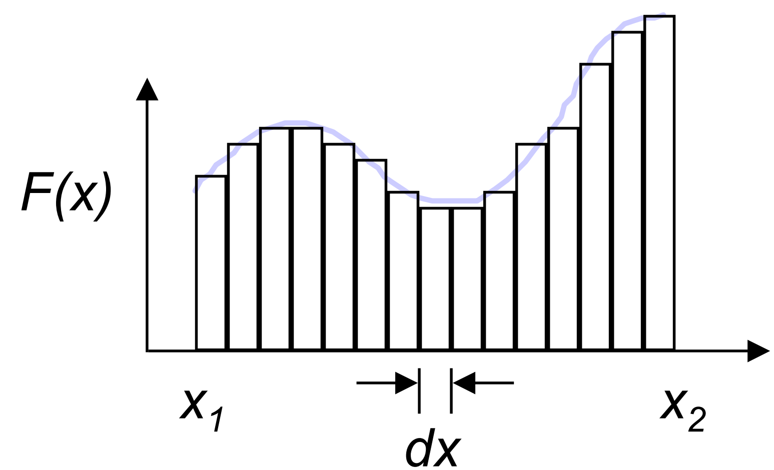
Praca siły



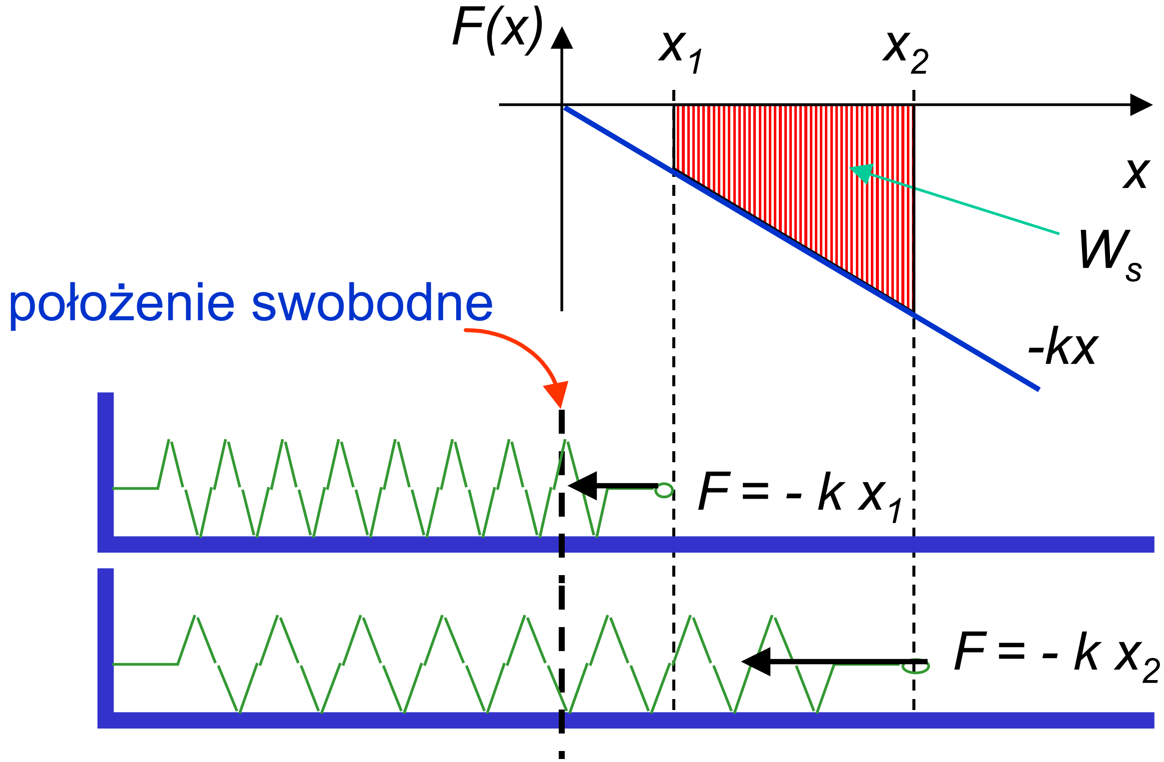
$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

$$\Delta W = F \cdot \Delta x \cdot \cos\alpha = F \cdot \Delta x$$

$$W = F_1 \Delta x_1 + F_2 \Delta x_2 + \ldots + F_N \Delta x_N$$



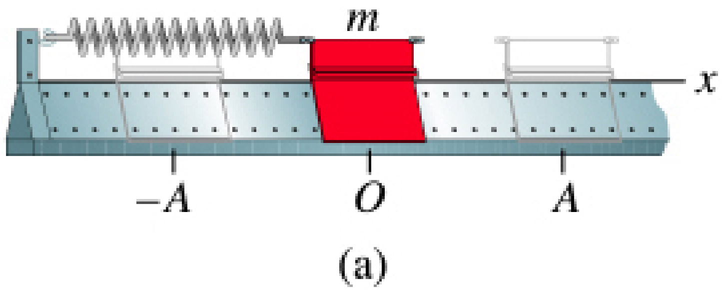
praca = pole pod krzywą y =F(x)

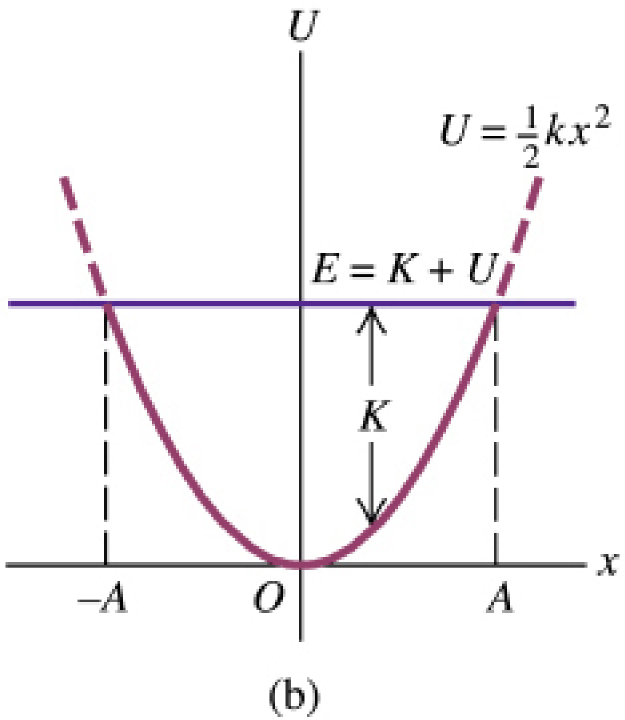


$$W_s = \frac{1}{2}\big(F(x_1) + F(x_2)\big)\cdot(x_2 - x_1)$$

$$W_s = \frac{1}{2}(-kx_1 - kx_2)\cdot(x_2 - x_1)$$

$$\boxed{W_s = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)}$$





$$\Delta U = -W_s = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

Jeżeli ruch odbywa się wokół położenia równowagi x=0, można przyjąć:

$$U(0) = 0$$

wówczas

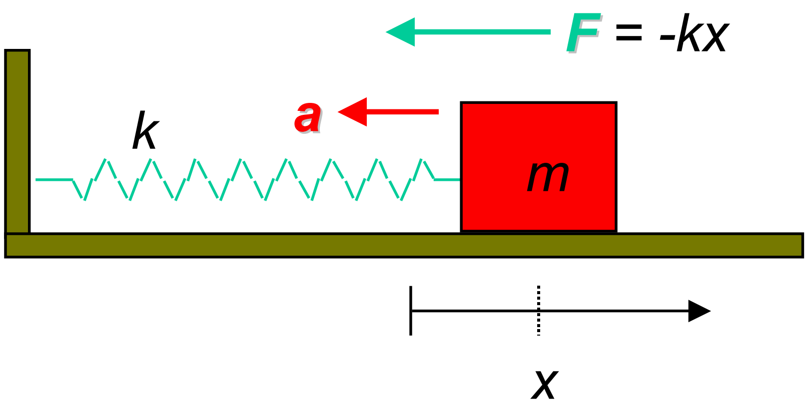
$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$E_c = U + E_k$$

Ruch harmoniczny prosty

- W dowolnej chwili

$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$



- Ale tutaj $F = -kx$

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

- Więc: $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}x}$

niech $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

równanie różniczkowe na *x(t)*

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$$

Jednorodne równanie różniczkowe liniowe o stałych współczynnikach

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Rozwiązaniem są funkcje postaci $x(t) = Ae^{\lambda t}$

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 A e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = i\omega \quad \text{lub} \quad \lambda_2 = -i\omega}$$

$$\boxed{x(t) = B_1 e^{-i\omega t} + B_2 e^{i\omega t}}$$

położenie jest wielkością rzeczywistą, stąd

$$x(t) = x^*(t)$$

$$\boxed{x^*(t) = B_1^* e^{i\omega t} + B_2^* e^{-i\omega t}}$$

$$\boxed{x(t) = B_1 e^{-i\omega t} + B_2 e^{i\omega t}}$$

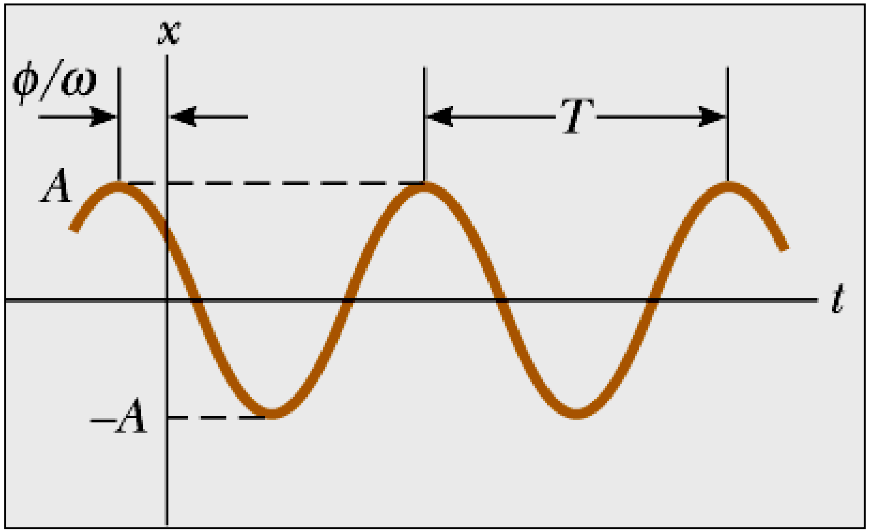
$$B_1^* = B_2 \quad oraz \quad B_2^* = B_1$$

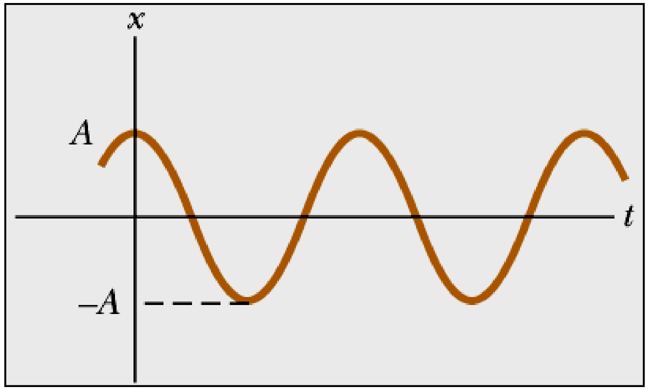
Niech $B_1 = Ce^{-i\phi}$

$$x(t) = Ce^{-i\phi} e^{-i\omega t} + Ce^{i\phi} e^{i\omega t} = Ce^{-i(\omega t + \phi)} + Ce^{i(\omega t + \phi)}$$

$$x(t) = 2C\cos(\omega t + \phi) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Własności ruchu harmonicznego prostego





Położenie cząstki w chwili t:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

A…amplituda

ω…częstość

ϕ…faza początkowa

T…okres

(ωt + Φ)…faza

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

Energia oscylatora harmonicznego

$$E = E_k + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

$$E = \tfrac{1}{2}m\left[-\omega A\sin(\omega t + \phi)\right]^2 + \tfrac{1}{2}k\left[A\cos(\omega t + \phi)\right]^2$$

$$E = \tfrac{1}{2}A^2\left[m\omega^2\sin^2(\omega t + \phi) + k\cos^2(\omega t + \phi)\right]$$

Ale $\omega^2 = k/m$ skąd

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2\left[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)\right] = \tfrac{1}{2}kA^2$$

$$\boxed{E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}\omega^2 mA^2}$$

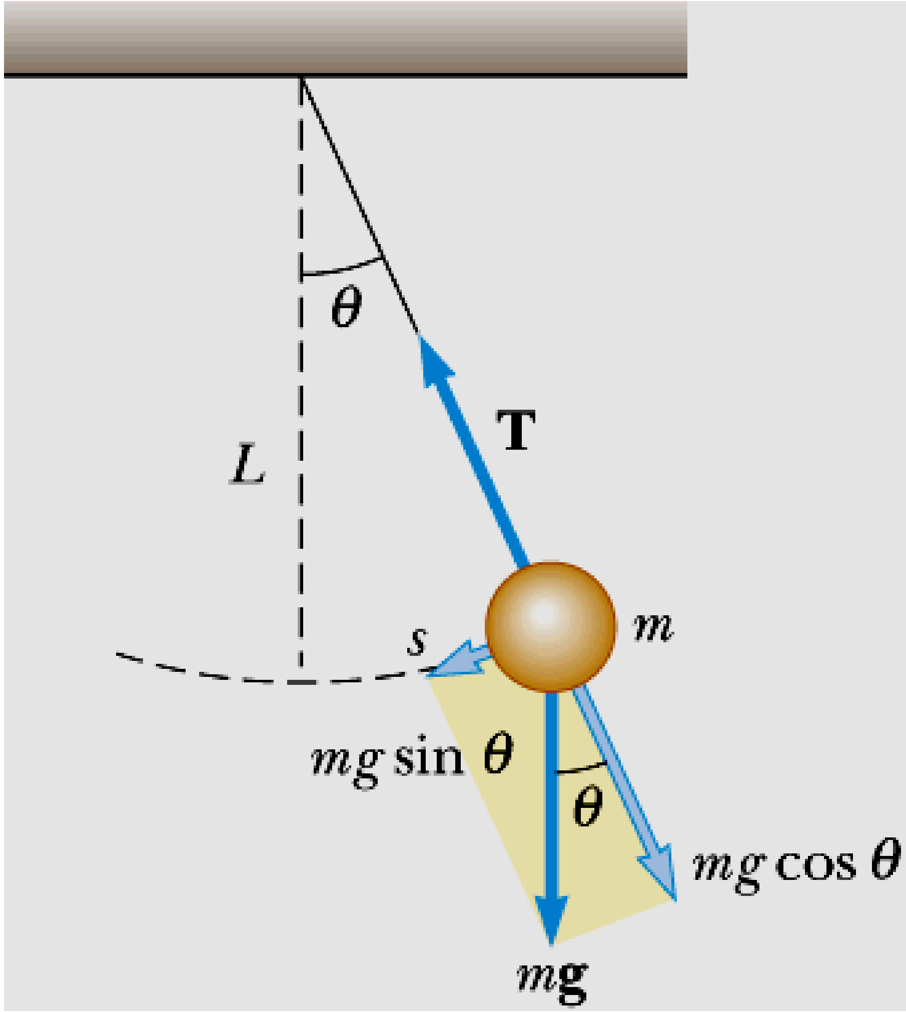
Wahadło matematyczne

$$F = -mg\sin\theta$$

dla małych kątów : $\sin\theta \approx \theta$

$$F = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$

$$F = -\frac{mg}{L}L\theta = -m\frac{g}{L}s = -ks$$

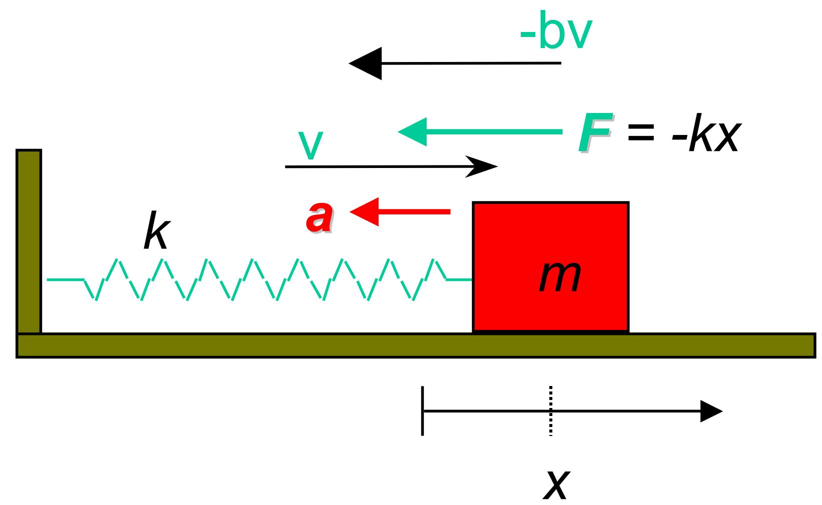


$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Ruch harmoniczny tłumiony

Siła tłumiąca:

$$F_t = -bv = -b\frac{dx}{dt}$$



Druga zasada dynamiki:

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$2\beta = \frac{b}{m} \quad oraz \ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

Ruch harmoniczny tłumiony

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[c_1 e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right]$$

- rozpatrzmy przypadek małego tłumienia: $\omega_0^2 > \beta^2$

$$\omega_0^2 > \beta^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = i\omega$$

$$gdzie\ i = \sqrt{-1}$$

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right]$$

Ale x(t) jest rzeczywiste czyli x(t)=(x(t))*

$$x^*(t) = e^{-\beta t}\left[c_1^* e^{-i\omega t} + c_2^* e^{i\omega t}\right] = e^{-\beta t}\left[c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right]$$

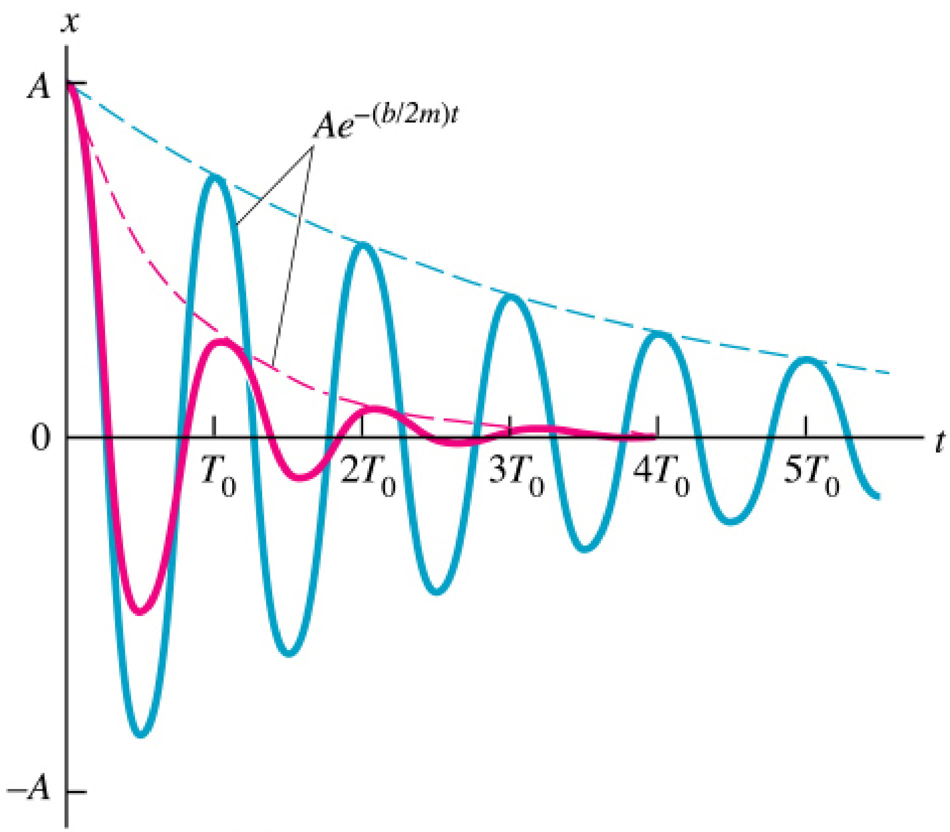
$$c_1^* = c_2 \quad oraz \quad c_2^* = c_1; \quad niech \;\; c_1 = \frac{1}{2} A_0 e^{i\phi}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} A_0 e^{-\beta t}\left[e^{i(\omega t+\phi)} + e^{-i(\omega t+\phi)}\right] = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi)$$

Rozwiązanie - zależność położenia od czasu

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t + \phi\right) = A(t)\cos(\omega t + \phi)$$

gdzie: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ oraz $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$



Jak wyznaczyć współczynnik tłumienia β ?

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

$$A(t+T) = A_0 e^{-\beta(t+T)} = A_0 e^{-\beta t} e^{-\beta T}$$

$$\ln\left(\frac{A(t)}{A(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta t} e^{-\beta T}}\right) = \beta T$$

logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\boxed{\lambda = \beta T}$$

Energia drgań w przypadku małych tłumień

$$E(t) \approx \frac{1}{2} k \left(A(t) \right)^2 = \frac{1}{2} A_0^2 \, e^{-2\beta t}$$

szybkość zmian energii

$$\frac{dE}{dt} = -\beta \, A_0^2 e^{-2\beta t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dE}{dt} = -\beta \, E$$

W przypadku małych zmian energii w czasie pełnego okresu

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\Delta E}{T} = -\beta \, E \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta E}{E} = -\beta \, T$$

Ruch harmoniczny tłumiony

relaksacja

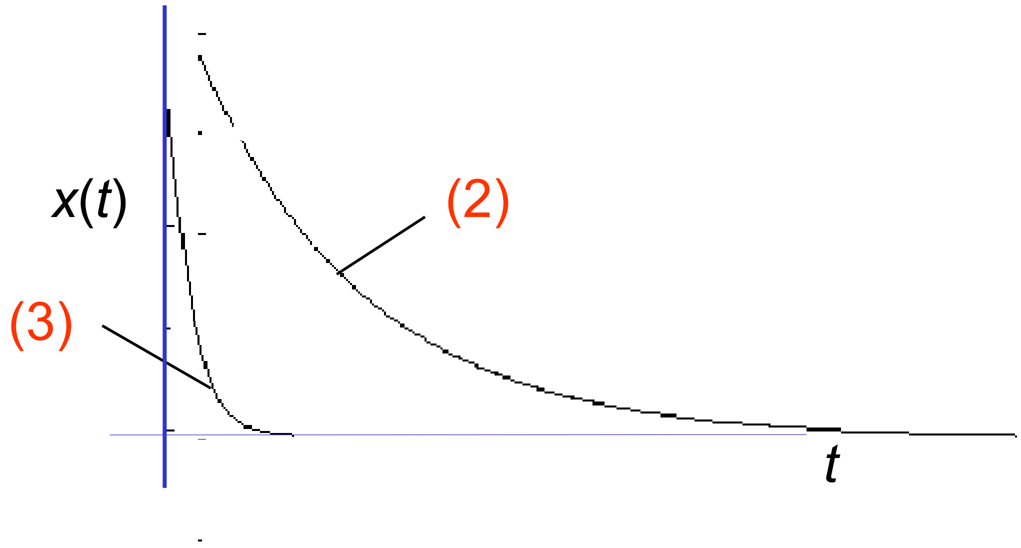
(a) $\omega_0^2 = \beta^2$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\,t+\phi\right) \Rightarrow \boxed{x = A_0 e^{-\beta t}\cos\phi}$$

- układ wraca ekspotencjalnie to położenia równowagi.

(b) $\omega_0^2 < \beta^2$ "silne tumienie"

- Szybki powrót do stanu równowagi.



Ruch harmoniczny wymuszony

- Na układ działa siła okresowa

$$F = F_0 \cos\omega t$$

- Równanie ruchu przybiera postać

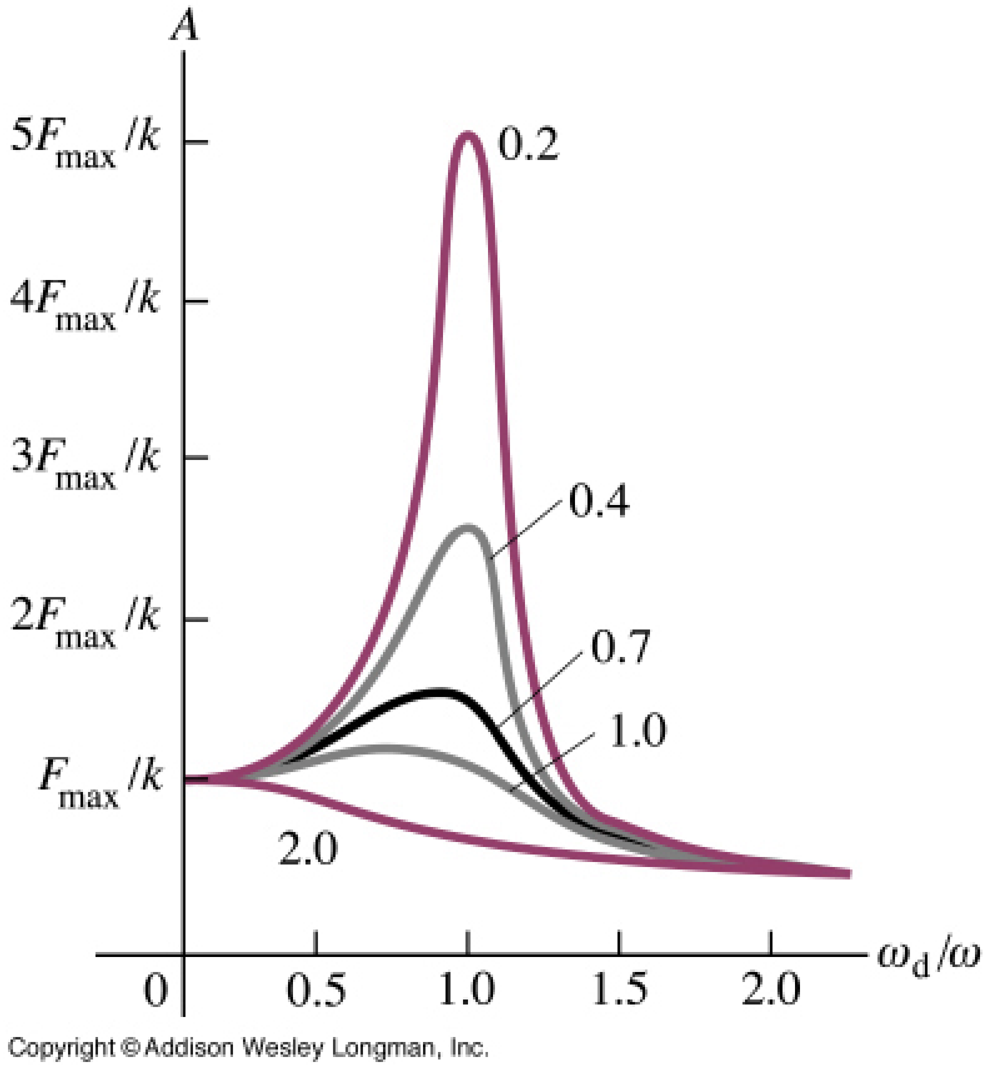
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^{\,2}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

- Rozwiązanie dla drgań ustalonych

$$x(t) = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}}\cos(\omega t - \delta)$$

$$tg(\delta) = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$x = A(\omega)\cos(\omega t - \delta)$$

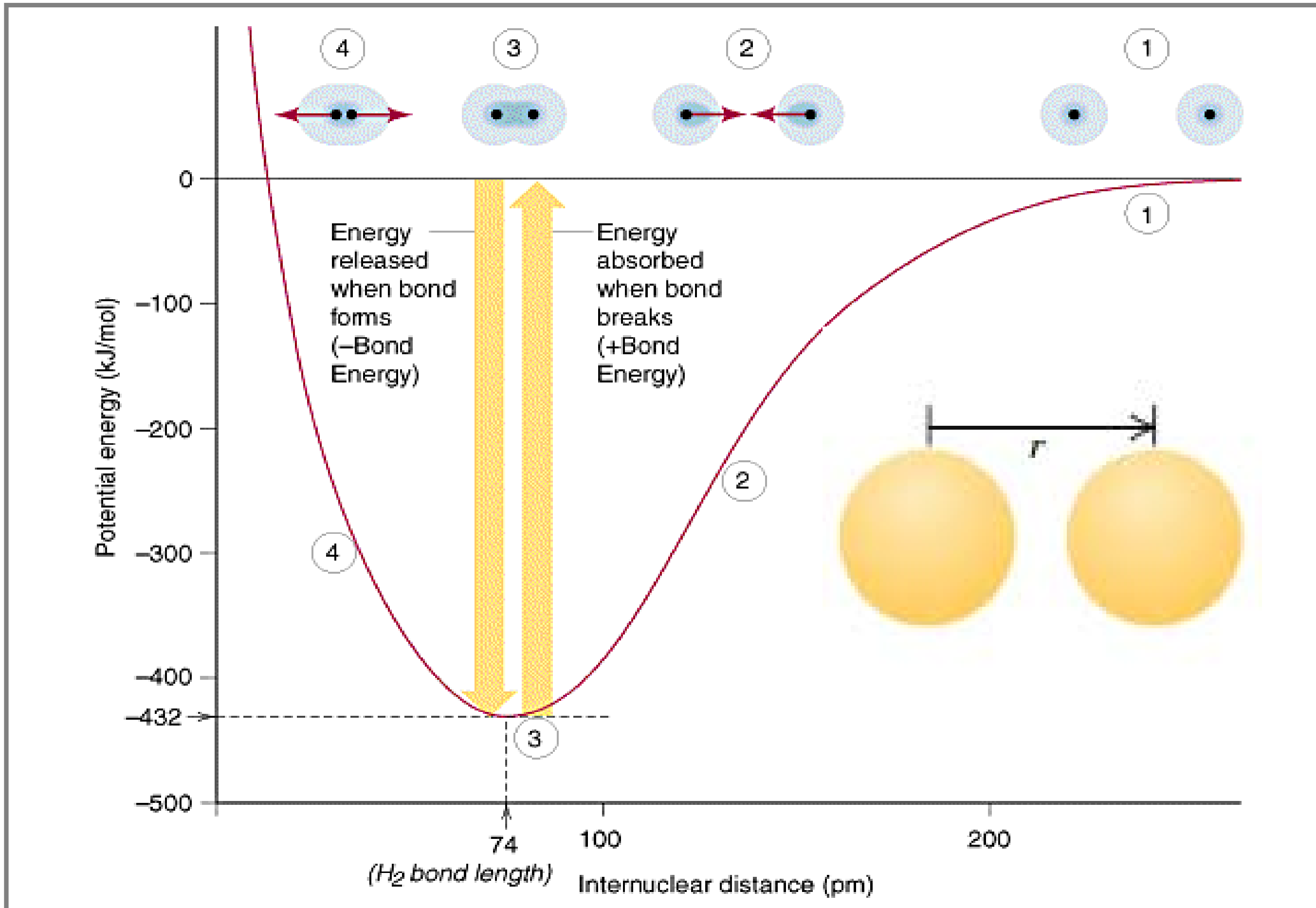


$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

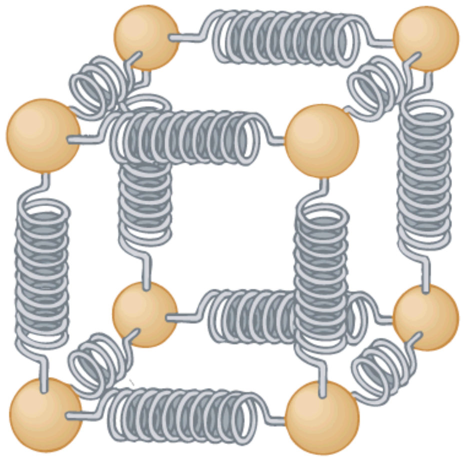
$$A_{rez} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Molekuła H_2

- Tworzenie wiązania kowalencyjnego w molekule H_2
- Elektron w jednym atomie przyciągany jest przez jądro drugiego. Wiązanie tworzy się poprzez uwspólnienie elektronów

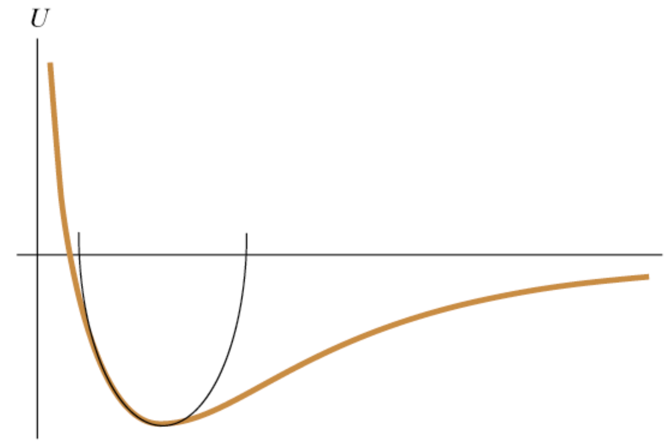


Serway, Physics for Scientists and Engineers, 5/e
Figure 19.7



Harcourt, Inc.

Serway, Physics for Scientists and Engineers, 5/e
Figure 13.11a



(a)

Harcourt, Inc.

$$U(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$$

Leonard-Jones Potential

$$\boxed{\Delta U = \Delta W_{zew} = -\Delta W_{wew}}$$

$$\Delta U = -F_{wew} \cdot \Delta x$$

$$F_{wew} = -\frac{\Delta U}{\Delta x} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{F_{wew} = -\frac{dU}{dx}}$$

Dla przypadku trójwymiarowego

$$\boxed{\vec{F} = -\left(\frac{dU}{dx} \cdot \vec{i} + \frac{dU}{dy} \cdot \vec{j} + \frac{dU}{dz} \cdot \vec{k}\right) = -\nabla U}$$

$$U(x) = U(0) + \underset{\overset{\uparrow}{0}}{U'(0)}\, x + \frac{1}{2} U''(0)\, x^2$$

$$U(x) = U(0) + \frac{1}{2} U''(0)\, x^2$$

$$F_{wew} = -\frac{dU}{dx} \quad \Rightarrow \quad F_{wew} = -\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{2} \cdot 2U''(0)\, x = -kx$$

Układ wykonuje drgania wokół położenia równowagi z częstością

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$