

MATEMATYKA ELEMENTARNA

Lista 1

1. Porównaj:

a) 0,273 i 0,2729 b) -1,37 i -1,369 c) π i 3,14 d) $\frac{22}{7}$ i π e) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\sqrt{3}$

2. Zamień na ułamek dziesiętny:

a) $\frac{1}{7}$, b) $\frac{2}{9}$, c) $\frac{2}{13}$ d) $-\frac{3}{11}$ e) $\frac{1}{16}$

3. Zamień na ułamek zwykły:

a) 1,3, b) 0,(3) c) 1,(3) d) 0,(23) e) 0,0(13) f) 1,(314)

4. Porównaj:

a) 0,(3) oraz 0,(29) b) 0,(14) oraz $\frac{1}{7}$ c) 0,(3) oraz $\frac{1}{3}$ d) 0,(9) oraz 1
e) 0,(21) oraz 0,(210) f) $\sqrt{2}$ oraz 1,(41)

5. Wskaż jakąkolwiek liczbę pomiędzy:

a) 0,1998 a 0,1999 b) $\frac{10}{7}$ a $\frac{17}{12}$ c) $\sqrt{7}$ a $\sqrt{8}$ d) $-\sqrt{2}$ a $-\sqrt{3}$

6. Usuń niewymierność z mianownika:

a) $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, b) $\frac{2 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

7. Porównaj:

a) $1 + \sqrt{2}$ oraz $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ oraz $\sqrt{3} - 1$
c) $2 - \sqrt{5}$ oraz $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ d) $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ oraz $\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$

8. Zapisz jako potęgę dwójki:

a) 1024 b) 0,5 c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt[3]{4}$ e) $2\sqrt{2\sqrt{2}}$

9. Zapisz jako potęgę:

a) $\sqrt[4]{27}$ b) $\sqrt[3]{(\frac{1}{5})^2}$ c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{125}$

10. Zapisz przy użyciu pierwiastków:

a) $3^{\frac{2}{3}}$ b) $2^{-\frac{1}{3}}$ c) $5^{\frac{1}{4}}$ d) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}$

Lista 2

1. Znajdź dziedzinę określoności dla poniższych wyrażeń:

a) $\frac{x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{1}{x^2-3x+2}$ c) $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$

2. Przedstaw na płaszczyźnie dziedzinę poniższych wyrażeń:

a) $\sqrt{1-x^2-y^2}$ b) $\sqrt{x+y}$ c) $\frac{1}{x^2-y^2}$

3. Sprawdź tożsamości:

a) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = (x+y+z)^2$

4. Na jakim zbiorze zachodzą równości?

a) $\sqrt{x^2} = x$ b) $|x-1| = 1-x$ c) $\log x^2 = 2 \log x$

5. Czy poniższe pary równań są równoważne?

a) $x^2 + 4x + 4 = 0$ oraz $3x + 6 = 0$ b) $x^2 = 1$ oraz $x = \frac{1}{x}$

6. Rozwiąż równania:

a) $\sqrt{x+1} = x$ b) $\sqrt{x-1} = 1-x$ c) $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{1-x}$

7. Czy poniższe pary nierówności są równoważne?

a) $x^2 > 1$ oraz $x > 1$ b) $-2x + 1 > 0$ oraz $4x - 1 < 3$

c) $|x| < 2$ oraz $x^2 < 4$ d) $mx > m$ oraz $x > 1$

8. Czy poniższe pary warunków są równoważne?

a) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x + y = 3 \end{cases}$

9. Rozwiąż układy:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ xy = 3 \end{cases}$

Lista 3

1. Zapisz bez użycia symbolu wartości bezwzględnej:

a) $|\pi - 4|$ b) $|a + 1|$ c) $|a^2 + 3|$

2. Rozwiąż równania:

a) $|x + 2| = 2x + 1$ b) $|x + 1| = |2x - 1|$ c) $|x - 1| + |x + 1| = 2x$

3. Rozwiąż nierówności:

a) $|x - 1| < 3$ b) $|3x + 2| \leq 2$ c) $|x - 3| > 2$ d) $|x^2 - 1| < 3$

4. Naszkicuj wykresy funkcji:

a) $y = |x + 1| + |x - 1|$ b) $y = |x + 1| + |x + 2| + |2x - 3|$ c) $y = |x^2 - 4|$

5. Z zależności $(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = kT$ wyraż parametr a jako funkcję pozostałych wielkości.

6. Oblicz $f(-2)$, $f(2t)$, $f(x+1)$, $f(x^2)$, $(f(x))^2$ dla funkcji danej wzorem $f(x) = |x| + 2$. To samo dla funkcji danej wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x \leq 0 \\ x^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

7. Znajdź dziedzinę funkcji:

a) $y = \frac{1}{x^2 - 2}$ b) $y = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ c) $y = \frac{1}{\sin x}$

8. Znajdź zbiór wartości funkcji:

a) $y = \frac{1}{x-1}$, b) $y = |x| + |x + 2|$ c) $y = \frac{1}{2}[2x]$

9. Zbadaj parzystość funkcji:

a) $y = x^2 + x$ b) $y = x^4 + x^2 + 1$ c) $y = x^3 + x$ d) $y = x^2 + \sqrt{x}$

10. Wskaż przedziały monotoniczności dla funkcji:

a) $y = x^2 - 1$ b) $y = \frac{1}{x-2}$ c) $y = |x + 1| + x$

Lista 4

1. Naszkicuj wykres funkcji $y = 2x^2$. Przekształć wykres tak, aby otrzymać wykres funkcji:

a) $y = 2x^2 + 1$, b) $y = 2(x + 1)^2$, c) $y = 2x^2 + 4x$

2. Rozwiąż równania i nierówności:

a) $x^2 - 14x + 49 = 0$ b) $4x^2 - 8x = 0$ c) $x^2 < x$ d) $x^2 - 3x + 2 > 0$

3. Rozwiąż równania z parametrem m :

a) $x^2 - 2(m - 1)x + 2m + 1 = 0$ b) $(m - 2)x^2 - mx + m = 0$

4. Dla jakich wartości parametru m równanie $3x^2 + 12x = m$ ma dwa różne pierwiastki jednakowych znaków?

5. Wykonaj dzielenie wielomianów:

a) $(x^3 + x + 1) : (x - 2)$ b) $(x^4 + x^2 + 1) : (x^2 + x + 1)$ c) $(x^5 - 1) : (x - 1)$

6. Odgadując pierwiastki wielomianu $w(x)$ znajdź jego rozkład na czynniki oraz rozwiąż równanie $w(x) = 0$:

a) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$ b) $x^3 - 13x - 12$ c) $x^5 + 4x^4 - 10x^3 - 22x^2 + 21x + 30$

7. Rozłóż na czynniki:

a) $16x^4 - 1$ b) $27x^3 + 8$ c) $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6$ d) $9x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

8. Rozwiąż nierówności:

a) $(x - 2)^2(x - 1)^2x \geq 0$ b) $x^4 - x^3 + x - 1 < 0$ c) $1 < x^8$

9. Rozwiąż równania:

a) $\frac{2}{x+1} + \frac{x}{x^2-1} = 1$ oraz b) $\frac{2}{x-1} + x = \frac{x+1}{x-1}$

10. Rozwiąż nierówności:

a) $1 + \frac{2}{x-1} \leq \frac{6}{x}$ oraz b) $\frac{x^2 - 5x + 12}{x^2 - 4x + 5} > 3$

Lista 5

1. Oblicz granice $f(x)$ przy $x \rightarrow +\infty$ oraz przy $x \rightarrow -\infty$ dla funkcji danej wzorem:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } x^4 + 2x^3, & \text{b) } x^5 - 3x^4, & \text{c) } \frac{x^3 + x^2 - 1}{2x^2 - x + 2}, & \text{d) } \frac{x^3 - x}{x^4 + 1} \\ \text{e) } \frac{x^3}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{x + 1}, & \text{f) } \sqrt{x^2 + x + 4} - \sqrt{x^2 + x + 1} & & \end{array}$$

2. Oblicz granice:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - x + 1), & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{x + 1}, & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -} 3 \frac{x^2 - 9}{x + 3}, & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}, \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}, & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}, & \text{g) } \lim_{x \rightarrow -} 1 \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{3}{1 + x^3} \right) & \end{array}$$

3. Oblicz granice (jednostronne, niewłaściwe itp.):

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{sgn}(x - 2) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x - 1|}$$

4. Znajdź asymptoty wykresu funkcji:

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^3 + 2x^2 + x} \quad \text{b) } g(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 - 2}$$

5. Nie korzystając z pochodnych naszkicuj przybliżony wykres funkcji:

$$\text{a) } f(x) = x^3 - x \quad \text{b) } g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Lista 6

1. Korzystając z definicji oblicz pochodne (o ile istnieją!) funkcji f we wskazanym punkcie x_0 :

a) $f(x) = 2x^3 + 1$, $x_0 = -1$ b) $f(x) = \frac{3}{x^2}$, $x_0 = 5$ c) $f(x) = |x^3|$, $x_0 = 0$

2. Korzystając z definicji wyprowadź wzór na pochodną funkcji $f(x)$:

a) $x^3 - 3x$ b) $\frac{1}{1+x^2}$ c) $\sqrt{2x-1}$

3. Oblicz pochodne funkcji:

a) $5x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 3$ b) $x^{-3} + \frac{1}{x}$ c) $(x^5 + x + 1)\sqrt{x}$

d) $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ e) $(x^2-1)^5$ f) $\sqrt{x^3+x+1}$

4. Zbadaj różniczkowalność funkcji:

a) $f(x) = |x-2|$ b) $|x^2| + 1$

5. Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = 2x^3$ w punkcie $(1,2)$.

6. Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x)$ danej wzorem:

a) $x^5 + x$, b) $\frac{x^3 + x}{x^3 - x + 1}$

7. W jakich punktach osiąga ekstremum funkcja:

a) $f(x) = x(x+1)^3$ b) $g(x) = \frac{x^2}{x-2}$ c) $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

Lista 7

1. Zbadaj funkcję $f(x) = x^3 - 6x^2 + 16$.

2. Zbadaj funkcję

$$f(x) = \frac{2x^2}{1 - x^2}.$$

3. Zbadaj funkcję

$$f(x) = x\sqrt{3 - 2x}.$$

4. Znajdź najmniejszą i największą wartość podanej funkcji w przedziale $[-2, 1]$.

$$\text{a) } f(x) = -2x^2 + x - 1 \quad \text{b) } g(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$$

5. Znajdź najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x + |x^2 - 1|$ w przedziale $[-1, 4]$.

6. Dobierz wartość parametru m tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+1} & \text{dla } x = 0 \\ m & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$$

była ciągła na całej prostej?

Lista 8

1. Oblicz wartości następujących wyrażeń: a) $\operatorname{ctg} \frac{3}{4}\pi$ b) $\operatorname{tg} \frac{29}{3}\pi$ c) $\sin \frac{127}{6}\pi$
2. Rozwiąż równania: a) $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α wiedząc, że: a) $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ oraz $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. b) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{2}$ oraz $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$.
5. Wyraż funkcje $\cos 3\alpha$ oraz $\sin 4\alpha$ przy pomocy funkcji trygonometrycznych kąta α .
6. Wyraż $\sin \frac{\alpha}{2}$ oraz $\cos \frac{\alpha}{2}$ przy pomocy $\cos \alpha$, wiedząc, że $\pi < \alpha < 2\pi$.
7. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych dla $\alpha = 75^\circ$ oraz $\alpha = 72^\circ$
8. Wykaż tożsamości:

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha = 1$$

9. Wyprowadź wzór $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$.

10. Oblicz wartości wyrażeń:

$$\sin 225^\circ \cos 120^\circ \operatorname{tg} 330^\circ \operatorname{ctg} 240^\circ,$$

$$\sin 18^\circ \cos 36^\circ.$$

11. Uprość wyrażenie

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin(\pi + \alpha)$$

12. Rozwiąż równania:

$$\operatorname{ctg} x \cdot \cos x + 1 = \cos x + \operatorname{ctg} x$$

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$$

Lista 9

1. Rozwiąż równania:

a) $(\frac{1}{3})^{x-1} = 9^{2x}$ b) $2^x \cdot 4^{2x} \cdot 8^{3x} = 128$

c) $(3^x)^{2x} \cdot (81^x)^x = 9^{x^2+4}$ d) $5^x - 25 \cdot 5^{-x} = 24$ e) $9^x \cdot \frac{3}{2} - 4^x = 0$

2. Rozwiąż nierówności:

a) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 0$ b) $2^x + 2^{1-x} < 3$ c) $3^{2x-1} - 3^{x-1} \geq 2$

3. Które z poniższych funkcji są rosnące, a które malejące?

$y = (\frac{1}{2})^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 3^x \cdot 4^{-x}$, $y = -2(\frac{1}{3})^{-x}$

4. Oblicz następujące logarytmy:

$\log_2 4$, $\log_3 81$, $\log_{-5} \frac{1}{5}$, $\log_3 \sqrt{3}$, $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$, $\log_{27} 729$

5. Oblicz:

$\log_6 2 + \log_6 3$, $\log_6 2 - \log_6 \frac{1}{3}$, $\log_{\sqrt{3}} 12 - \log_{\sqrt{3}} 4$

6. Oblicz:

a) $\log_8 9$, jeżeli $\log_{12} 18 = a$,

b) $\log_9 15$, jeżeli $\log_{\sqrt{45}} 25 = a$

7. Rozwiąż równania:

a) $\log_2(x-2) + \log_2(12+x) = 3 + \log_2 3 + \log_2 5$

b) $\log_3(x^2 + 4x + 1) = 1$

c) $12 \log_3 x + 12 \log_9 x + 12 \log_{27} x = 11$

8. Rozwiąż nierówności:

a) $\log_{\frac{1}{3}} x + 2 \log_{\frac{1}{9}}(x-1) \leq \log_{\frac{1}{3}} 6$

b) $(\log_{10} x)^2 + 3 \log_{10} x \geq 4$

9. Określ typ monotoniczności poniższych funkcji:

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_2 \frac{1}{x}$, $y = \log_2 |x|$

10. Naskicuj wykresy funkcji:

$y = 10^{-x}$, $y = 2^x \cdot 3^{-x}$, $y = \log_2 x + 1$, $y = \log_{10} x + 1$,

11. Znajdź funkcję odwrotną do: a) $y = 1 + 2^{x-3}$, b) $y = 2 \log_5 x - 3$.

Lista 10

1. W ciągu arytmetycznym dane są $a_3 = 1$ oraz $a_{12} = -26$. Znajdź a_1 , r oraz S_{12} .
2. W ciągu arytmetycznym dane są $r = 3$ oraz $S_{12} = 221$. Znajdź a_1 .
3. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego równa jest 56. Znajdź n wiedząc, że $a_1 = -4$ oraz $r = 4$.
4. Suma siedmiu początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego równa jest -49 , a trzech końcowych -165 . Znajdź długość ciągu i jego różnicę, wiedząc, że $a_1 = 2$.
5. W ciągu geometrycznym jest $a_3 = 48$, $a_9 = 3072$. Znajdź a_1 oraz q .
6. W ciągu geometrycznym dane są $q = \frac{1}{2}$ oraz $S_7 = \frac{127}{16}$. Znajdź a_1 .
7. W ciągu geometrycznym dane są $a_5 = -48$, $q = 2$ oraz $S_n = -1533$. Znajdź n .
8. Znajdź trójwyrazowy ciąg geometryczny wiedząc, że suma jego wyrazów równa jest 3, a iloczyn równy jest -8 .
9. Suma pierwszego, czwartego i szóstego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi 18, a ich iloczyn równy jest -168 . Znajdź pierwszy wyraz i różnicę.
10. W 10-wyrazowym ciągu arytmetycznym suma wyrazów o numerach parzystych wynosi 25, a suma wyrazów o numerach nieparzystych wynosi 10. Znajdź wyraz siódmy.
11. Suma trzech liczb tworzących ciąg geometryczny wynosi 3, a suma ich kwadratów 21. Znajdź te liczby.
12. Siódmy wyraz ciągu geometrycznego równa jest 2. Znajdź iloczyn trzynastu początkowych wyrazów.

Lista 11

1. Znajdź pierwsze 6 wyrazów oraz wyraz ogólny każdego z następujących ciągów:

- a) ciąg parzystych liczb naturalnych nie dzielących się przez 4;
 - b) ciąg nieparzystych liczb naturalnych podzielnych przez 3;
 - c) ciąg liczb naturalnych dających resztę 3 przy dzieleniu przez 5.
- Przyjmijmy, że liczby naturalne liczymy od 1.

2. Uzasadnij, że ciąg dany poniższym wzorem jest monotoniczny:
 $a_n = 7 - 3n$, $b_n = 9n^2 - 10n + 199999$, $c_n = \frac{2n+9}{n+3}$, $d_n = 3^n - 2^n$

3. Uzasadnij, że żaden z poniższych ciągów nie jest monotoniczny:
 $a_n = \frac{2n-7}{2n-9}$, $b_n = 3n^2 - 17n + 1$

4. Które z poniższych ciągów mają wyraz największy lub najmniejszy?
 $a_n = 1 + 9n - 2n^2$, $b_n = \frac{n}{n^2+4}$, $c_n = n^2 - 17n + 21$,
 $d_n = n(n-1)(n-2)(n-3)$

5. Które z poniższych ciągów są ograniczone?
 $a_n = 3 - 5n$, $b_n = \frac{1}{n}$, $c_n = (-1)^n \cdot n^2$

6. Czy liczby 463 oraz 876 są wyrazami ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = 2n^2 - 11n + 442$?

7. Dla których wyrazów ciągu $a_n = \frac{2n}{3n+5}$ zachodzi nierówność $a_n < \frac{3}{5}$?

8. Oblicz granice ciągów: a) $a_n = \frac{n^2+n+1}{2n^2-n}$, b) $b_n = \frac{2^n+3^n}{4^n}$
c) $c_n = (\sqrt{n^2+n} - n)$ d) $d_n = (\frac{1}{n^2+1} \frac{2}{n^2+1} + \dots + \frac{n-1}{n^2+1})$

9. Znajdź granicę ciągu $a_n = \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{n^2}$.

10. Zamień na ułamek zwykły: 0,(4); 0,(37); 2,(31); 2,3(11).

11. Dane są suma S nieskończonego ciągu geometrycznego $a_1, a_2, a_3 \dots$ oraz jego iloraz q . Znajdź sumę $a_1 + a_4 + a_7 + \dots$

Lista 12

1. Niech punkt O będzie środkiem ośmiokąta foremego $ABCDEFGH$. Wykonaj działania: $\vec{AF} + \vec{CB}$, $\vec{AG} - \vec{AO} + \vec{AC}$, $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} + \vec{GH}$, $\vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OF} + \vec{OH}$.
2. Dane są punkty $A(2, 1)$, $B(1, 1)$, $C(4, 3)$. Znajdź współrzędne wektora $\vec{u} = -3\vec{AB} + 2\vec{AC}$.
3. Punkty $B(1, 1)$, $C(2, -1)$, $D(3, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Znajdź współrzędne wierzchołka A oraz długość przekątnej AC .
4. Punkt T dzieli odcinek AB w stosunku $2 : 1$. Wyprowadź wzór na współrzędne punktu T w zależności od współrzędnych A oraz B .
5. Dane są wierzchołki $A(2, 4)$, $B(6, 6)$ równoległoboku $ABCD$ oraz punkt przecięcia przekątnych $S(5, 7)$. Czy równoległobok ten jest rombem?
6. Niech K, L, M będą środkami boków trójkąta ABC . Wykaż, że środki ciężkości trójkątów ABC oraz KLM pokrywają się.
7. Przyjmując, że bok ośmiokąta foremnego z zad.1 ma długość 1 oblicz następujące iloczyny skalarne: $\vec{AO} \circ \vec{OD}$, $\vec{AE} \circ \vec{OD}$, $\vec{AD} \circ \vec{AG}$.
8. Oblicz $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})^2$ wiedząc, że wektory \vec{u}, \vec{v} są wzajemnie prostopadłe i mają długość 2, natomiast wektor \vec{w} tworzy z każdym z nich kąt 135° i ma długość $2\sqrt{2}$.
9. W równoległoboku $ABCD$ dane są długości boków sąsiednich $AB = 3$ oraz $AD = 2$ oraz kąt pomiędzy nimi $\alpha = 120^\circ$. Znajdź długość przekątnej AC .
10. Dane są wierzchołki sąsiednie $A(1, 2)$ oraz $B(5, 5)$ kwadratu $ABCD$. Znajdź współrzędne pozostałych wierzchołków przy założeniu, że wierzchołki numerowane są przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Lista 13

1. Dany jest trójkąt ABC o wierzchołkach $A(1, 2)$, $B(3, 1)$ oraz $C(7, 11)$. Znajdź równanie prostej zawierającej środkową BL .
2. Znajdź równanie symetralnej odcinka AB dla $A(1, 2)$ oraz $B(3, 4)$.
3. Znajdź kąt pomiędzy prostymi: a) $y = -2x + 3$ oraz $y = 3x + 5$, b) $y = x + 2$ oraz $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$.
4. Znajdź równanie ogólne prostej przechodzącej przez punkty $P(1, 1)$ oraz $Q(3, -1)$.
5. W trójkącie o wierzchołkach $A(-2, -3)$, $B(-1, 2)$ oraz $C(4, 1)$ znajdź spodek wysokości opuszczonej z punktu B .
6. Znajdź odległość początku układu współrzędnych od prostej $x + 2y + 3 = 0$.
7. Znajdź odległość prostych $3x - y + 2 = 0$ oraz $-3x + y - 2 = 0$.
8. Znajdź pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A(1, -2)$, $B(-2, 3)$ oraz $C(5, 4)$.
9. Znajdź równanie okręgu o środku w punkcie $O(1, 3)$, wiedząc, że początek układu współrzędnych leży na tym okręgu.
10. Znajdź równanie okręgu stycznego do osi OX układu, o środku w punkcie $O(2, 3)$. W jakich punktach okrąg ten przecina oś OY ?
11. Znajdź promień i środek okręgu $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 6 = 0$.
12. Znajdź równanie stycznej poprowadzonej z punktu $P(0, 3)$ do okręgu $(x + 2)^2 + y^2 = 4$.

Lista 14

1. Dla jakiego kąta ostrego α trójkąt prostokątny o zadanej przeciwprostokątnej $c = 10$ ma największe pole?
2. Znajdź maksymalne pole trójkąta, w którym suma podstawy i wysokości opuszczonej na tę podstawę równa jest L ?
3. W trójkąt równoramienny, którego kąt przy wierzchołku równa się 120° , a podstawa $|AB| = 8$ wpisano prostokąt o możliwie największym polu tak, że bok prostokąta leży na podstawie. Znajdź pole tego prostokąta.
4. Dla jakiego kąta α w rombie o boku zadanej długości, suma długości przekątnych jest największa?
5. Znajdź wymiary tego spośród prostopadłościanów o podstawie kwadratowej wpisanych w kulę o promieniu R , który ma największą powierzchnię boczną.
6. Znajdź największą powierzchnię boczną, jaką może mieć stożek wpisany w kulę promieniu R .
7. Znajdź najmniejszą możliwą objętość stożka opisanego na walcu o promieniu podstawy $r = 2$ oraz wysokości $H = 1$.
8. Jaką największą objętość może mieć stożek o zadanej tworzącej l .