

# **SPRAWOZDANIE Z LABORATORIUM PODSTAWY I ALGORYTMY PRZETWARZANIA SYGNAŁÓW**

**Wykonał:**  
Kacper Nowak 132752

Termin:  
Czwartek, godzina 9.15

## **Ćwiczenie nr 6 Dyskretna Transformata Fouriera (DFT)**

## 1. Podstawy obliczania DFT.

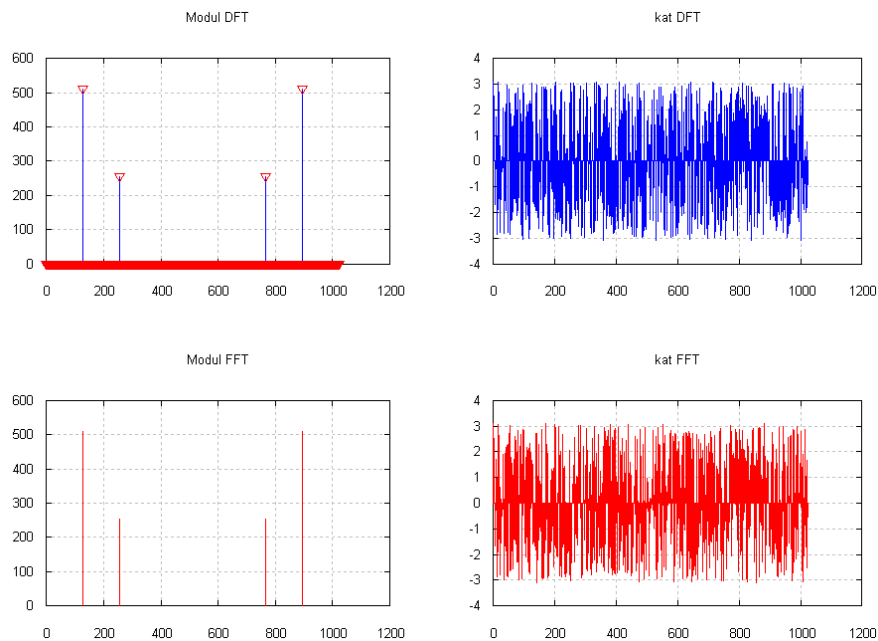
W doświadczeniu porównano czas obliczania transformaty fouriera sposobem z definicji oraz przy wykorzystaniu szybkiej transformaty fouriera. Pomiary wykonano kilkakrotnie oraz dla różnych wartości  $N$ . Wykorzystano skrypt „*DFTvsFFT.m*”.

$N$		8	16	32	64	128	256	1024
Pomiar I	FFT	0.03260	0.03700	0.03600	0.03600	0.03600	0.03600	0.03799
	DFT	0.30000	0.18800	0.42499	1.31499	5.34299	21.7100	377.777
Pomiar II	FFT	0.03600	0.03700	0.03700	0.03600	0.03499	0.03600	-----
	DFT	0.07499	0.19499	0.43799	1.33200	5.30099	21.8030	-----
Pomiar III	FFT	0.03799	0.02199	0.03400	0.04000	0.03600	-----	-----
	DFT	0.06200	0.09299	0.44600	1.38700	5.39100	-----	-----
Pomiar IV	FFT	0.03600	0.03700	0.03600	0.03500	0.03799	-----	-----
	DFT	0.07600	0.15900	0.43200	1.50900	5.39700	-----	-----
Pomiar V	FFT	0.04100	0.03600	0.03500	0.03600	0.03600	-----	-----
	DFT	0.07700	0.17900	0.44100	1.47600	5.23199	-----	-----
Pomiar VI	FFT	0.02400	0.03700	0.03600	0.04900	0.03699	-----	-----
	DFT	0.04400	0.14800	0.41500	1.39300	5.17500	-----	-----

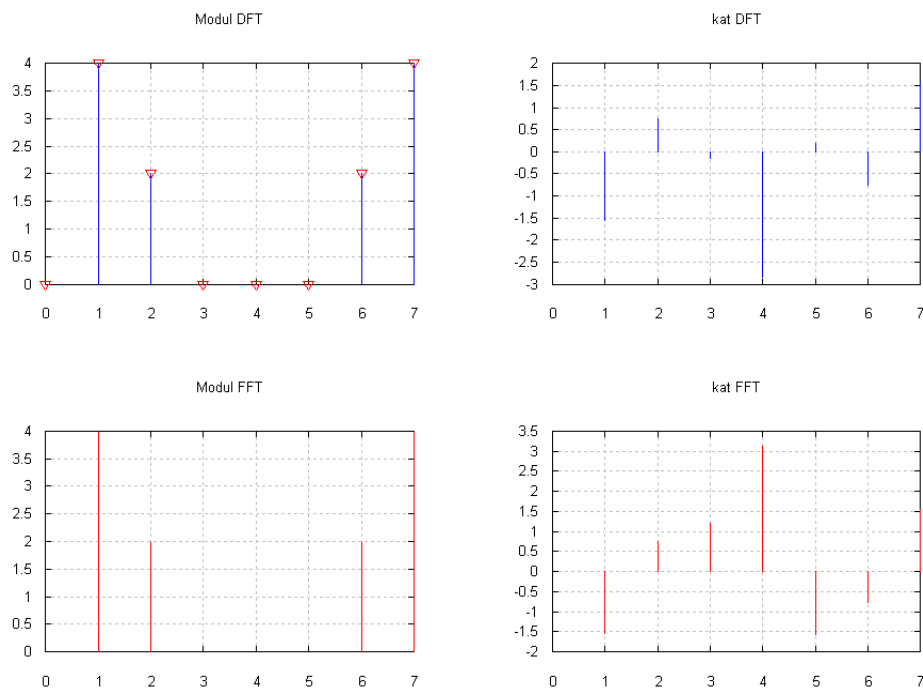
Tabela 1 – porównanie czasu obliczania FFT i DFT dla różnych  $N$ .

W tabeli nr 1 podano czas obliczania transformat w sekundach. Odczytując dane z tabeli widać bardzo wyraźnie, że czas potrzebny na obliczanie transformaty fouriera za pomocą algorytmu FFT jest minimalny. Można wnioskować, iż większość czasu potrzebna do wykonania obliczeń jest minimalny, gdyż praktycznie nie zmieniał się wraz ze wzrostem ilości próbek sygnału. Więcej czasu niż obliczenia, zajmowała natomiast inicjalizacja zewnętrznej funkcji `fft`.

Algorytm obliczania z definicji dla 1024 próbek liczył ponad 6 minut, kiedy te same obliczenia funkcja `fft` wykonała w 0,38 sekundy. Można zatem powiedzieć, że bez wykorzystania FFT cyfrowa obróbka sygnału w czasie rzeczywistym jest niemożliwa.



Rysunek 1 – wykresy modułu i fazy obliczone z definicji i za pomocą fft – N=1024.



Rysunek 2 – wykresy modułu i fazy obliczone z definicji i za pomocą fft – N=8.

Na rysunku 1 wykreślono wyniki transformaty fouriera dla N=1024. Wykresy modułów nie różnią dla obu metody, natomiast wykresy kąta różnią się od siebie od k-tej próbki (zjawisko zaobserwowano dla np. N=8, k=3 – rysunek nr 2). Nie ustalono czym jest to spowodowane, prawdopodobnie przyczyna tkwi w sposobie prezentacji kąta (rozwijanie fazy).

Funkcję m2freq dołączono do sprawozdania. Całe jej działanie zawiera się w jednym wierszu:

$f = m * f_p / \text{length}(m);$

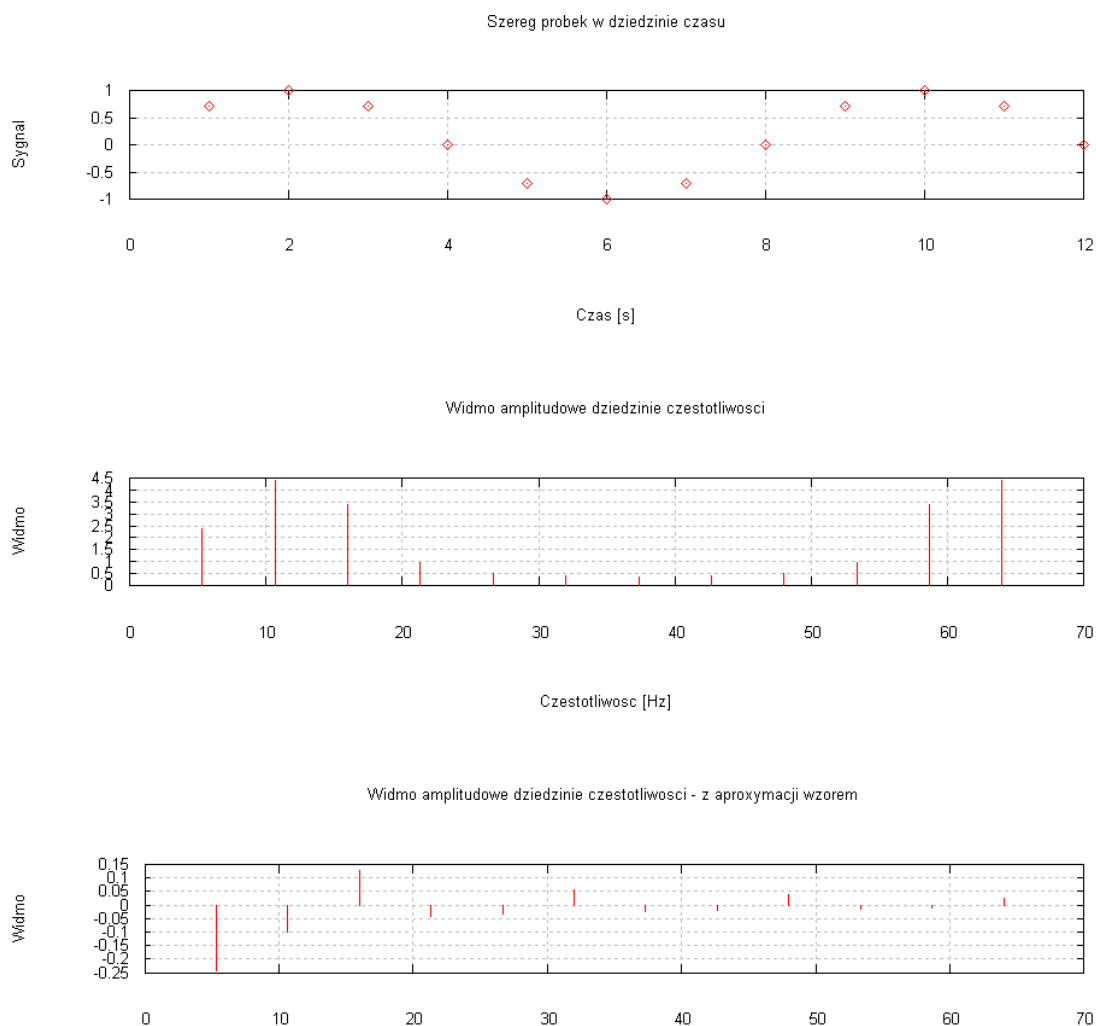
m – jest wektorem numerów próbek,

$f_p$  – jest częstotliwością próbkowania

Zatem wektor f będzie zawierał częstotliwości odpowiadające kolejnym próbce.

## 2. Próbkowanie widma ciągłego.

Próbkowanie widma ciągłego wiąże się z dobrym doбором częstotliwości próbkowania oraz długości próbkowanego fragmentu sygnału. Do zaobserwowania tych zjawisk wykorzystano skrypt „dft\_ciagla.m”.



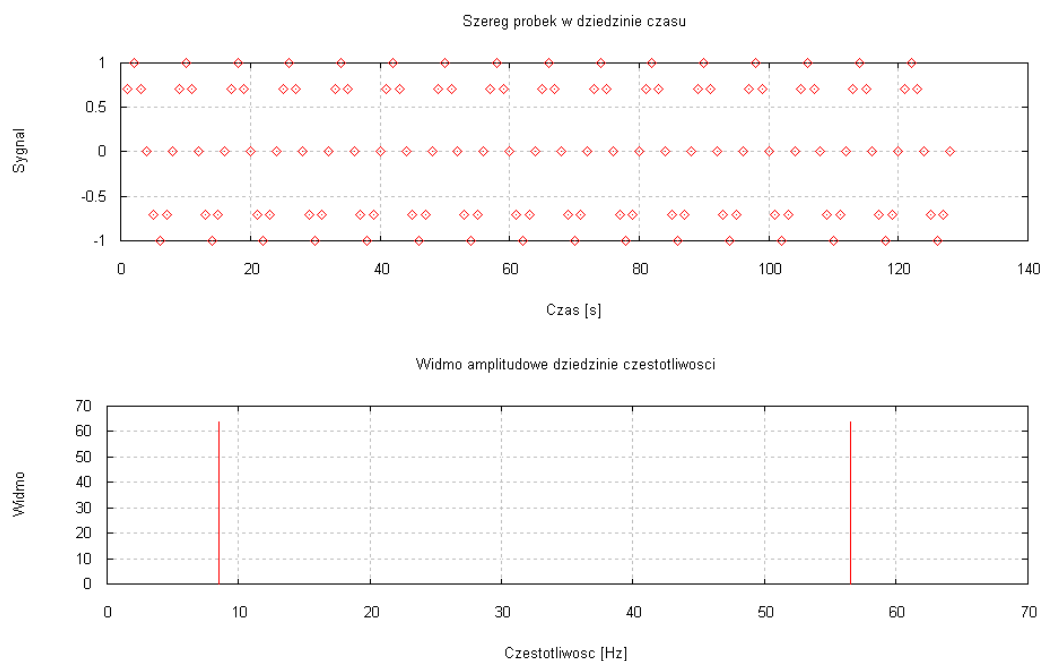
Rysunek 3 – a) sygnał – półtora okresu  $f=8$ ,  $f_s=64$ ,  $N=12$  b) i c) widma amplitudowe.

Na rysunku nr 3 wyznaczono widmo amplitudowe sygnału sinusoidalnego, analizując półtora okresu tego sygnału. Wykres c) na tymże rysunku jest widmem aproksymowanym na podstawie wzoru:

$$X(m) = \frac{N}{2} \frac{\sin(\pi(k-m))}{\pi(k-m)}$$

gdzie:  $m$  – częstotliwość dyskretna,  
 $k$  – liczba okresów sinusoidy w  $N$  próbkach.

Jak się okazało aproksymacja jest daleka od rzeczywistości więc na następnych rysunkach już jej nie zamieszczono.

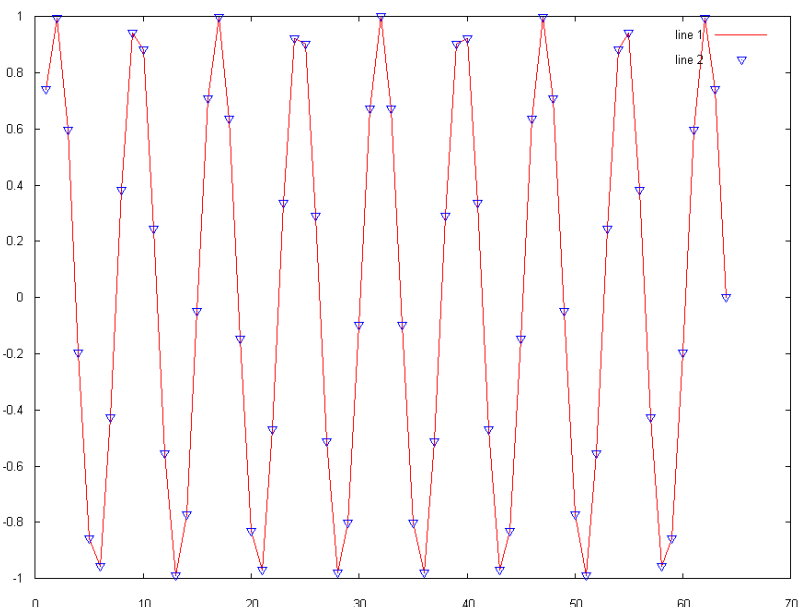


Rysunek 4 – sygnał sinusoidalny – 16 pełnych okresów  $f=8$ ,  $f_s=64$ ,  $N=128$  oraz jego widmo.

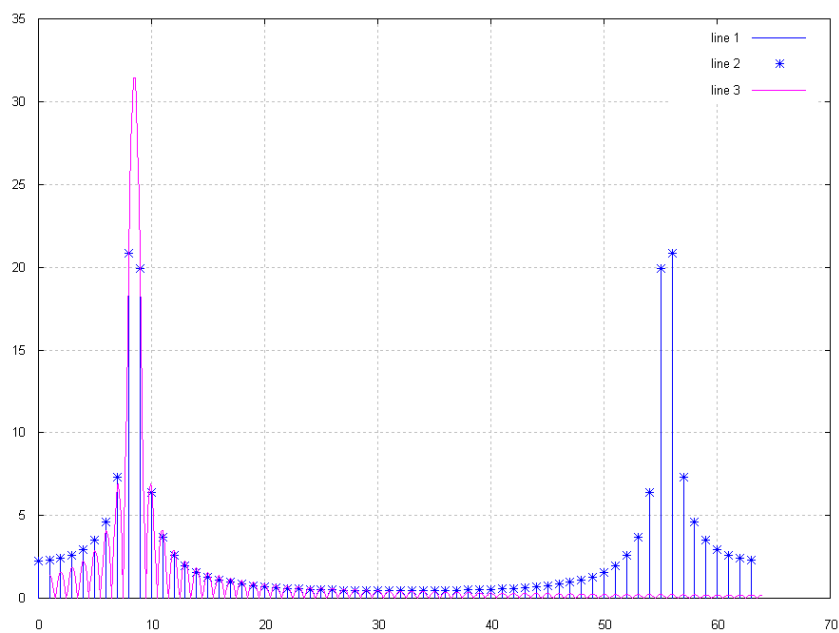
Zauważmy, iż na rysunku nr 4 sygnał został próbkowany nadmiarowo, próbki są rozłożone gęsto, a widmo jest pionowym prążkiem o częstotliwości sygnału = 8 Hz.

### 3. Przeciek widma.

W tym doświadczeniu uruchomiono skrypt „przeciek.m”, jednak do kolejnych eksperymentów z widmem wykorzystano skrypt „dft\_przeciek\_widma.m”, gdyż gotowy skrypt nie działał w sposób zgodny z oczekiwaniami.



Rysunek 5 – sygnał sinusoidalny –  $f_p=64$  Hz,  $f_{sin}=8.5$  Hz,  $N=64$  próbek. Niebieskie punkty oznaczają próbki poddane FFT.



Rysunek 6 – widmo sygnału z rysunku nr 5.

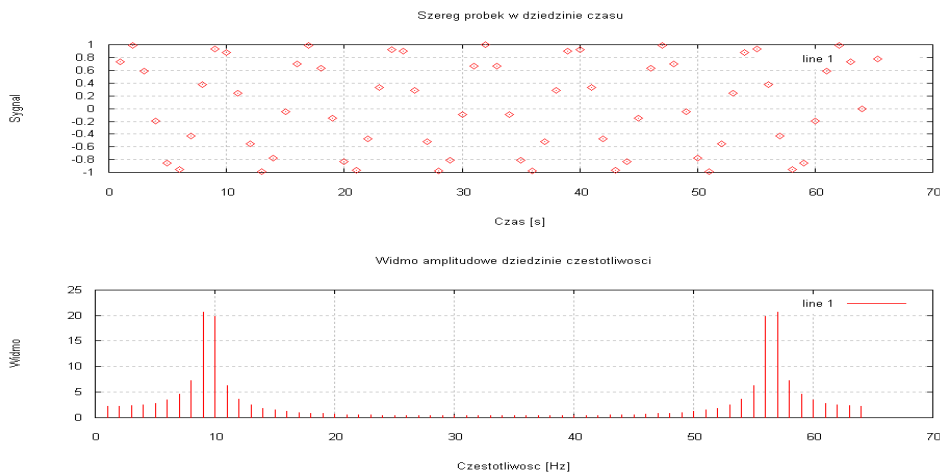
Na rysunkach 5 i 6 zaobserwowano przeciek widma. Mimo dużej częstotliwości próbkowania, ponad 7 krotnie większej niż częstotliwość sygnału, oraz dużej liczbie próbek, widmo sygnału nie pozwala wykonać odwrotnej transformaty fouriera, informacja została utracona na skutek przecieku widma.

Powyższa sytuacja miała miejsce gdyż ustawiono częstotliwość próbkowania taką, że nie można było przy jej pomocy wyrazić niektórych próbek. Ich energia „rozmyła się” na najbliższe próbki w sąsiedztwie.

Efektowi przecieku widma można zapobiegać zwiększając rozdzielczość próbkowania, czyli zwiększając częstotliwość próbkowania na tym samym fragmencie sygnału. Często zwiększanie rozdzielczości próbkowania niesie za sobą duże koszty i komplikacji lub nie jest możliwe. Znacznie lepszą metodą jest taki wybór fragmentu sygnału by zawierał pełne wielokrotności okresu. Wtedy przy niższej częstotliwości próbkowania można zapobiec przeciekowi widma.

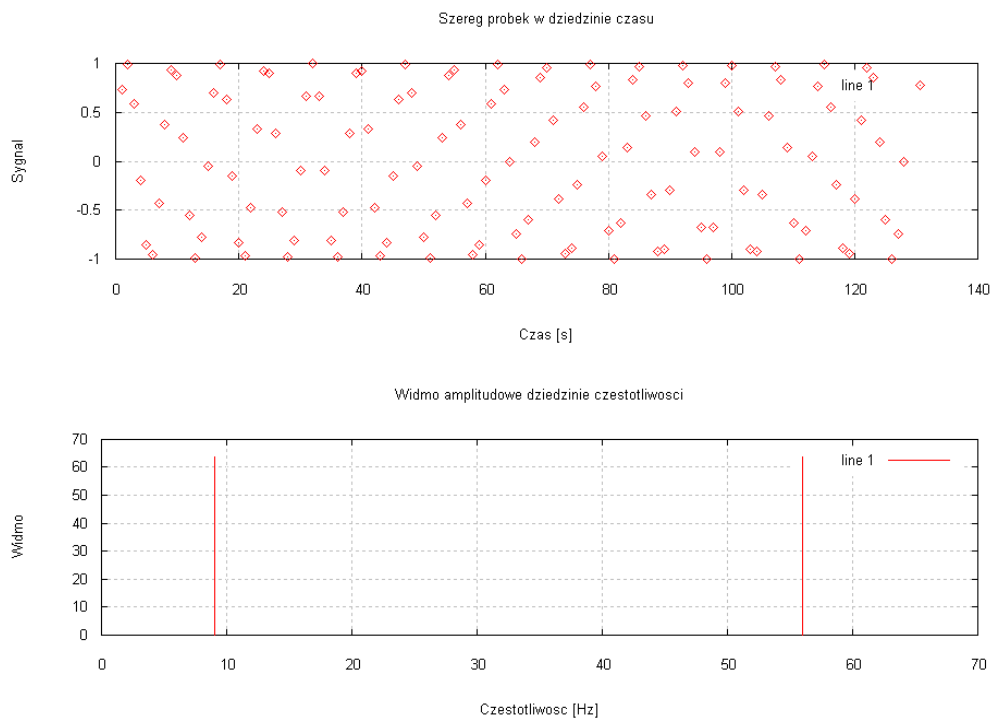
## 4. Zwiększanie rozdzielczości DFT.

Dla sygnału sinusoidalnego o  $f=8.5$  Hz, przy  $f_s=64$  Hz i rozdzielczości  $N=64$  zaobserwowano przeciek widma ( skrypt „*dft\_przeciek\_widma.m*” ).



Rysunek 7 – przeciek widma przed zwiększeniem rozdzielczości.

Aby zapobiec przeciekowi widma zwiększono rozdzielczość próbek dwukrotnie, do  $N=128$ .



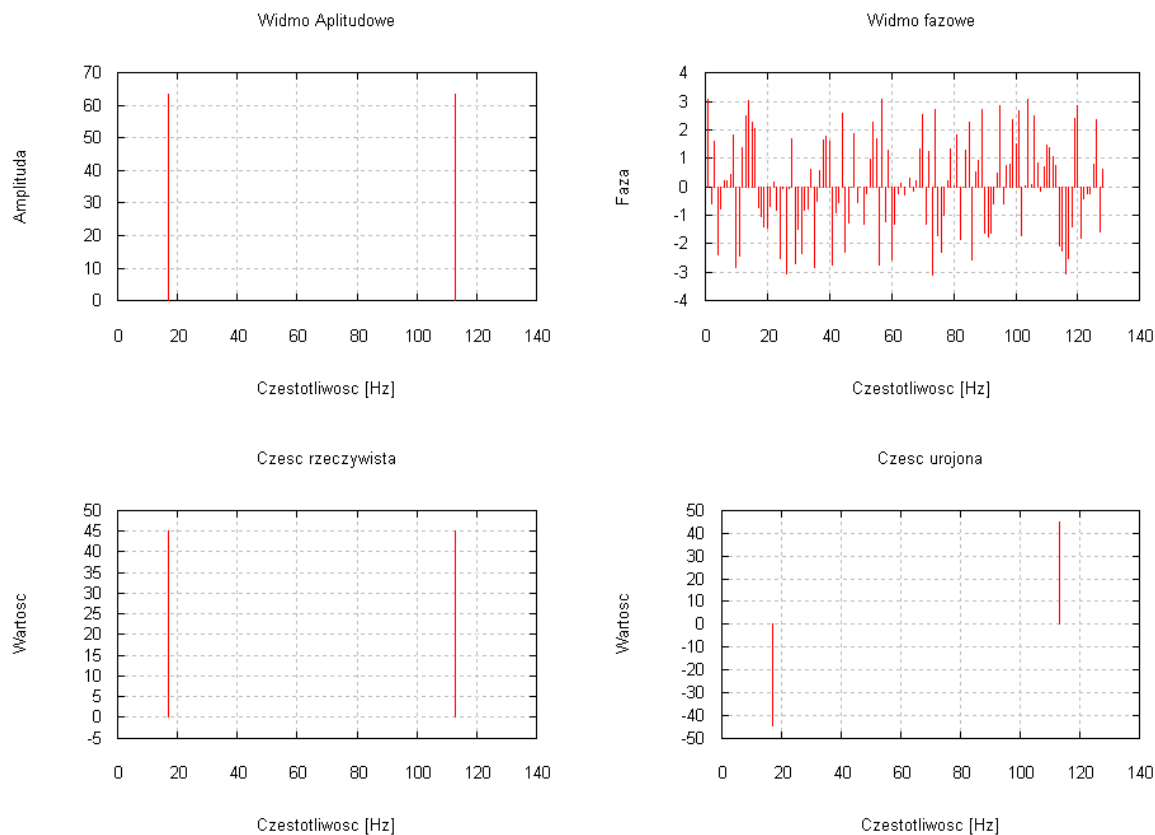
Rysunek 8 – po zwiększeniu rozdzielczości dwa razy.

Po zwiększeniu rozdzielczości efekt przecieku widma zniknął. Stało się tak gdyż dla  $N=64$  i  $f_s=64\text{Hz}$  transformata fft była w stanie wiernie przekształcić jedynie sygnał zaczynający się o 0 Hz co 1 Hz. Zatem częstotliwości 8.5 Hz nie dało się przy tych parametrach transformaty przekształcić. Prążek 8,5 Hz uległ „rozmyciu” na prążki sąsiednie, jemu najbliższe, czyli 7, 9 Hz itd. ( rysunek 7 ).

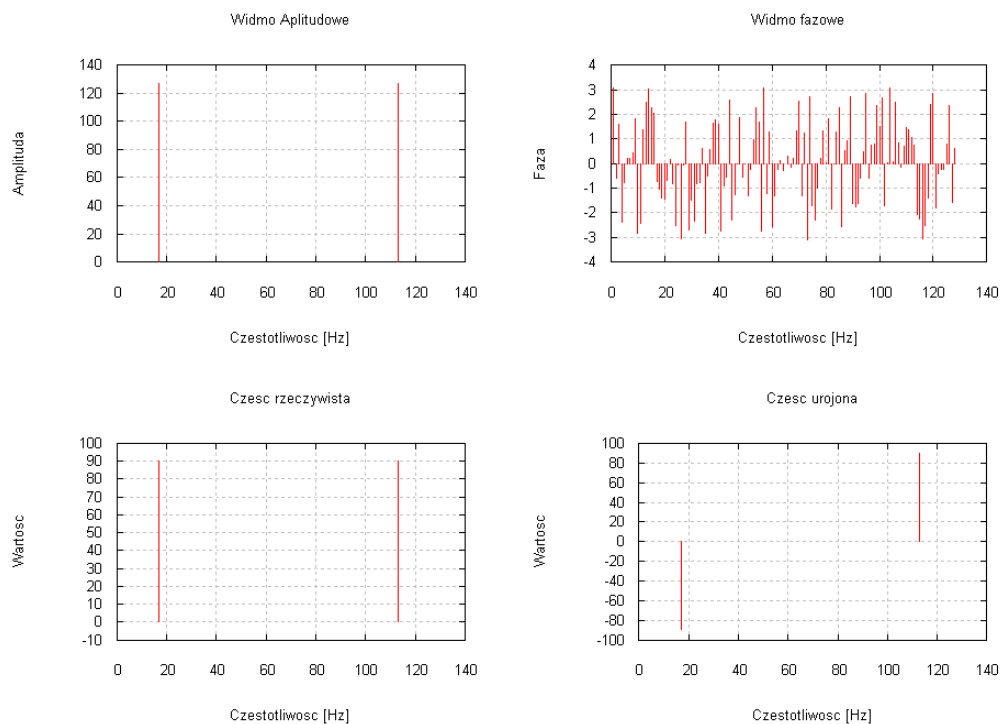
Przy rozdzielczości  $N=128$  próbek, krok częstotliwości zmalał do 0,5 Hz co umożliwiło przedstawienie prążka 8,5 Hz.

## 5. Zbadanie właściwości części rzeczywistej i urojonej DFT.

Do analizy wykorzystano skrypt „dft\_czR\_czU.m”. Przeanalizowano sygnał sinusoidalny o parametrach:  $f=16$  Hz, przy  $f_s=128$  Hz,  $N=128$  próbek i zmiennej amplitudzie  $A=1,2,3$ .

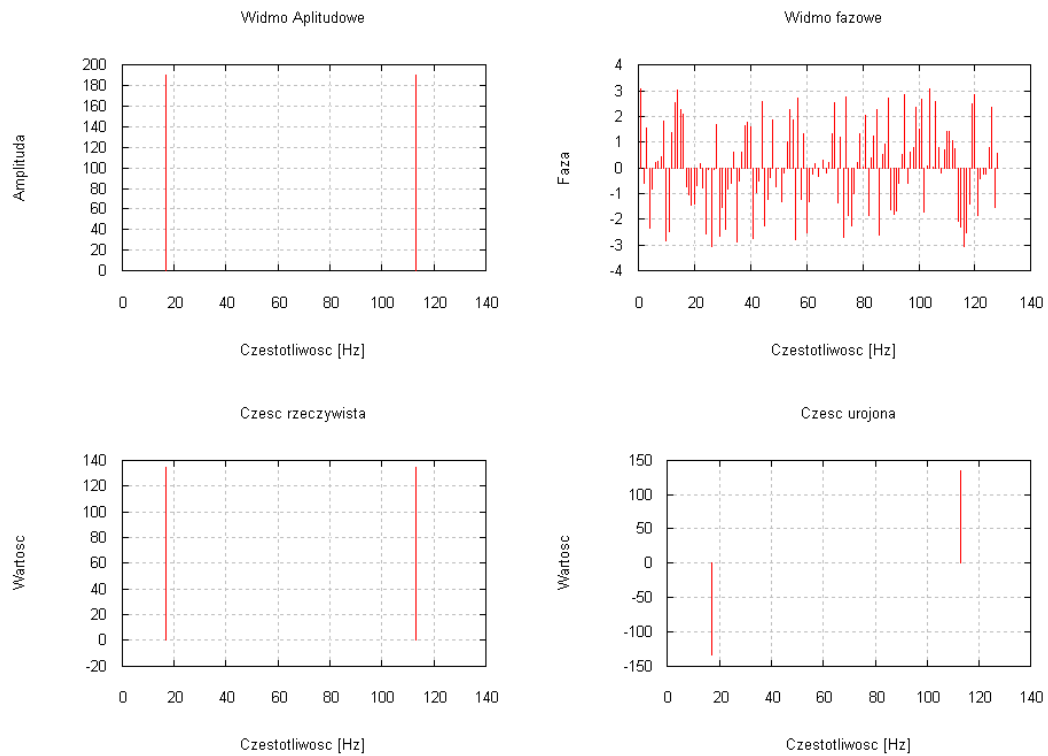


Rysunek 9 – Amplituda=1.



Rysunek 10 – Amplituda=2.





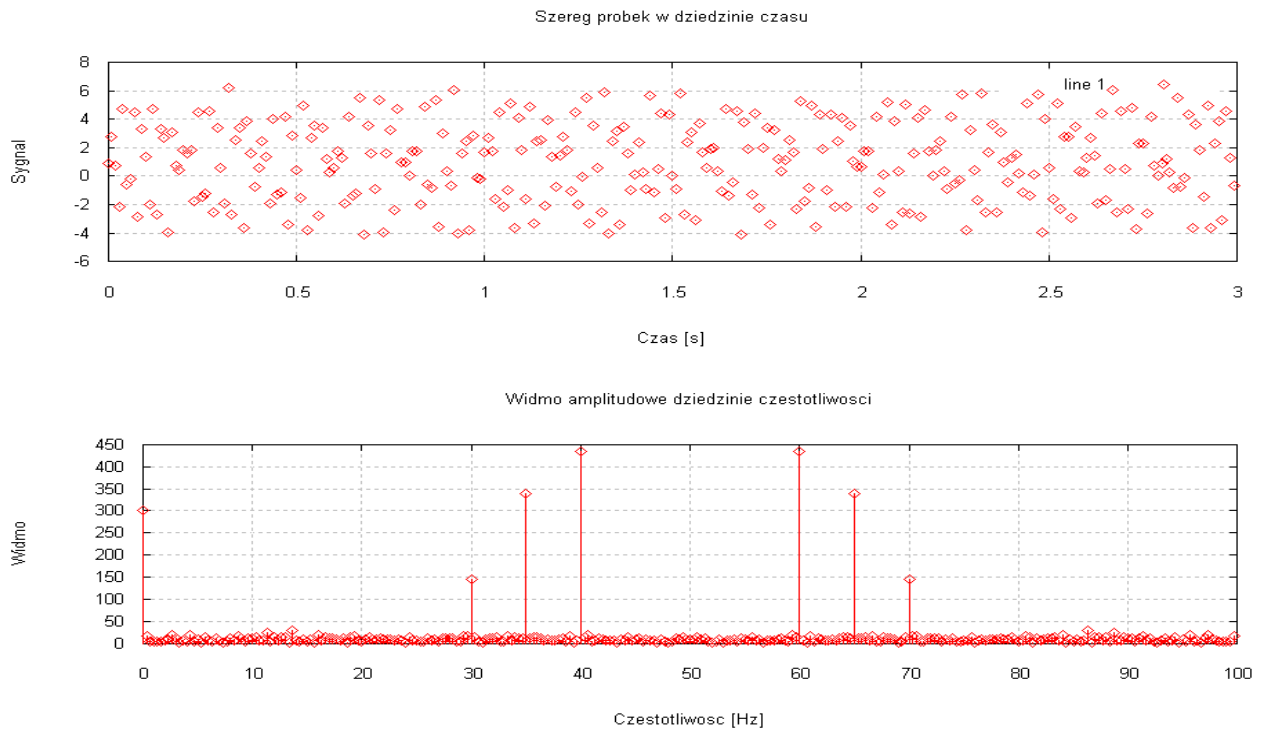
Rysunek 11 – Amplituda=3.

Na rysunkach nr 9, 10 i 11 zaobserwowano, że wartość części rzeczywistej, urojonej oraz amplitudy widma, zmienia się liniowo wraz z amplitudą sygnału.

Zmiana amplitudy sygnału nie wpływa natomiast na widmo fazy transformaty FT.

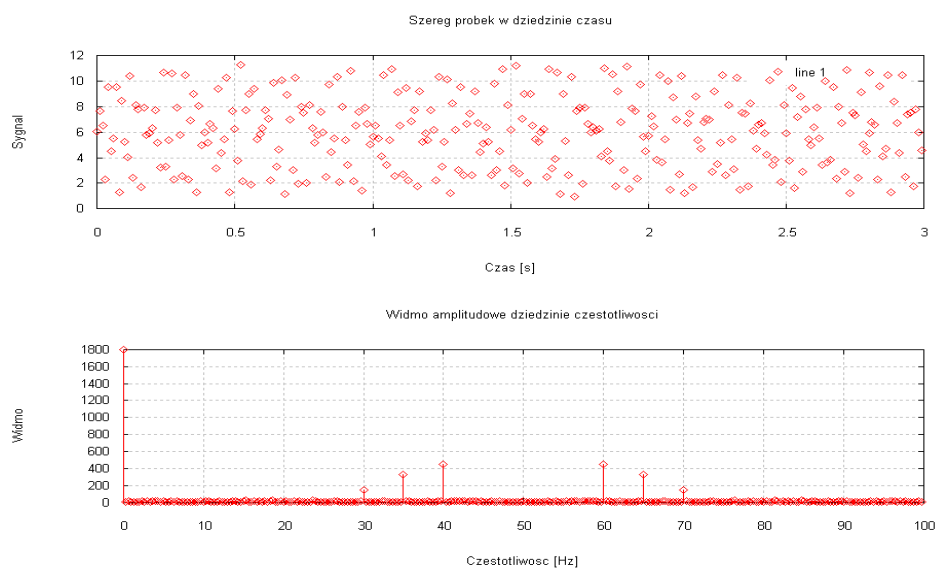
## 6. DFT sumy sygnałów.

Aby zbadać widmo sumy sygnałów wykorzystano skrypt „*pl.m*” z modyfikacjami. Zsumowano sinusoidy o trzech różnych częstotliwościach: 30, 35 i 60 Hz oraz szum biały. Następnie obliczono widmo takiego sygnału.



Rysunek 12 – widmo sumy czterech sygnałów.

Na rysunku nr 12 zaobserwowano wszystkie trzy prążki pochodzące od sumowanych sinusoid, a także prążek w 0 powstały od szumu białego oraz prążki powstałe na skutek powielenia o częstotliwość próbkowania  $f_s=100$  Hz. Wszystkie częstotliwości zostały od siebie odseparowane. Zatem możemy powiedzieć, że fft jest addytywna.



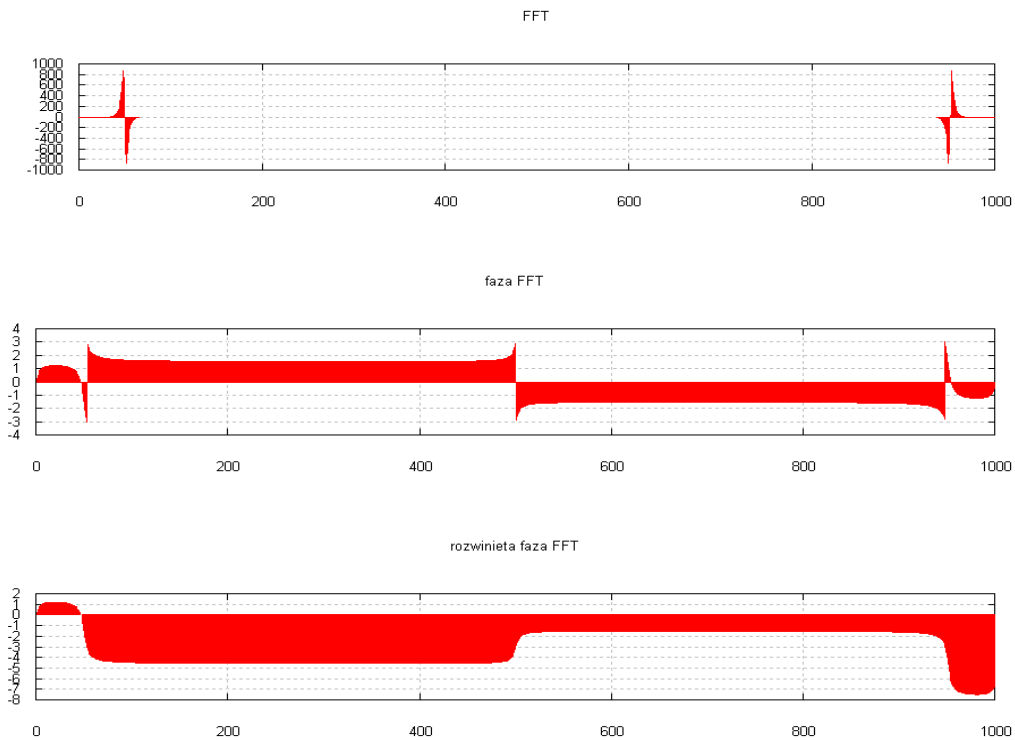
Rysunek 13– widmo sumy czterech sygnałów i składowej stałej.

Na rysunku nr 13 do sygnału dodano jeszcze składową stałą. Z obserwacji wynika że fft jest oprócz addytywności również liniowa.

Powyższe spostrzeżenia pozwalają stwierdzić, że fft ma zastosowanie przy analizowaniu składowych częstotliwościowych sygnałów.

## 7. Widmo fazowe.

Do obserwacji widma fazowego wykorzystano początek skryptu zawarty w instrukcji do ćwiczenia i napisano skrypt „*widmo\_fazowe.m*” do wykonania wizualizacji wyników obliczeń.

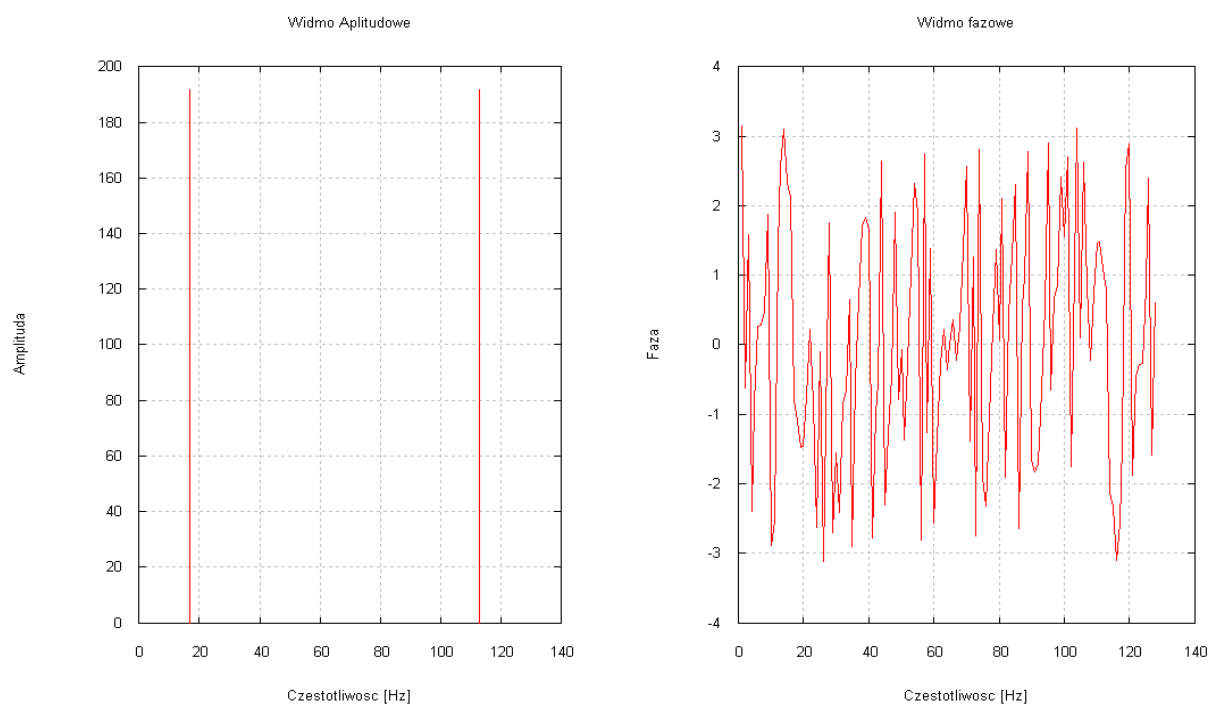


Rysunek 14 – widmo fazowe tłumionej sinusoidy.

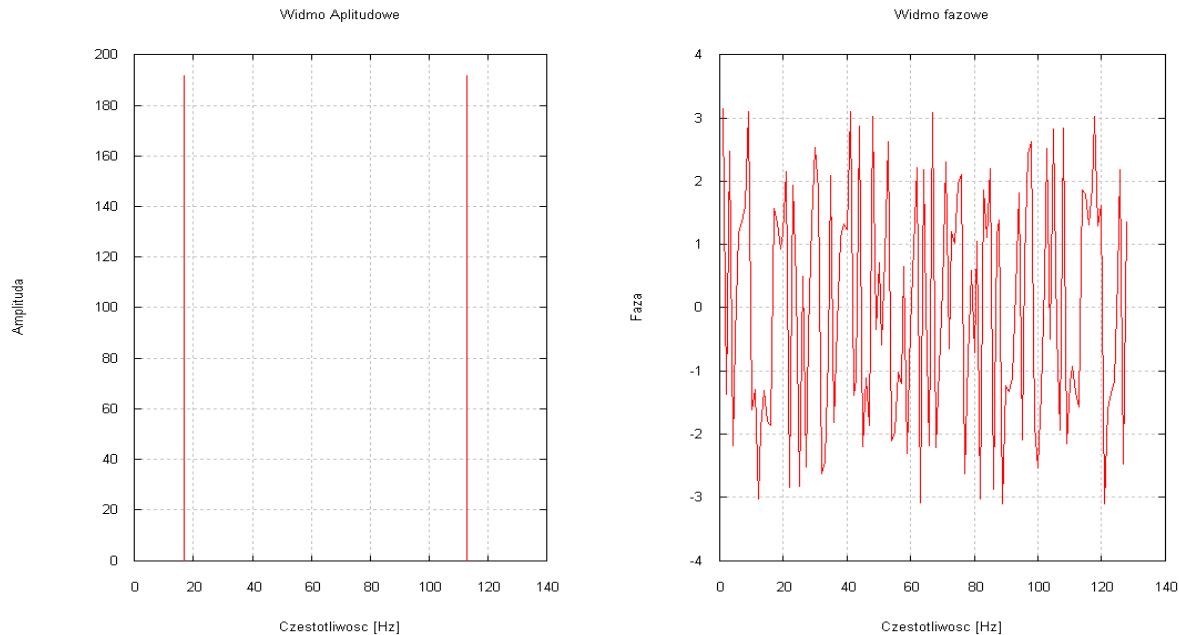
Na osiach widma fazowego kąt podany jest w radianach.

## 8. Widmo sygnału przesuniętego w czasie.

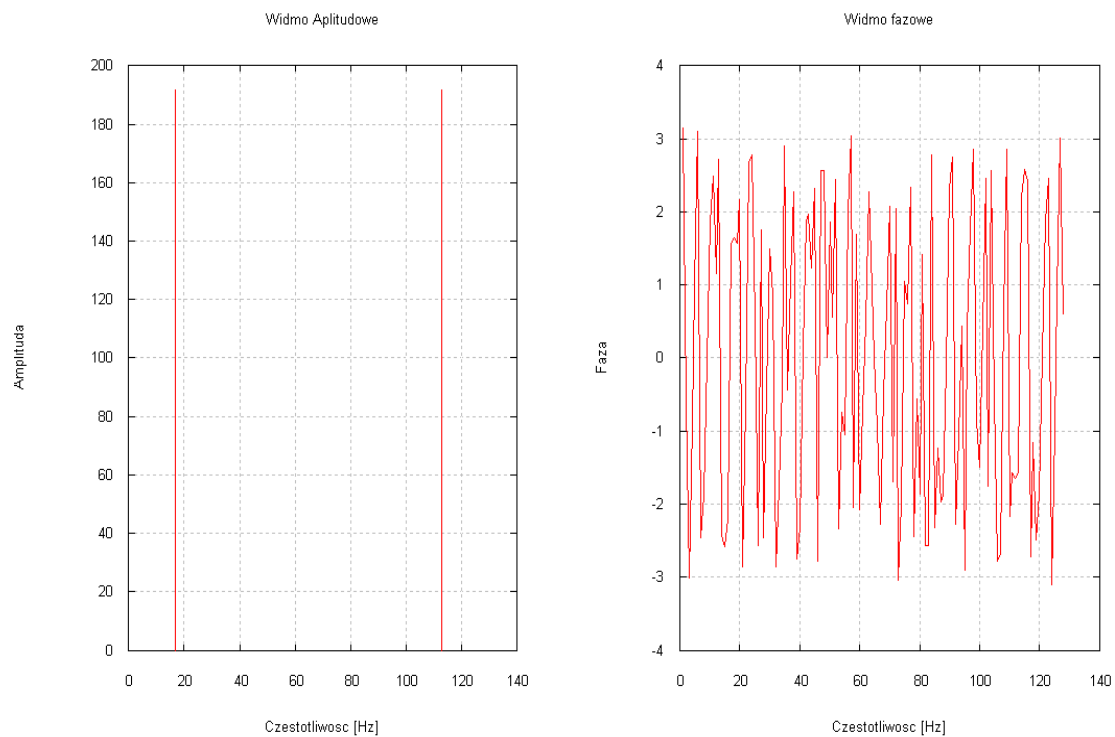
Do analizy wykorzystano skrypt „dft\_przes\_czas.m”. Obserwowano zmiany amplitudy i fazy przy przesunięciu osi czasu sygnału o  $\Delta t$ .



Rysunek 16 – widmo sygnału –  $\Delta t=0$ .



Rysunek 17 – widmo sygnału –  $\Delta t=0$ .

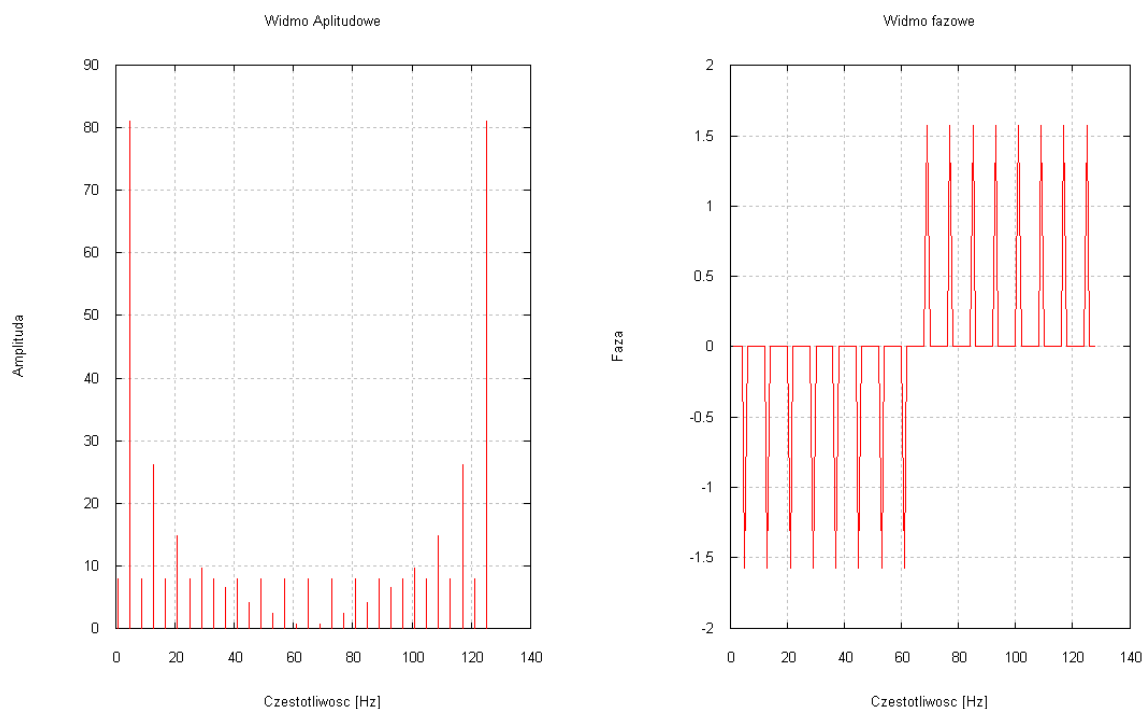


Rysunek 18 – widmo sygnału –  $\Delta t = 11$ .

Na rysunkach nr 16,17,18 stwierdzono, iż widmo amplitudowe sygnału jest niezmiennie, natomiast różni się faza. Taka obserwacja jest zgodna z twierdzeniem o przesunięciu.

## 9. DFT funkcji okna prostokątnego.

Zaobserwowano widmo sygnału prostokątnego o parametrach: długość=128 próbek, okres=32 próbki, wypełnienie=0.5, przy częstotliwości próbkowania  $f_s = 128 \text{ Hz}$ .

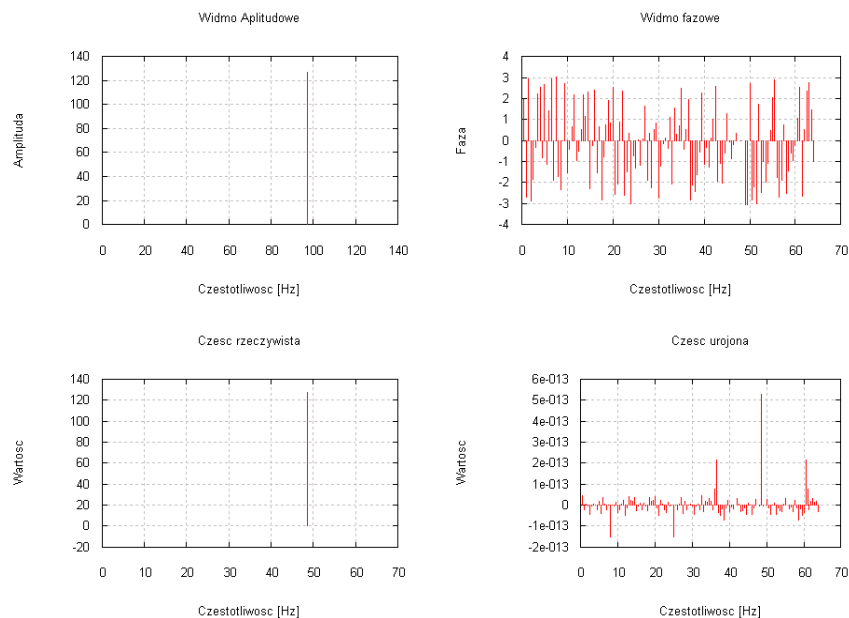


Rysunek 19 – widmo sygnału prostokątnego.

Częstotliwość sygnału wynosiła zatem  $f=4$  Hz ( $128/32$ ). Na wykresie amplitudy widma zauważono w tym miejscu prążek o wartości ponad 80, kiedy większość prążków jest poniżej 20.

## 10. DFT sygnału zespolonego.

Analizie poddano sygnał  $\sin(t) + j\cos(t)$  o częstotliwości  $f=16$  Hz, przy  $f_s=64$  Hz i ilości próbek  $N=128$ . W tym celu wykorzystano skrypt „*dft\_sygn\_zesp.m*”. Poniżej wykresy transformaty fourieria:

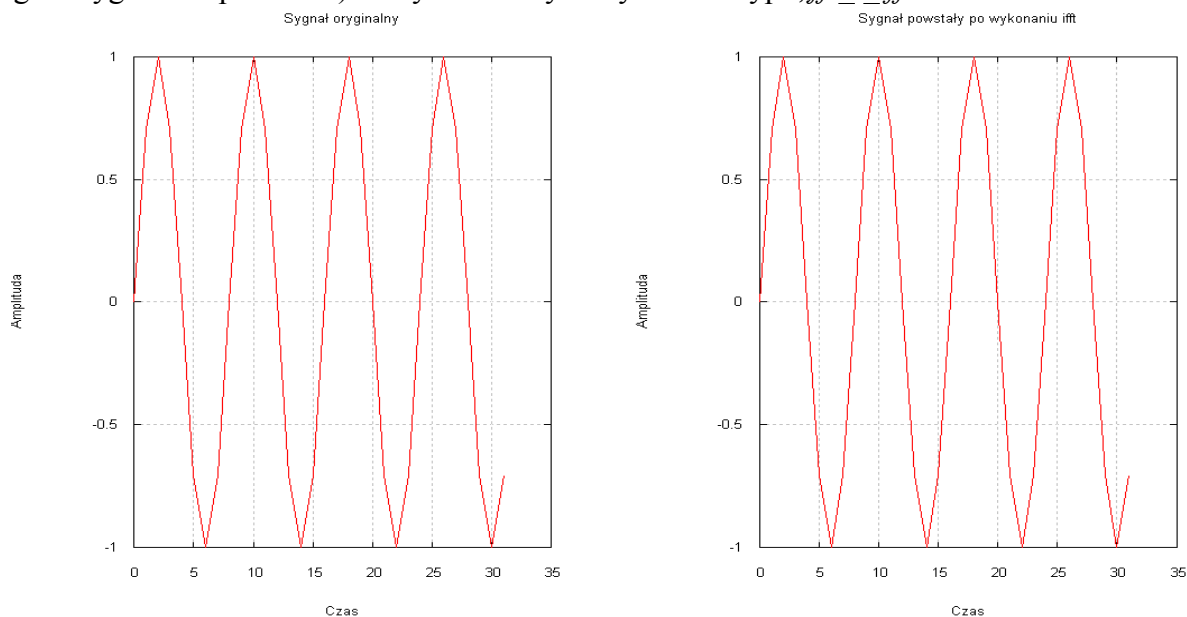


Rysunek 20 – widmo fazowe tłumionej sinusoidy.

Zauważono, że mimo dobrego doboru częstotliwości próbkowania i ilości próbek nastąpił przeciek widma dla części urojonej. Dla części rzeczywistej nie zaobserwowano przecieku widma.

## 11. Odwrotna dyskretna transformata Fouriera.

Analizie poddano sygnał sinusoidalny o parametrach:  $A=1$  (amplituda),  $f=8$  Hz,  $f_s=64$  Hz,  $N=32$  (długość sygnału w próbkach). W tym celu wykorzystano skrypt „*fft\_i\_ift.m*”.



Rysunek 21 – sygnał oryginalny i odtworzony funkcją ifft.

Zaobserwowano, iż funkcja odwrotnej transformaty zwraca oryginalny sygnał bez przekłamań. Dzieje się tak gdyż analizuje ona amplitudę i fazę widma. Informacje o samej amplitudzie byłyby nie kompletne i nie możliwe stałoby się rozróżnienie czy sygnał był sinusem, czy cosinusem ( przy odpowiednio dobranym rozkładzie próbek ).

## 12. Wnioski.

Szczegółowe wnioski z analiz umieszczono w odpowiednich punktach sprawozdania. Poniżej ogólne i nie pełne sformułowania zaobserwowanych zależności:

- Szybka transformata fouriera umożliwia analizę sygnału w czasie rzeczywistym. Obliczenia z definicji są całkowicie nieefektywne.
- Na wystąpienie efektu przecieku widma ma wpływ dobór analizowanego fragmentu, jego długość i wycinek sygnału. Należy starać się wybrać fragment będący pełnym okresem sygnału lub wielokrotnością.
- Zapobiegając przeciekowi widma można stosując odpowiednie okno dla sygnału, zwiększając częstotliwość próbkowania, rozdzielczość próbkowania.
- Zwiększanie amplitudy sygnału powoduje liniowe zwiększanie wartości części rzeczywistej i urojonej widma.
- Suma transformat sygnałów jest równa transformacie sumy tychże sygnałów. Ta zależność jest podstawą analizy składowych częstotliwościowych sygnałów.
- Aby zobaczyć pełną fazę w programie octave należy użyć funkcji rozwijającej fazę *unwrap*.
- Przesunięcie sygnału w czasie zmienia fazę, a nie zmienia amplitudy widma.
- Dla sygnałów zespolonych nie można zrobić fft, bo sprzężenie nie zachodzi i dlatego trzeba robić pełną transformatę fouriera.
- Odwrotna transformata fouriera daje sygnał zgodny z pierwotnym.