

Zera i bieguny

1. Wyznaczanie zer (pierwiastków) wielomianów

W tej części ćwiczenia skorzystałem z funkcji `roots()` programu *Octave* do wyznaczenia miejsc zerowych podanego wielomianu.

(a) $w_1(z) = z^2 - z + \frac{1}{2},$

(b) $w_2(z) = z^2 - 2z + 2,$

(c) $w_3(z) = z^2 + z + \frac{1}{2},$

(d) $w_4(z) = z^2 + 2z + 2,$

(e) $w_5(z) = z^2 - zi + 0.5,$

(f) $w_6(z) = z^2 - 1.5z - 1.5zi + 1.0i,$

a) $z_1 = 0.5 + 0.5i$
 $z_2 = 0.5 - 0.5i$

b) $z_1 = 1 + 1i$
 $z_2 = 1 - 1i$

c) $z_1 = -0.5 + 0.5i$
 $z_2 = -0.5 - 0.5i$

d) $z_1 = -1 + 1i$
 $z_2 = -1 - 1i$

e) $z_1 = 1.36603i$
 $z_2 = -0.36603i$

f) $z_1 = 1 + 1i$
 $z_2 = 0.5 - 0.5i$

Na podstawie wyników można powiedzieć, że pierwsze cztery wielomiany mają pierwiastki sprzężone, a dla wielomianu z przykładu e) mamy tylko wartości czysto urojone.

2. Wyznaczanie współczynników wielomianów

W tej części należało na podstawie podanych zer wielomianów otrzymać ich wielomiany. Do tego celu użyłem funkcji *poly()*

- (a) $w_1(z) = ?$ dla $z_1 = 0.5 + 0.5i$, $z_2 = 0.5 - 0.5i$,
- (b) $w_2(z) = ?$ dla $z_1 = 1.0 + 1.0i$, $z_2 = 1.0 - 1.0i$,
- (c) $w_3(z) = ?$ dla $z_1 = -0.5 + 0.5i$, $z_2 = -0.5 - 0.5i$,
- (d) $w_4(z) = ?$ dla $z_1 = -1.0 + 1.0i$, $z_2 = -1.0 - 1.0i$,
- (e) $w_5(z) = ?$ dla $z_1 = 0.5 + 0.5i$, $z_2 = -0.5 + 0.5i$,
- (f) $w_6(z) = ?$ dla $z_1 = 0.5 + 0.5i$, $z_2 = 1.0 + 1.0i$,

a) $\varpi_1 = z^2 - z + 0.5$

b) $\varpi_2 = z^2 - 2z + 2$

c) $\varpi_3 = z^2 + z + 0.5$

d) $\varpi_4 = z^2 + 2z + 2$

e) $\varpi_5 = z^2 - zi - 0.5$

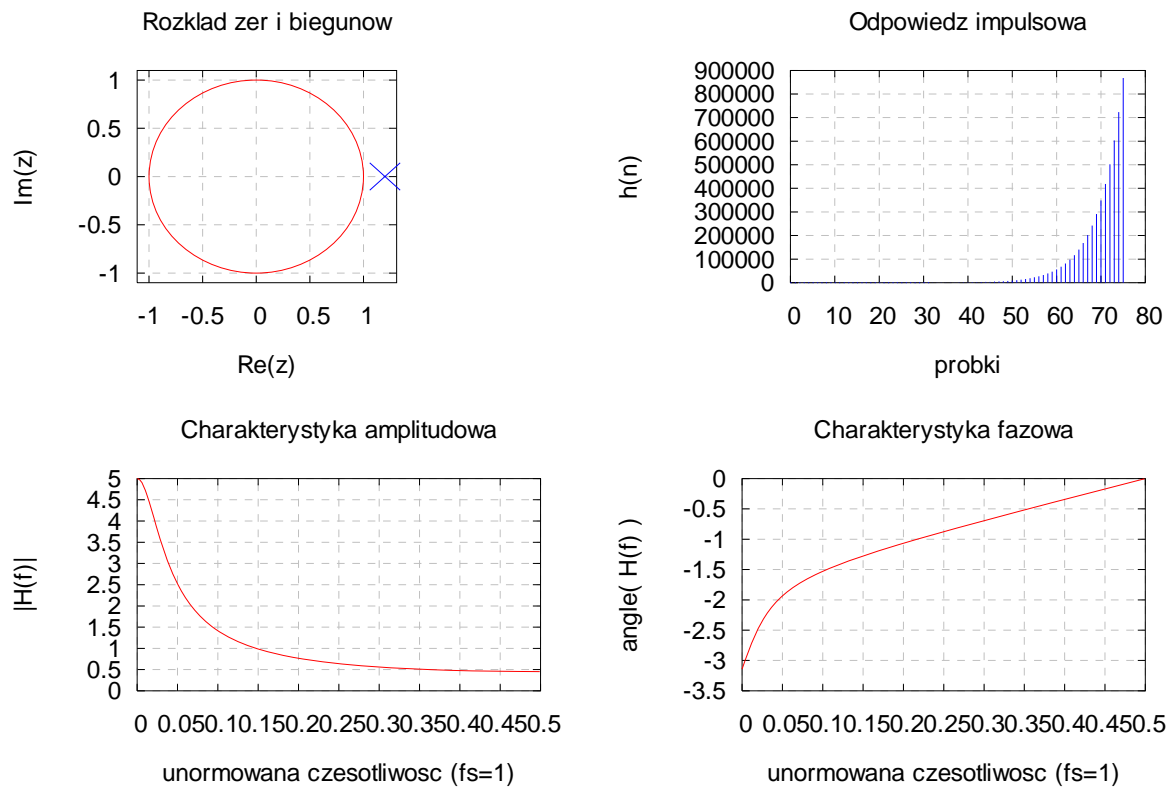
f) $\varpi_6 = z^2 - 1.5z - 1.5zi + 1i$

3. Pojedynczy biegun leżący na osi rzeczywistej

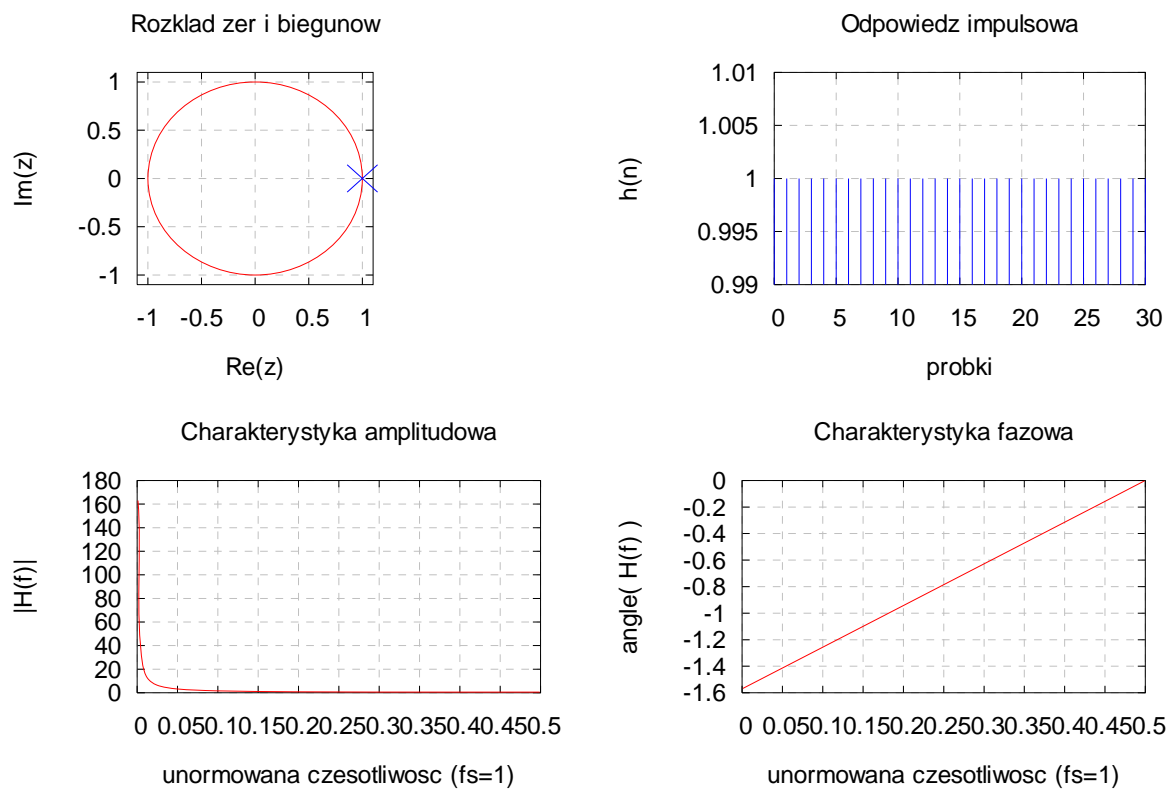
Przy pomocy odpowiednich funkcji należało sprawdzić wpływ położenia pojedynczego bieguna na osi rzeczywistej na przebieg sygnału

$$x(n) = a^n u(n);$$

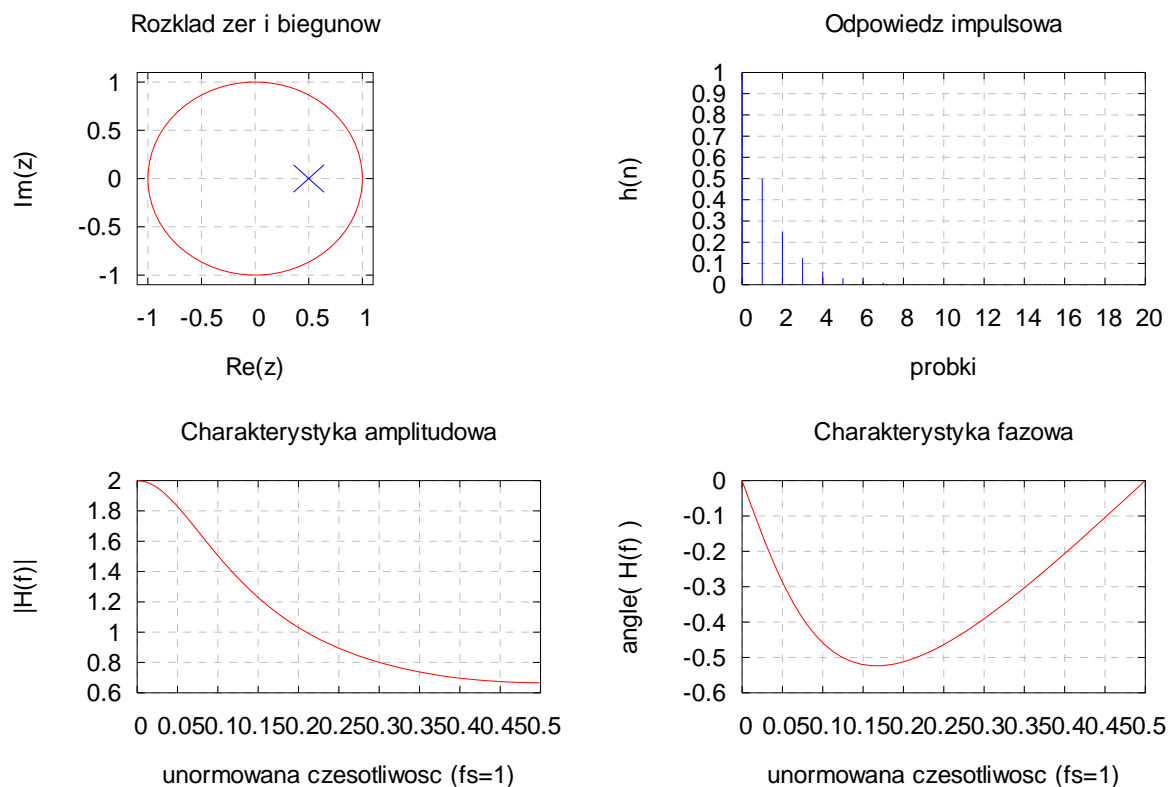
$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

a) Biegun $z = 1.2$ 

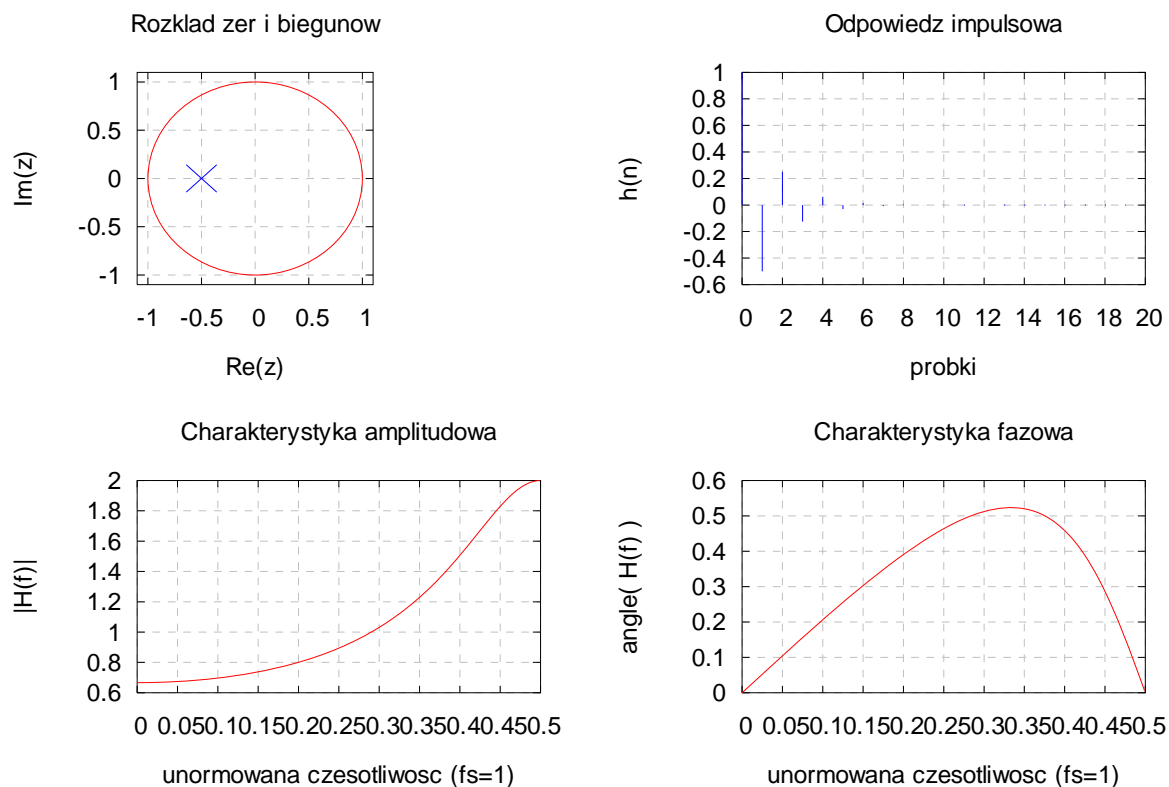
Rys. 1 Zobrazowanie zależności

b) Biegun $z = 1$ 

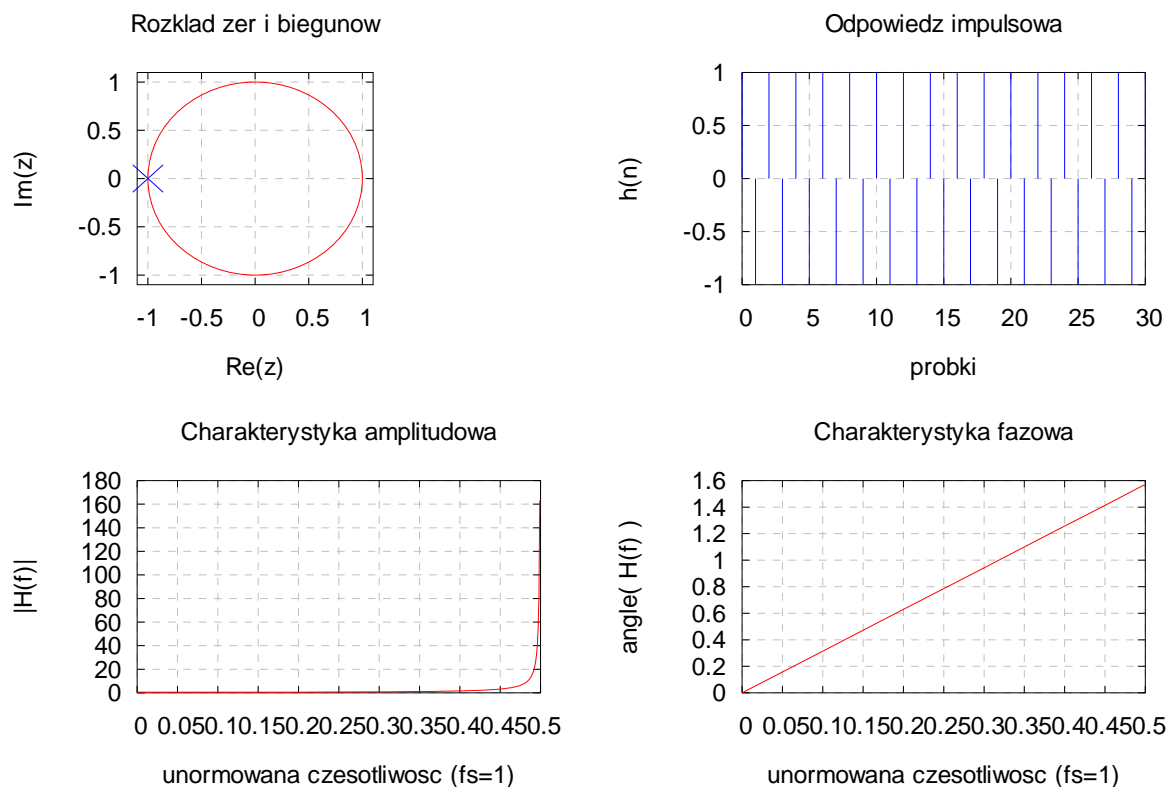
Rys. 2 Zobrazowanie zależności

c) Biegun $z = 0.5$ 

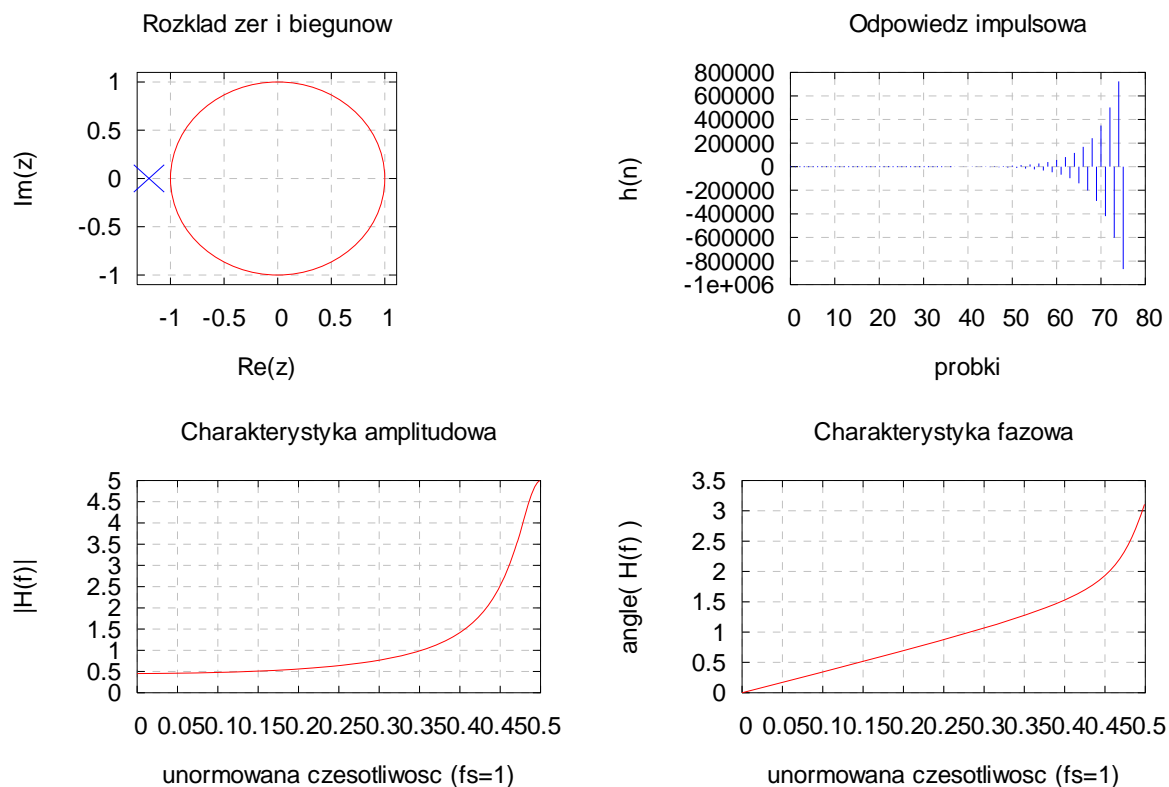
Rys. 3 Zobrazowanie zależności

d) Biegun $z = -0.5$ 

Rys. 4 Zobrazowanie zależności

e) Biegun $z = -1$ 

Rys. 5 Zobrazowanie zależności

f) Biegun $z = -1.2$ 

Rys. 6 Zobrazowanie zależności

Powyższe wykresy z położeniem bieguna obrazują wpływ jego umiejscowienia na osi rzeczywistej na odpowiedź impulsową układu. Jak widać dla bieguna leżącego poza kołem jednostkowym zarówno dla części dodatniej i ujemnej wartości rzeczywistych, odpowiedź impulsowa przedstawia sygnał, który jest sygnałem oscylacyjnym „rozbiegającym się” do nieskończoności. Dla biegunów leżących na okręgu mamy stałe oscylacje odpowiedzi impulsowej, natomiast dla biegunów leżących wewnątrz koła na osi liczb rzeczywistych odpowiedź impulsowa jest funkcją, która dąży do wartości ustalonej. Dla biegunów dodatnich leżących na osi rzeczywistej mamy tłumienie wysokich częstotliwości, a dla ujemnych biegunów tłumienie niskich częstotliwości.

4. Para biegunów sprzężonych

W tej części ćwiczenia zbadalem na podstawie kilku przykładów jaki wpływ ma położenie pary dwóch biegunów sprzężonych na odpowiedź impulsową. Bieguny były umieszczane pod różnymi kątami i o różnym module.

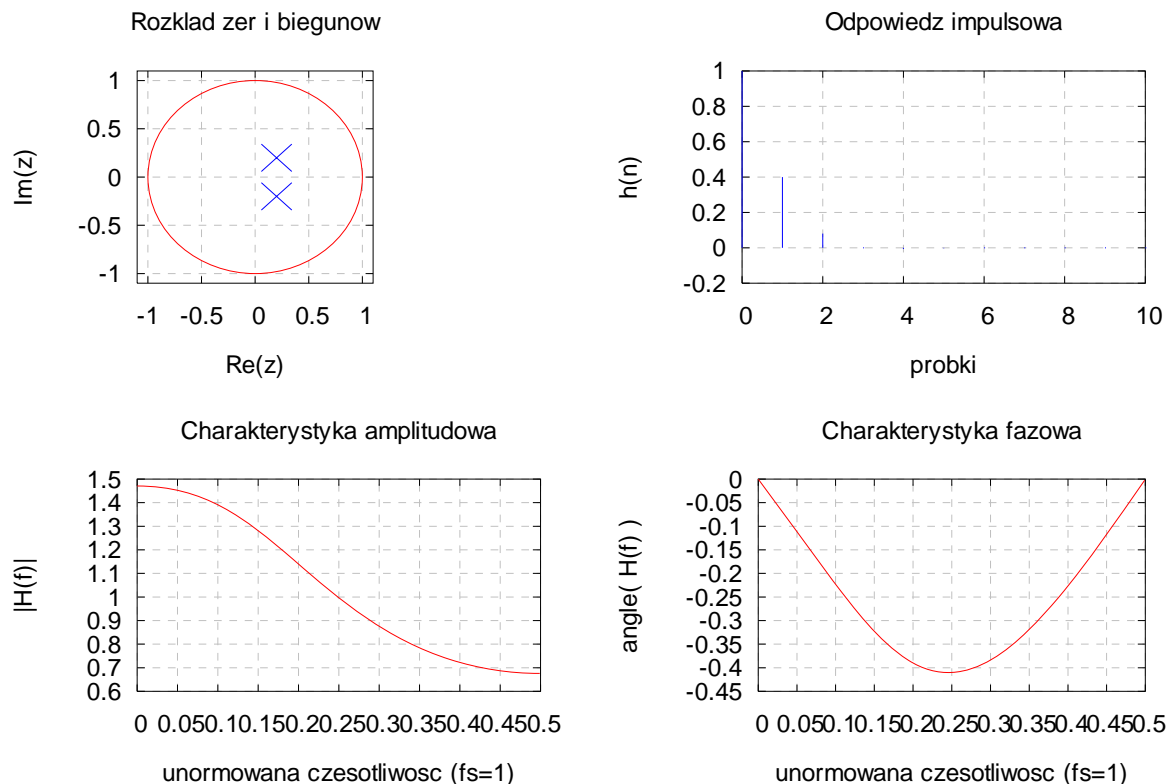
4.1 Bieguny wewnątrz koła

a) w dodatniej półpłaszczyźnie

Bieguny:

$$z_1 = 0.2 + 0.2i$$

$$z_2 = 0.2 - 0.2i$$



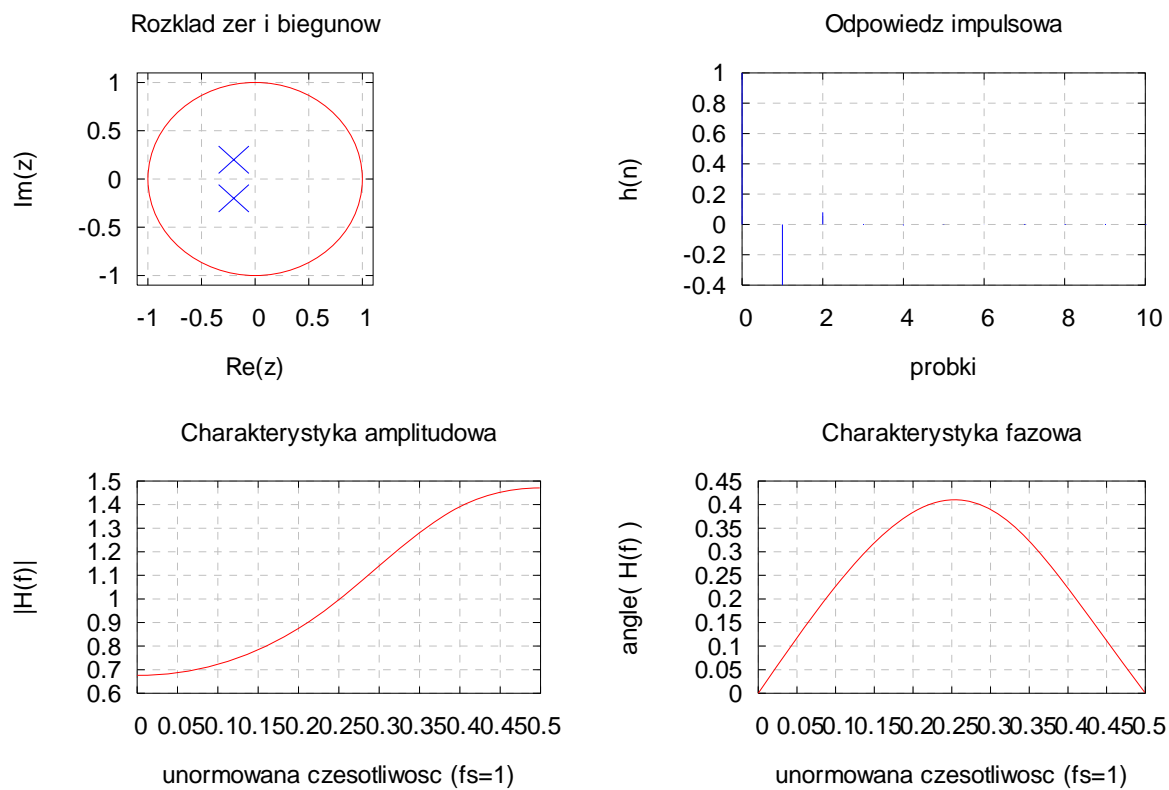
Rys. 7 Zobrazowanie zależności

b) w ujemnej półpłaszczyźnie

Bieguny:

$$z_1 = -0.2 + 0.2i$$

$$z_2 = -0.2 - 0.2i$$



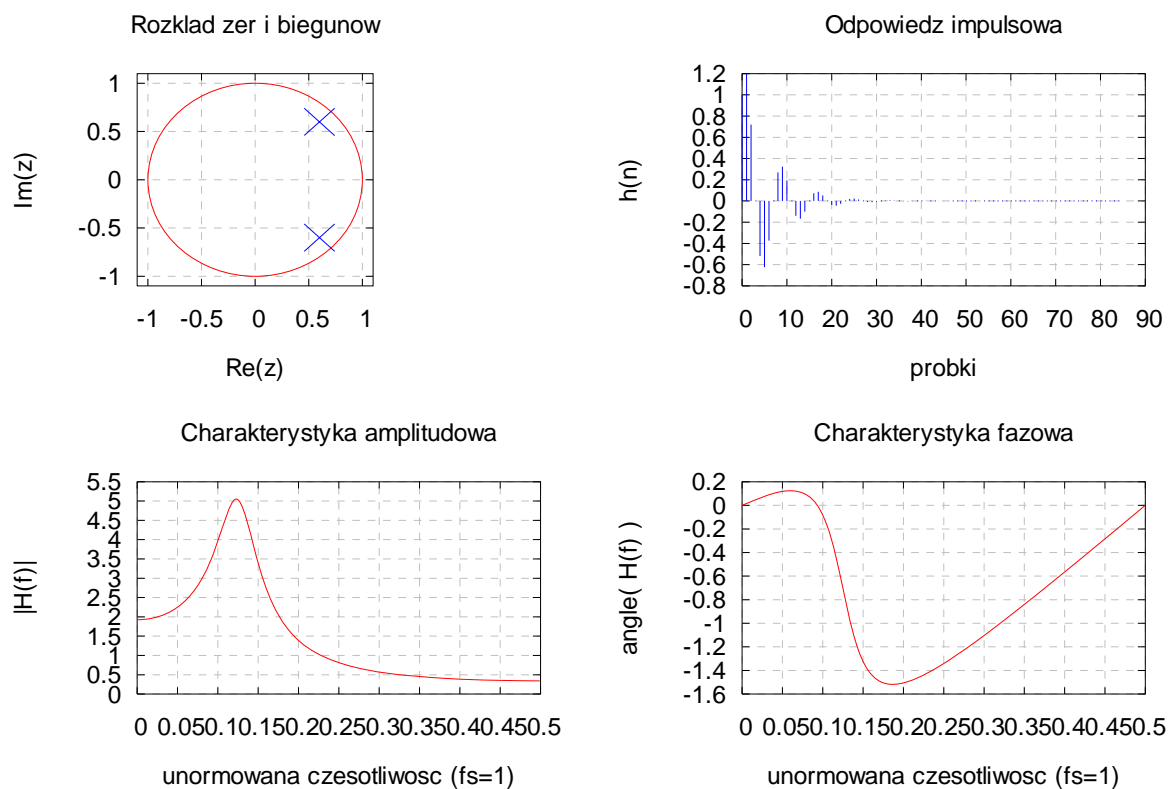
Rys. 8 Zobrazowanie zależności

c) w dodatniej półpłaszczyźnie

Bieguny:

$$z_1 = 0.6 + 0.6i$$

$$z_2 = 0.6 - 0.6i$$



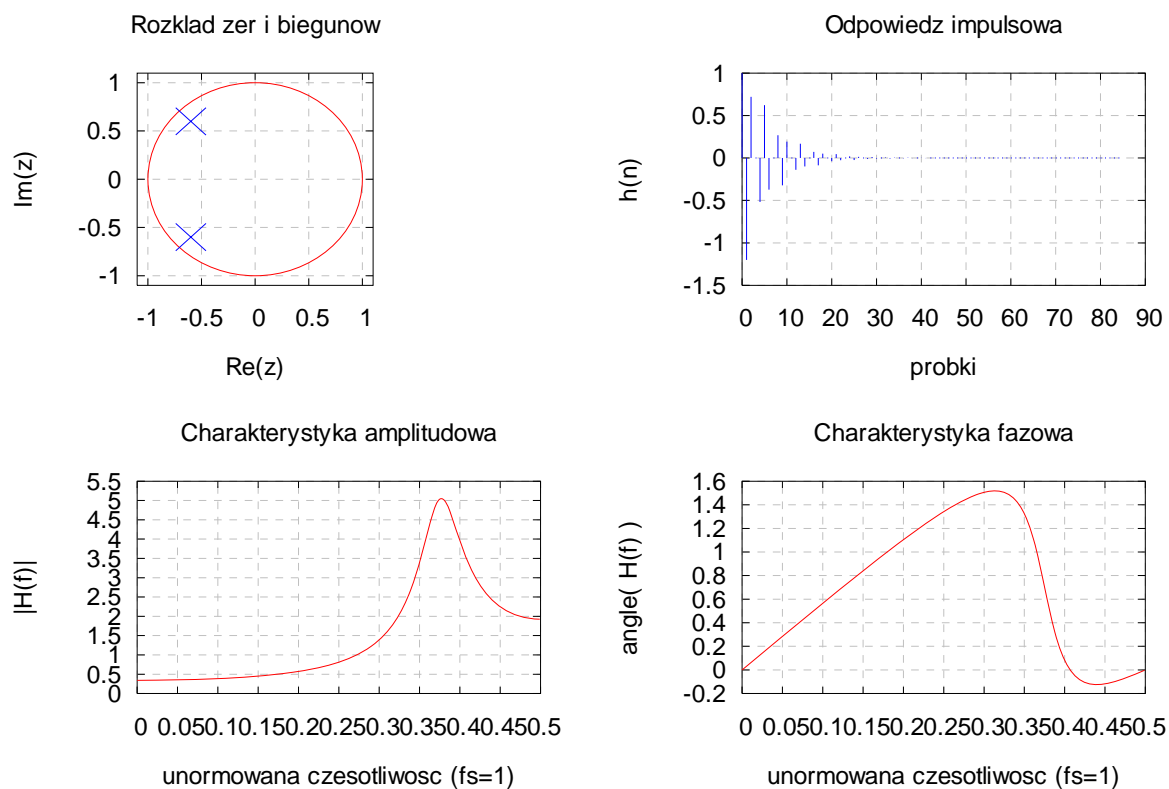
Rys. 9 Zobrazowanie zależności

d) w ujemnej półpłaszczyźnie

Bieguny:

$$z_1 = -0.6 + 0.6j$$

$$z_2 = -0.6 - 0.6j$$



Rys. 10 Zobrazowanie zależności

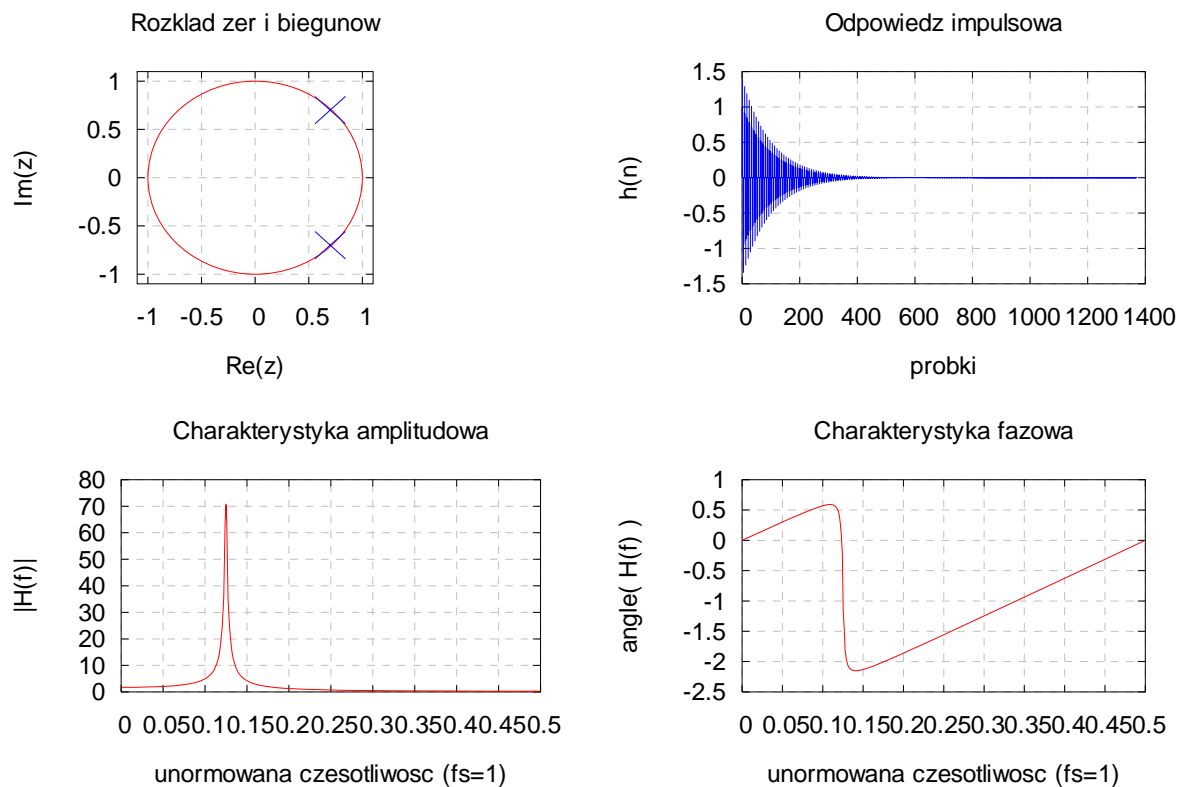
4.2 Bieguny na kole

a) w dodatniej półpłaszczyźnie

Bieguny:

$$z_1 = 0.75 + 0.75i$$

$$z_2 = 0.75 - 0.75i$$

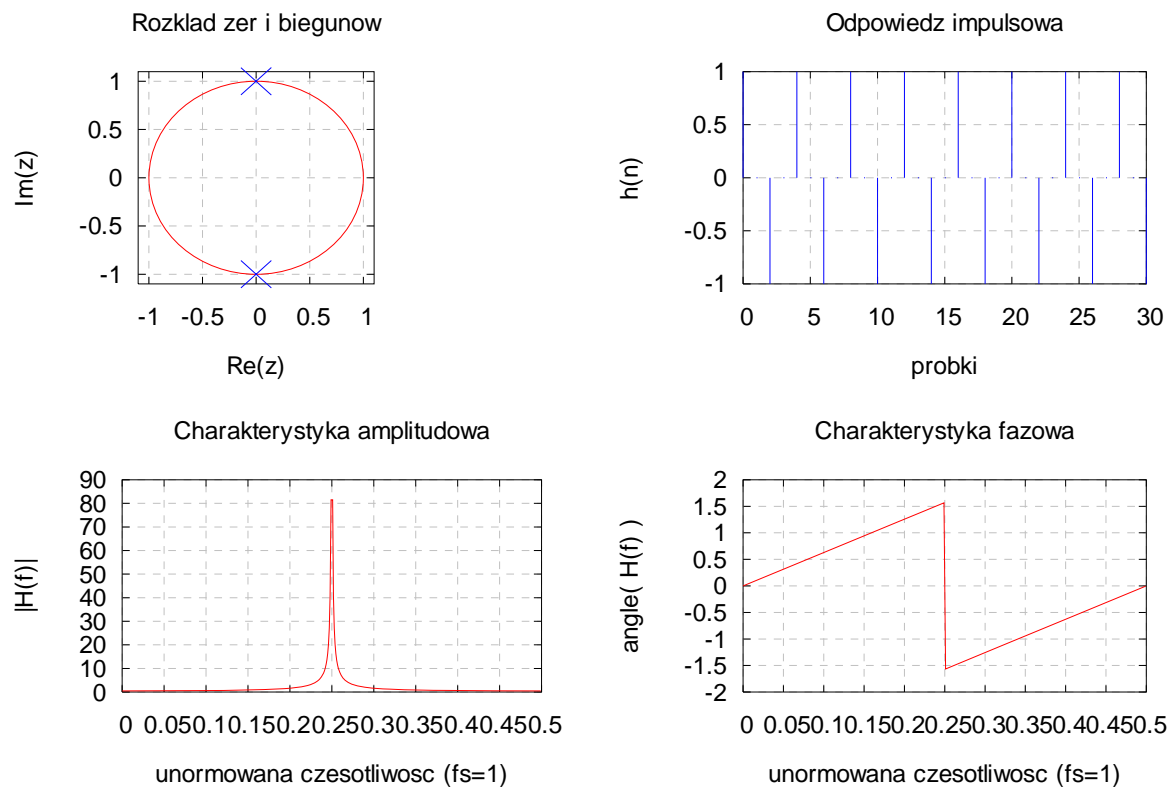


Rys. 11 Zobrazowanie zależności

b) Bieguny:

$$z_1 = 1i$$

$$z_2 = -1i$$



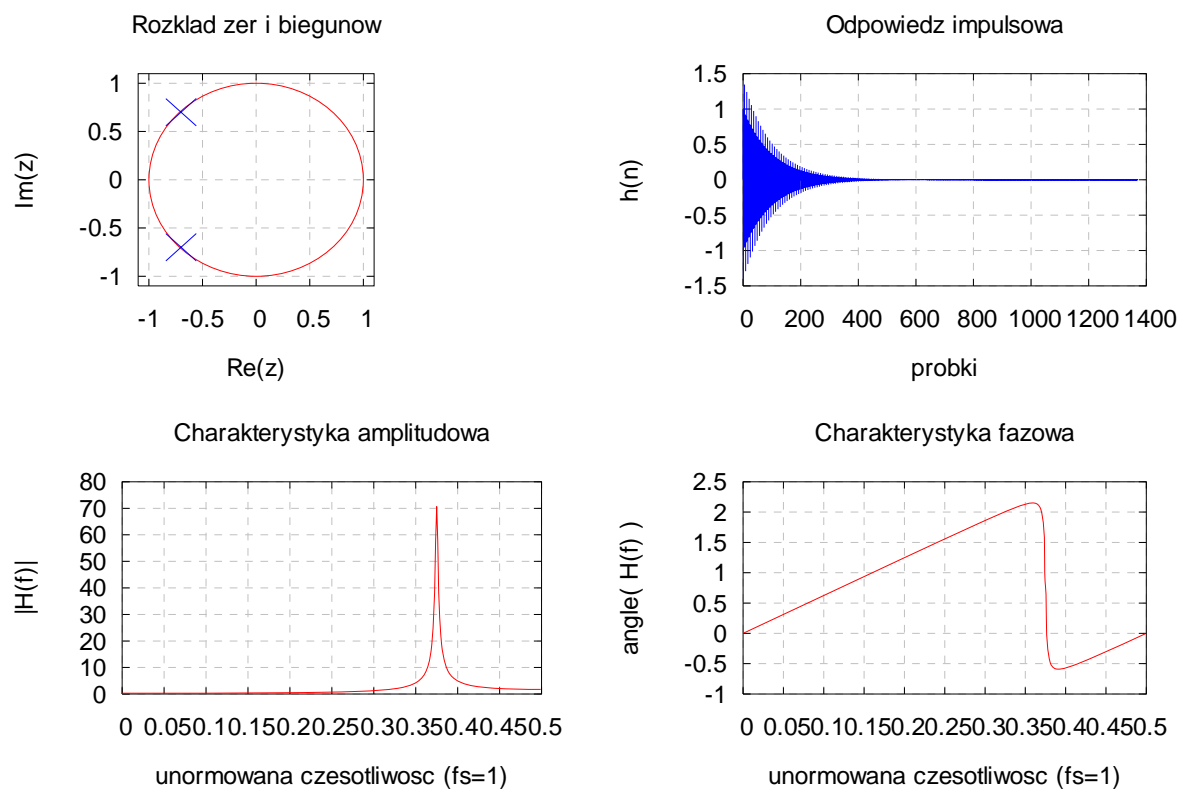
Rys. 12 Zobrazowanie zależności

d) w ujemnej półpłaszczyźnie

Bieguny:

$$z_1 = -0.75 + 0.75j$$

$$z_2 = -0.75 - 0.75j$$



Rys. 13 Zobrazowanie zależności

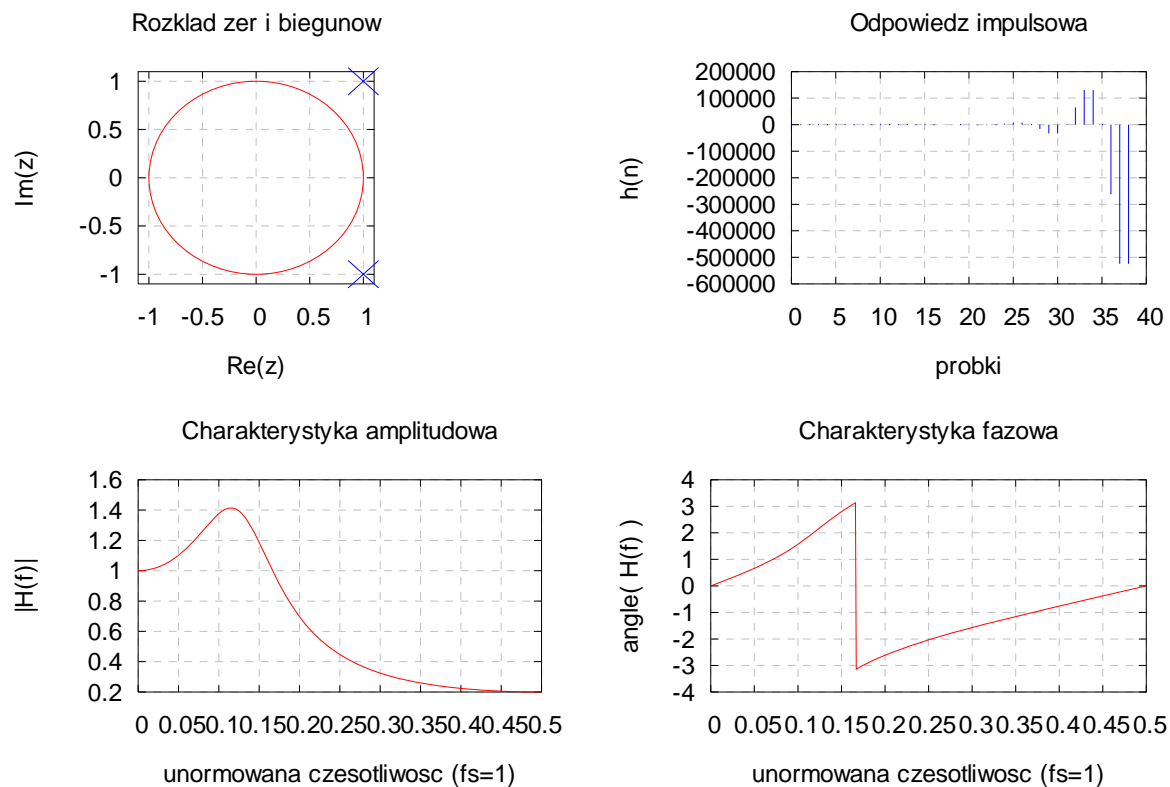
4.3 Bieguny poza kołem

a) w dodatniej półpłaszczyźnie

Bieguny:

$$z_1 = 1 + 1j$$

$$z_2 = 1 - 1j$$



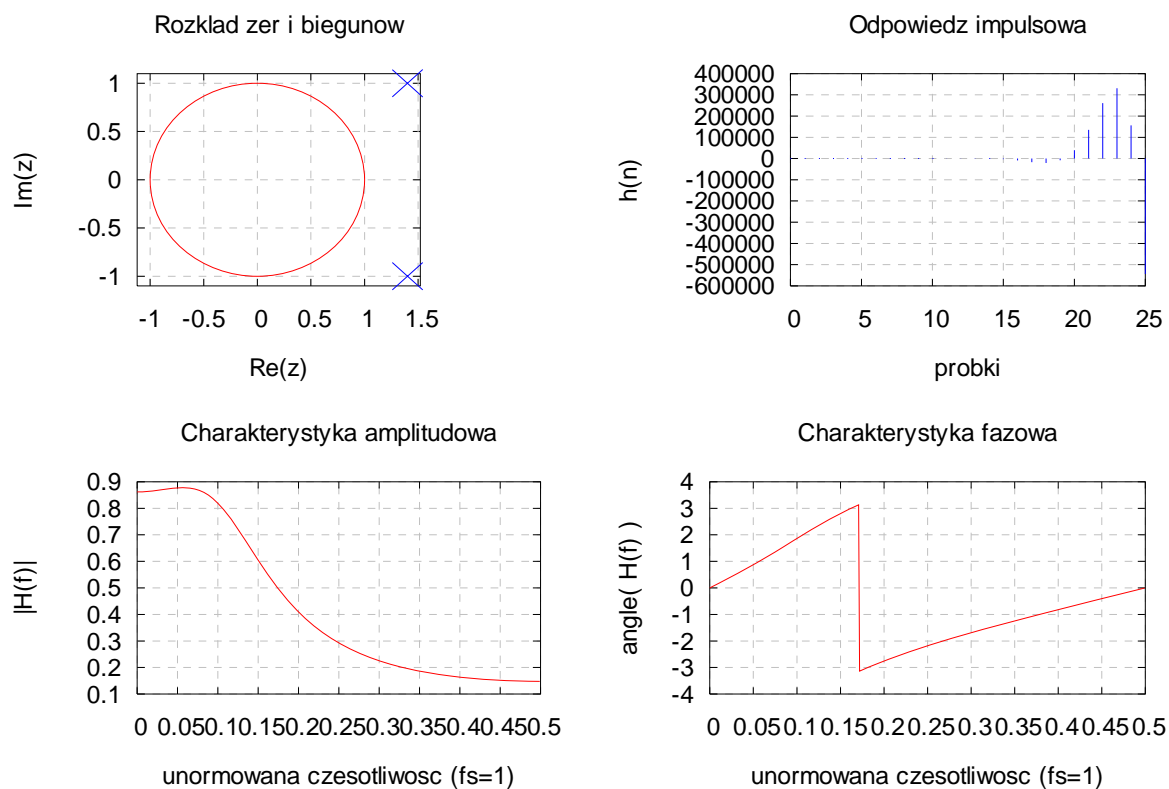
Rys. 14 Zobrazowanie zależności

b) w dodatniej półpłaszczyźnie

Bieguny:

$$z_1 = 1.4 + j$$

$$z_2 = 1.4 - j$$



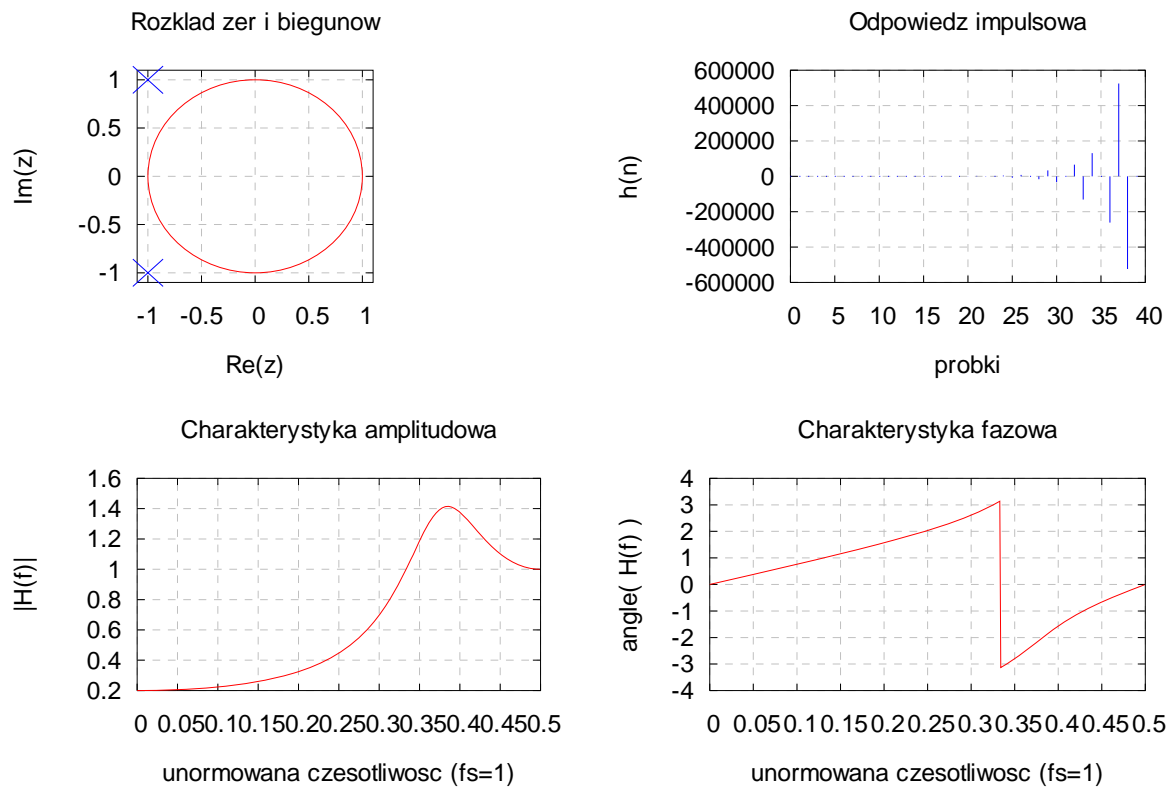
Rys. 15 Zobrazowanie zależności

c) w ujemnej półpłaszczyźnie

Bieguny:

$$z_1 = -1 + 1j$$

$$z_2 = -1 - 1j$$



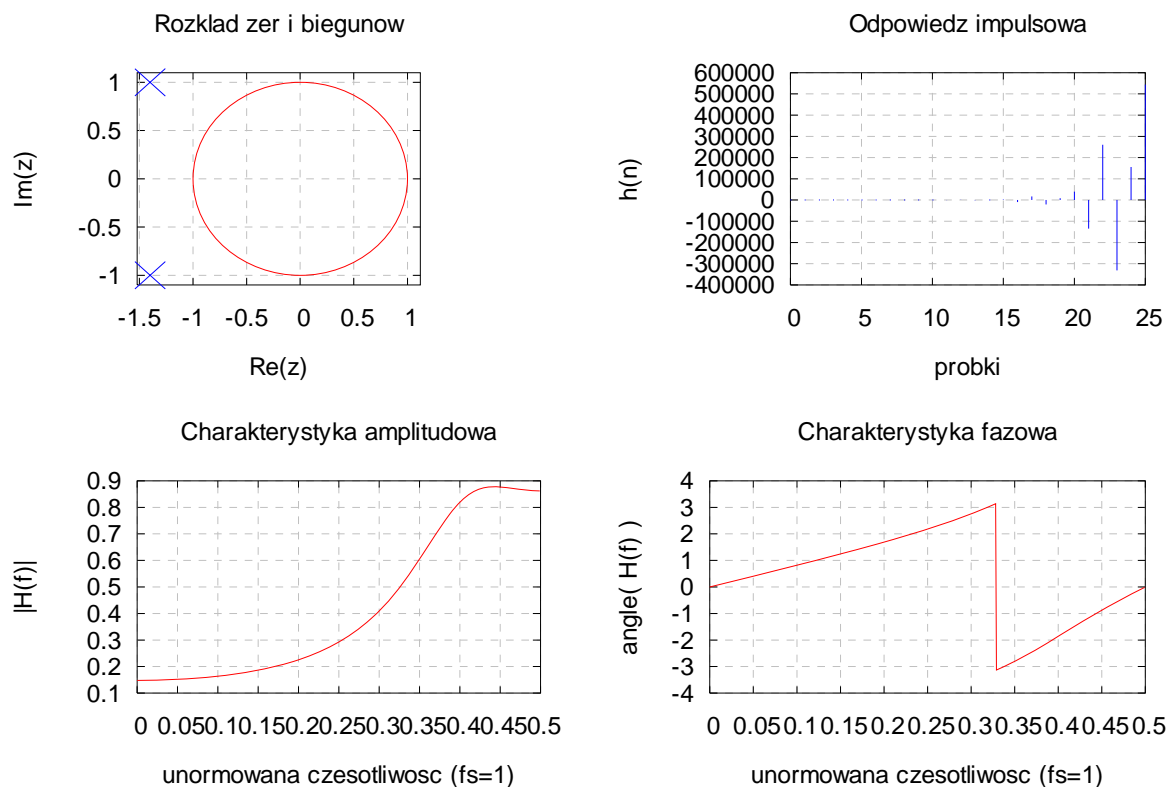
Rys. 16 Zobrazowanie zależności

d) w ujemnej półpłaszczyźnie

Bieguny:

$$z_1 = -1.4 + 1i$$

$$z_2 = -1.4 - 1i$$



Rys. 17 Zobrazowanie zależności

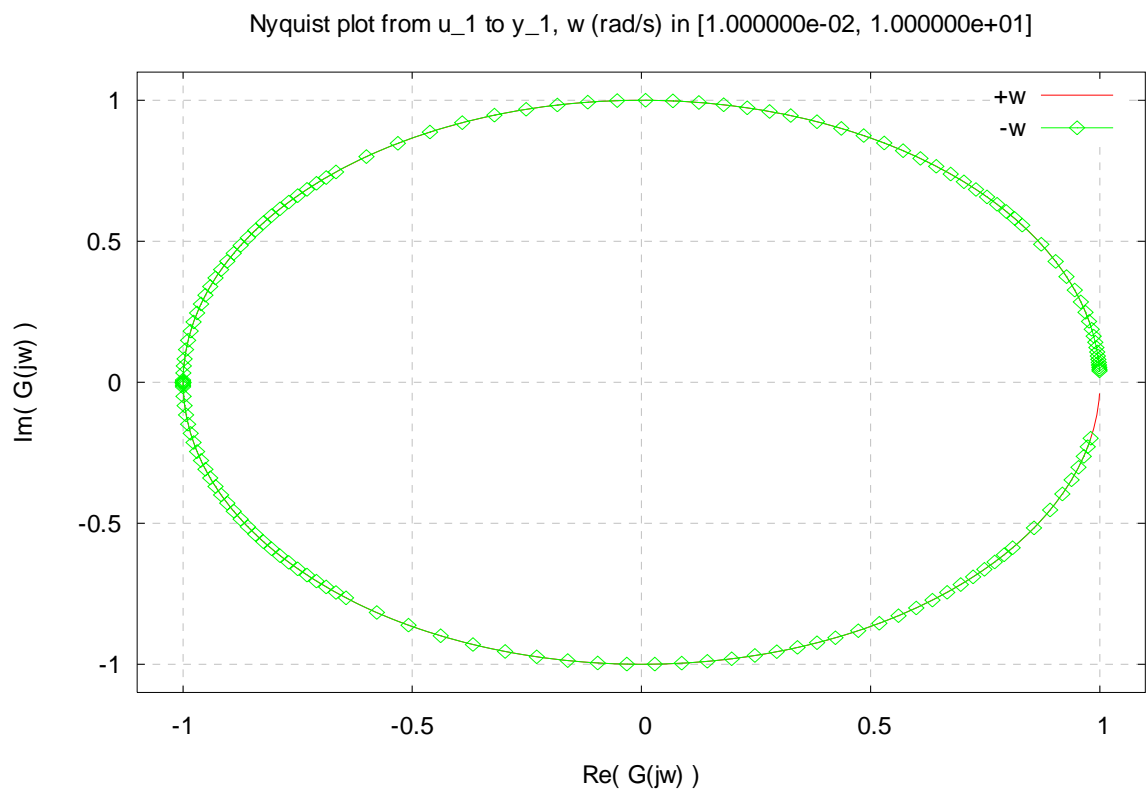
Na podstawie powyższych wykresów można stwierdzić kilka faktów, które mówią nam o właściwościach położenia biegunów sprzężonych. Dla biegunów leżących na kole jednostkowym następuje wzmocnienie częstotliwości, dla której są obliczone, a odpowiedź impulsowa jest funkcją malejącą eksponencjalnie do zera z pewnym przesterowaniem. Dla biegunów leżących wewnątrz koła bliżej zera ustalenie odpowiedzi impulsowej następuje szybciej. Odpowiedź impulsowa biegunów leżących poza kołem jednostkowym jest odpowiedzią funkcji, której amplituda dąży do nieskończoności. Dla małych kątów przepuszczane są niskie częstotliwości, a dla dużych kątów wysokie częstotliwości.

5. Charakterystyka częstotliwościowa danego układu

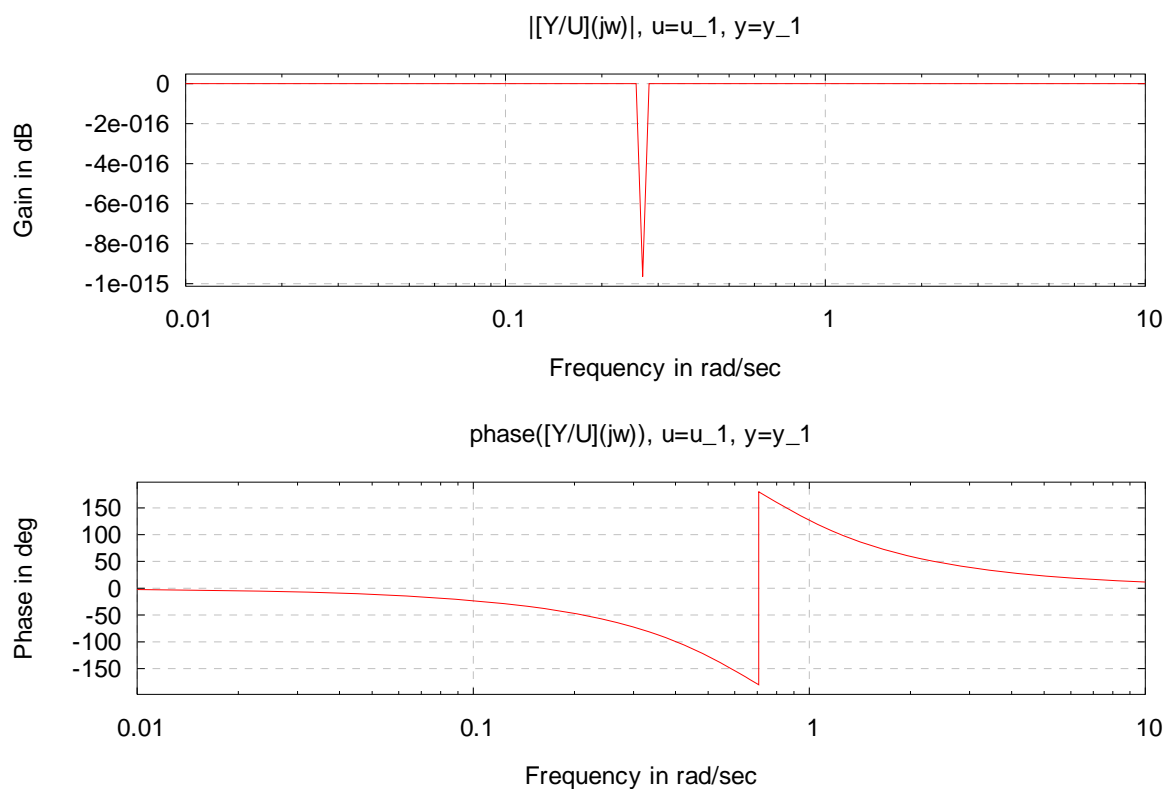
Dla transmitancji układu $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z^2 - z + 0.5}{z^2 + z + 0.5}$ zostaną wyznaczone

charakterystyki częstotliwościowe. Charakterystykami tymi będą, charakterystyka Bodego i Nyquista. Na podstawie tych charakterystyk można dowiedzieć się, w jaki sposób zachowuje się amplituda i faza sygnału przechodzącego przez układ o danej transmitancji. Ważną zaletą jest to, że wszystkie te zależności są w dziedzinie częstotliwości, co daje nam

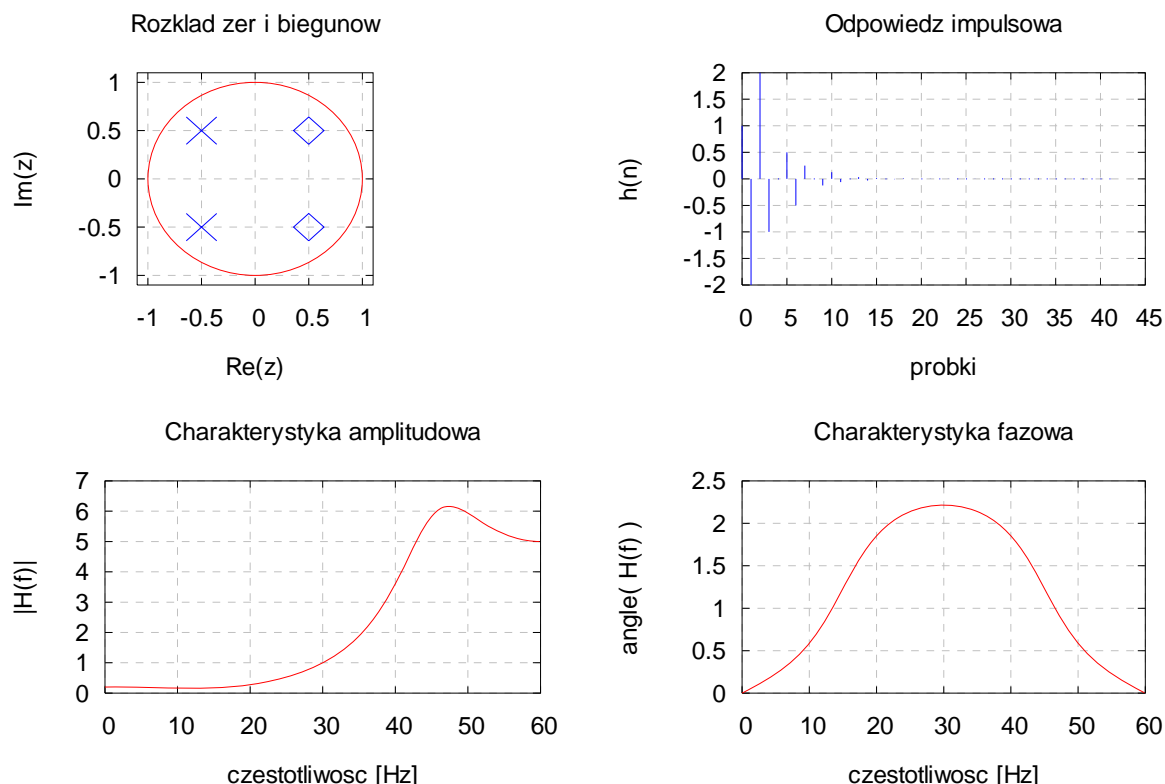
obraz parametrów układu w zależności od częstotliwości sygnału. Te zalety tej analizy są bardzo przydatne, np. w telekomunikacji, w automatyce.



Rys. 18 Charakterystyka Nyquista



Rys. 19 Charakterystyki Bodego

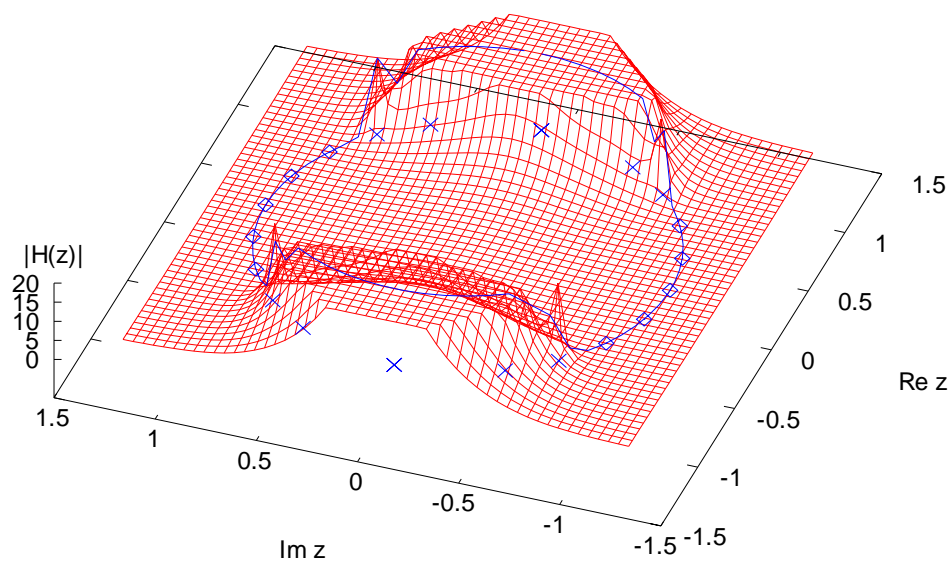


Rys. 20 Odpowiedź impulsowa i położenie biegunów

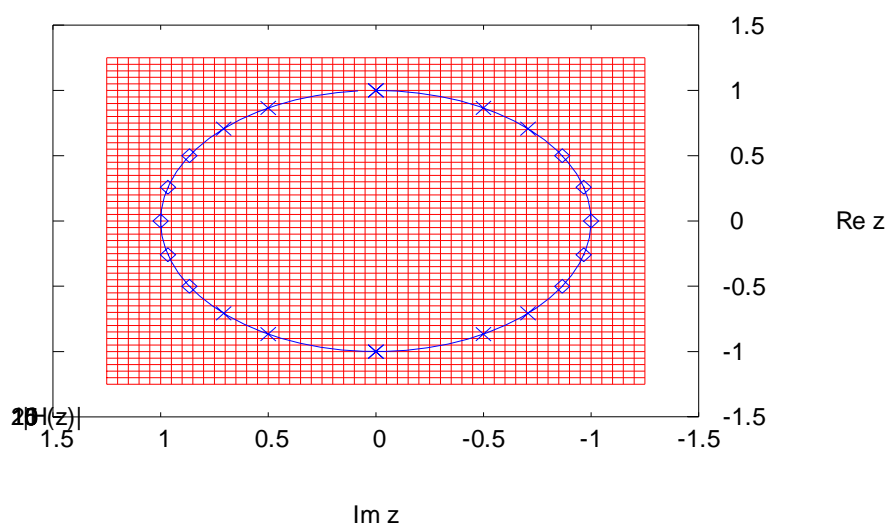
6. Projekt filtru

Należy zaprojektować filtr, który będzie przepuszczał częstotliwość w paśmie $20 \div 40$ Hz, dla częstotliwości próbkowania 120 Hz. Filtr taki można zaprojektować metodą zer i biegunów, tzn. ustawiając odpowiednio zera i bieguny transmitancji filtru względem okręgu jednostkowego i pod odpowiednim punktem. „Wyzerowanie” na wyjściu częstotliwość uzyskujemy po umieszczeniu zera transmitancji filtru na okręgu jednostkowym w punkcie określonym przez kąt $\varphi_z = \Omega_z = 2\pi(f_z / f_{pr})$. W związku z tym zero to jest równe: $z_z = e^{j\Omega_z} = e^{j2\pi(40/200)} = e^{j2\pi(0.25)}$. Aby wielomian licznika transmitancji posiadał współczynniki o wartościach rzeczywistych, transmitancja musi posiadać także zero sprzężone. Z kolei, aby filtr wzmacniał sygnał o zadanej częstotliwości, powinien posiadać bieguny wewnątrz okręgu jednostkowego, blisko punktu, związanego z tą częstotliwością, określonego przez kąt $\varphi_s = \Omega_s = 2\pi(f_s / f_{pr})$. W związku z tym biegun ten jest równy:

$p_s = e^{j\Omega_s} = e^{j2\pi(10/200)} = e^{j2\pi(0.02)}$. Aby wielomian mianownika transmitancji posiadał współczynniki o wartościach rzeczywistych, transmitancja musi posiadać także zero sprzężone.



Rys. 21 Zobrazowanie wzmacniania i tłumienia



Rys. 22 Położenie zer i biegunów