

Podstawy robotyki - wykład

-1-

dr hab. Ignacy Duleba, prof PWR

18 stycznia 2007

KOŁOKWIUM

materiał z wykładu? laboret

13:05 początek zajęć

wstęp do robotyki
podstawy robotyki

LITERATURA:

Craig → Introduction to robotics
M. Spong, M. Vidyasagar → -1-

Tchan, Jacek → Podstawy robotyki
Tchan, → Manipulatory i roboty mobilne

Journal of Robotics Systems → ~~specjalizacja~~

przegub (joint) - to, co się rusza w robocie

ogniwo (link) - to, co jest między przegubami

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i = x^T y \quad \text{iloczyn skalarny}$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2}$$

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \angle(x, y)$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

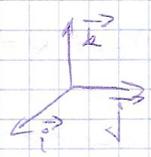
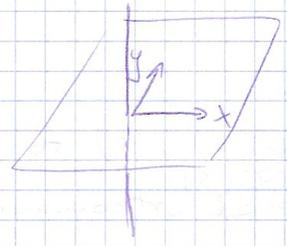
$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

iloczyn wektorowy
 $x \times y$

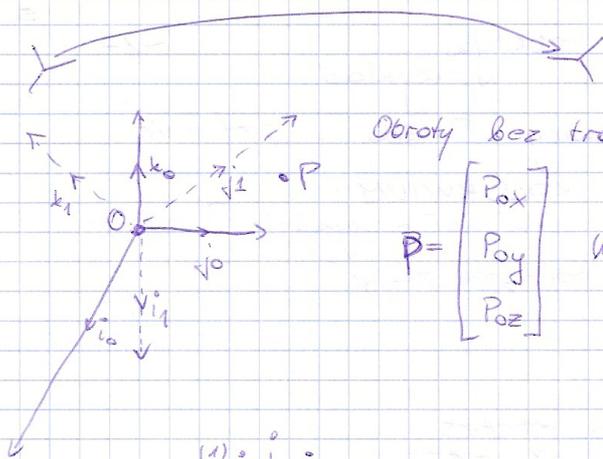
stosujemy układy prawoskrotne

$$\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot |\sin \angle(x, y)|$$



$x \times y = -y \times x$
antysymetryczne

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$



Obroty bez translacji: ∇

$$P = \begin{bmatrix} P_{0x} \\ P_{0y} \\ P_{0z} \end{bmatrix}$$

$$1) P = p_{0x} \cdot i_0 + p_{0y} \cdot j_0 + p_{0z} \cdot k_0$$

$$P = p_{1x} \cdot i_1 + p_{1y} \cdot j_1 + p_{1z} \cdot k_1$$

$$(1) \cdot i_0 =$$

$$(p_{0x} i_0 + p_{0y} j_0 + p_{0z} k_0) \cdot i_0 = p_{0x} \overbrace{i_0 \cdot i_0}^1 + p_{0y} \overbrace{i_0 \cdot j_0}^0 + p_{0z} \overbrace{i_0 \cdot k_0}^0 = p_{0x}$$

$$\begin{cases} p_{0x} = i_0 \cdot p_{1x} + j_0 \cdot p_{1y} + k_0 \cdot p_{1z} \\ p_{0y} = i_1 \cdot p_{1x} + j_1 \cdot p_{1y} + k_1 \cdot p_{1z} \\ p_{0z} = i_2 \cdot p_{1x} + j_2 \cdot p_{1y} + k_2 \cdot p_{1z} \end{cases} \quad P_1$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_0 \cdot i_1 & j_0 \cdot i_1 & k_0 \cdot i_1 \\ i_0 \cdot j_1 & j_0 \cdot j_1 & k_0 \cdot j_1 \\ i_0 \cdot k_1 & j_0 \cdot k_1 & k_0 \cdot k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{1z} \end{bmatrix}$$

$$P_0 = R_0^1 P_1 \quad \leftarrow R_0^1 \quad \text{Można zamienić indeksy 0 i 1, 1=0 to otrzymamy } R_1^0$$

rotation (z ukł. 1 do ukł. 0)

$$P_1 = R_1^0 P_0$$

$$R_0^1 R_1^0 = I_3$$

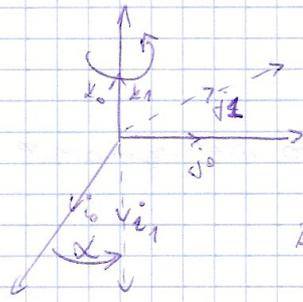
$$(R_0^1)^{-1} = R_1^0$$

$$1) \begin{cases} R^{-1} = R^T \\ (R_0^1)^{-1} = (R_0^1)^T \end{cases}$$

$$2) \det R = 1$$

Gdy macierz ma własności 1) i 2) to należy do grupy special orthogonal group

Macierze rotacji mają te własności

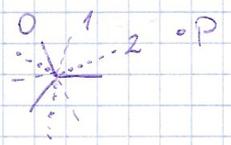


$$\text{Rot}(z, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(y, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(x, \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

$$\dim SO(3) = 3$$



$$p_0 = R_0^1 p_1$$

$$p_0 = R_0^2 p_2$$

$$p_2 = R_2^1 p_1$$

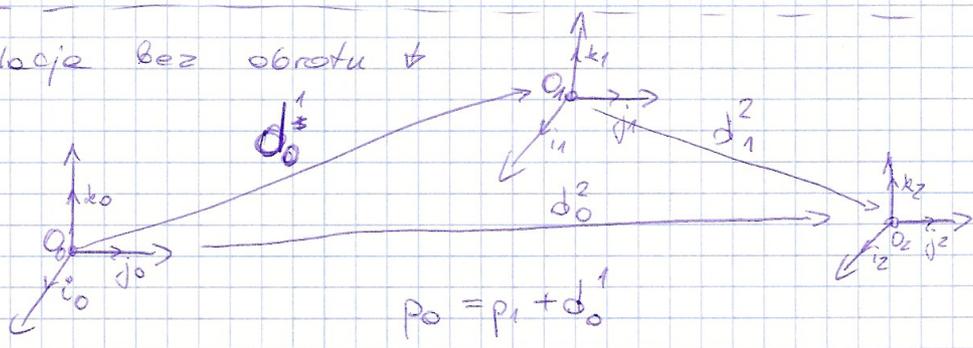
$$p_1 = R_1^2 p_2$$

$$p_1 = R_1^2 p_2 \quad p_0 = R_0^1 p_1$$

$$\left. \begin{array}{l} p_0 = R_0^1 R_1^2 p_2 \\ p_0 = R_0^2 p_2 \end{array} \right\} \Rightarrow R_0^2 = R_0^1 R_1^2$$

$$R_0^n = R_0^1 \cdot R_1^2 \cdot \dots \cdot R_{n-2}^{n-1} \cdot R_{n-1}^n$$

Translacija bez obrota



$$p_0 = p_1 + d_0^1$$

$$\begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1x} + d_0^1 x \\ p_{1y} + d_0^1 y \\ p_{1z} + d_0^1 z \end{bmatrix}$$

$$p_0 = d_0^2 + p_1 = d_0^1 + d_1^2 + p_2$$

czysty obrót $\rightarrow p_0 = R_0^1 p_1 + \mathbf{0} \leftarrow$ zero wielowymiarowe

czysta translacja $\hookrightarrow p_0 = I_3 p_1 + d_0^1$

Współrzędne jednorodne

$$p_0 = \begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \end{bmatrix} \rightarrow P_0 = \begin{bmatrix} p_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} R_0^1 & d_0^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} P_1$$

$\begin{matrix} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ 4 \times 1 & 1 \times 3 & 4 \times 1 \end{matrix}$

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^1 & d_0^1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$1 = 1$$

$$p_0 = R_0^1 p_1 + d_0^1$$

Gdy $\det R = 1$
 $R^{-1} = R^T$

$\text{Re } SO(3) \quad R = \begin{bmatrix} n & | & o & | & a \end{bmatrix}$

$\|n\| = \|o\| = \|a\| = 1$

→ 3 ograniczenia

$n \times o = a$

→ 3 ograniczenia

↳ jedno wektorowe daje 3 skalarne

niezależne

$\dim R = 3$

$P_0 = \begin{bmatrix} R_0^{-1} & d_0^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_1 \quad \theta = [0 \ 0 \ 0]$

$P_0 = \begin{bmatrix} P_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad P_1 = \begin{bmatrix} P_1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P_0 = T_0^{-1} \dots T_{n-2}^{-1} T_{n-1}^{-1} P_n$

$T \in SE(3)$

special Euclidean group

$\dim T = 6 = 3 + 3$



$\begin{bmatrix} \overline{c_\alpha} & 0 & \overline{s_\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\overline{s_\alpha} & 0 & \overline{c_\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

czysty obrót wokół osi Y

$\cos \alpha = c_\alpha$
 $\sin \beta = s_\beta$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & dx \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

translacja wzdłuż osi X

Parametryzacje $SO(3)$

a) kąty Eulera

$$Eul(\alpha, \beta, \gamma) =$$

$$= Rot(z, \alpha) Rot(y, \beta) Rot(z, \gamma)$$

← od lewej do prawej

b) kąty Roll-Pitch-Yaw
[roll-pitch-yaw]

$$RPY(\alpha, \beta, \gamma)$$

c) os'-kąt

ad a)

$$Eul(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (*)$$

$$\left. \begin{matrix} i & j & k \\ c_\gamma & s_\gamma & 0 \\ -s_\gamma & c_\gamma & 0 \end{matrix} \right\} = i \cdot 0 + j \cdot 0 + k \cdot 1 = [0, 0, 1]$$

$$(*) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & -s_\alpha & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta & c_\alpha & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ \\ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix}$$

Klasa przegubów:

G-klasa = liczba stopni swobody

V klasa

np. == pomocą 2 przegubów 5 klasy można zasymulować przegub 4 klasy

-2- 12.10.2006

Podział ogniw ze względu na sztywność:

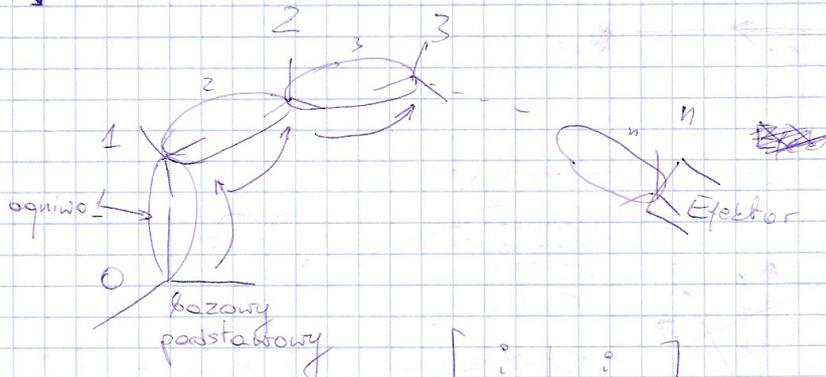
→ sztywne

→ elastyczne.

Podział pręgułów (ze wzgl. na sztywność)

→ sztywne

→ elastyczne ↪ np. sprężyna



$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

konfiguracja manipulatora

$$q = (q_1, \dots, q_n)^T$$

Denavit - Hartenberg 1955

$$T_0^n(q) = \prod_{i=1}^n T_{i-1}^i(q_i) = T_0^1(q_1) \cdot T_1^2(q_2) \cdot \dots \cdot T_{n-1}^n(q_n)$$

KINEMATYKA PROSTA wg Denavita - Hartenberga

Oś ruchu - zawsze "z"

- 1° Wybierz osie $z_0, \dots, z_{n-1} \rightarrow$ osie ruchu.
- 2° Wybierz układ podstawowy
- 3° Powtarzaj kroki 4- $i=1, \dots, n-1$
- 4° Wybierz O_i

(a) z_i przecina z_{i-1} to tam O_i

(b) $z_i \parallel z_{i-1}$ to wyznaczamy prostą normalną n_i^o do z_{i-1}, z_i O_i stawiamy, gdzie n_i^o przecina z_i

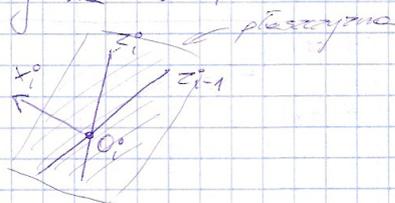


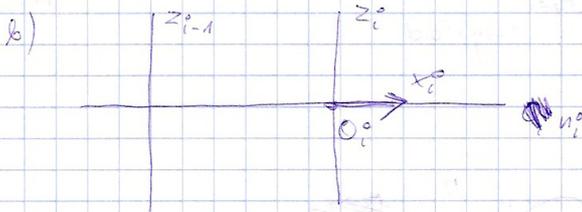
(c) $z_i \parallel z_{i-1}, O_i$ arbitralny na osi z_i

5° Określamy x_i^o

a) z_{i-1} przecina z_i

$x_i^o \perp z_{i-1} \wedge z_i$
 os x_i^o jest \perp do płaszczyzny wyznaczonej przez z_i, z_{i-1}



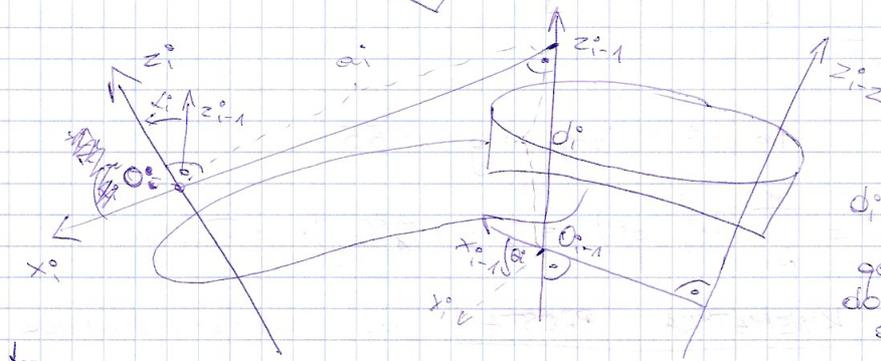
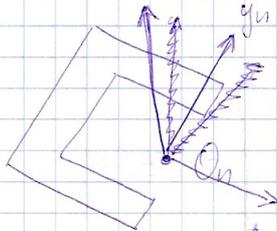
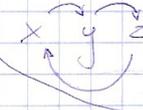


θ^0 Okreslamy y_i^0 , tak aby $y_i^0 = z_i^0 \times x_i^0$

kierunek
zwierciadla
palców

$$z_n \parallel z_{n-1}$$

$x_n \rightarrow$ tak, aby ukł. x_n, y_n, z_n był
prawy.



θ_i^0 - \angle między osią z_{i-1}^0 a x_i^0
mierzony wokół osi z_{i-1}^0

d_i - odległ. między pocz.
ukł. O_{i-1}^0 a miejscem
geom. gdzie pr. norm.
do osi z_{i-1}^0, z_i^0 przecina
os x_{i-1}^0

a_i - odległość między punktem powstałym tam
gdzie pr. norm. do z_{i-1}^0, z_i^0 przecina
os z_{i-1}^0 a początkiem ukł. O_i^0

α_i^0 - \angle między osią z_i^0 a z_{i-1}^0 mierzony wokół osi x_{i-1}^0

$$T_{i-1}^0 = \text{Rot}(z, \theta_i^0) \text{Trans}(z, d_i) \text{Trans}(x, a_i) \text{Rot}(x, \alpha_i^0)$$

Zmienną ruchu może być tylko θ_i^0 lub d_i , bo
osią ruchu jest "z"



W zależności od typu ruchu (przegub, przesuwⁿⁱ) może być

przegub obrotowy - θ_i^0

-r- translacyjny - d_i

n - liczba stopni
swobody manipulatora

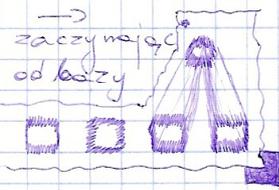
L_p	θ_i^0	d_i	a_i	α_i^0
1	$\neq(q_1)$			
2		$\neq(q_2)$		
3	$\neq(q_3)$			
...				
n				

-2-
19.10.2006

Luke

$$R^5 T^1$$

$$R^2 T^1 R^3$$



$$T_0^n(q) = \prod_{i=1}^n T_{i-1}^i(q_i)$$

Ruch w przestrzeni R^3

$$Tr(x, a) = T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Tr(y, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Tr(x, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(x, \alpha) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Rot(z, \beta) = \begin{matrix} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_\beta & -s_\beta & 0 & 0 \\ s_\beta & c_\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Rot(y, \gamma) = \begin{matrix} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_\gamma & 0 & s_\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\gamma & 0 & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

→
domnożenie w normalną stronę (złożenia ruchów) os bieżąca

←
do reprezentacji Roll-Pitch-Yaw

Własności macierzy obrotów:

a) $R^{-1} = R^T$

b) $\det R = +1$

Roll - Pitch - Yaw

$$RPY(\alpha, \beta, \gamma) = Rot(z, \alpha) Rot(y, \beta) Rot(x, \gamma) = Rot(z, 45^\circ) Rot(y, 90^\circ) Rot(x, 30^\circ)$$

$$RPY(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przy mnożeniu macierzy samych rotacji można się zwrócić do podmacierzy 3x3.

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

zpr.

$$R \cdot R^T = I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

r_i - kolumny
↪ wersor jedn.

$$R = \begin{bmatrix} | & | & | \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|r_1\| = \|r_2\| = \|r_3\| = 1 \quad \text{Toż samo dla.} \\ \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{r}_3 \\ \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 = -\vec{r}_1 \\ \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 = \vec{r}_2 \end{array} \right.$$

$$\|r_2\| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \hat{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \hat{k}(a_x b_y - a_y b_x) =$$

$$= \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \hat{j}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \hat{k} \cdot 0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{r}_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \cdot 0 + \hat{j} \cdot 0 + \hat{k} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{r}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \hat{j} \frac{\sqrt{2}}{2} + \hat{k} \cdot 0 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & 0 \\ s_x & c_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & 0 \\ s_x & c_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & x \\ s_x & c_x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & x \\ s_x & c_x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P_1 = \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & x \\ s_x & c_x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = K_0^{-1} P_1$$

jakie
składowe

translacja jednego układu wzgl. drugiego (innego)
(T)

$$K_a^b = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wektor przesunięcia od początku układu a do początku układu b.

$$K = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & T_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} R_1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K K^{-1} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K K^{-1} = \begin{bmatrix} R R_1 + T \cdot 0 & R T_1 + T \\ 0 \cdot R_1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot T_1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R R_1 & R T_1 + T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & 0 \\ s_x & c_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & 0 \\ s_x & c_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & x \\ s_x & c_x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & x \\ s_x & c_x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & x \\ s_x & c_x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = K_0^{-1} P_1$$

jakie
składowe

translacja jednego układu wzgl. drugiego (innego)
(T)

$$K_a^b = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wektor przesunięcia od początku układu a do początku układu b.

$$K = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & T_{3 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} R_1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K K^{-1} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K K^{-1} = \begin{bmatrix} R R_1 + T \cdot 0 & R T_1 + T \\ 0 \cdot R_1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot T_1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R R_1 & R T_1 + T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} / R R_1 = I_3$$

$$R^{-1} R R_1 = R^{-1} I_3$$

$$I_3 R_1 = R^{-1} I_3$$

$$R_1 = R^{-1} = R^T$$

$$R_1 = R^T$$

$$R T_1 + T = 0$$

$$R^{-1} / R T_1 = -T$$

$$R^{-1} R T_1 = R^{-1} (-T)$$

$$T_1 = -R^{-1} T = -R^T T$$

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dane: R

Chcemy znaleźć reprezentacje (lokalne):

- 1) kąty Eulera $R_z R_y R_z$ - wzgl. osi ustalonych
- 2) kąty ~~RPR~~ RPY $R_z R_y R_x$ - wzgl. osi ustalonych
- 3) os kąt

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = R_{z,\alpha} R_{y,\beta} R_{z,\gamma} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix}$$

$$1^\circ \quad c_\beta = 0 \Rightarrow \beta = +90^\circ \text{ lub } -90^\circ$$

założenie

lokalne, niejednoznaczne

$$\beta = +90^\circ \quad c_\beta = 0 \quad s_\beta = 1$$

$$E(\alpha, 90^\circ, \gamma) = \begin{bmatrix} -s_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\gamma & c_\alpha \\ c_\alpha s_\gamma & c_\alpha c_\gamma & s_\alpha \\ -c_\gamma & s_\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -c_\gamma = -1 \\ s_\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_\gamma = 1 \\ s_\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\underline{\underline{\gamma = 0}}$$

$$E(\alpha, 90^\circ, 0^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -s_\alpha & c_\alpha \\ 0 & c_\alpha & s_\alpha \\ \cancel{1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-s_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad c_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$s_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad c_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$s_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad c_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Downarrow \\ \alpha = 135^\circ$$

$$E(135^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$$

Alternatywne
2° $c_\beta = 0 \Rightarrow \beta = -90^\circ$

$$c_\beta = 0 \quad s_\beta = -1$$

$$E(\alpha, -90^\circ, \gamma) = \begin{bmatrix} -s_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\gamma & -c_\alpha \\ c_\alpha s_\gamma & c_\alpha c_\gamma & -s_\alpha \\ c_\gamma & -s_\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_\gamma = -1 \quad s_\gamma = 0$$

$$\Downarrow \\ \gamma = 180^\circ$$

$$E(\alpha, -90^\circ, 180^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & s_\alpha & -c_\alpha \\ 0 & -c_\alpha & -s_\alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -c_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-s_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad -c_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$s_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad c_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = -45^\circ$$

Gdy sprzeczne r-wia
to znaczy, że nie
ma alternatywnego
rozr.

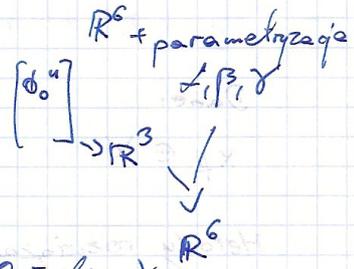
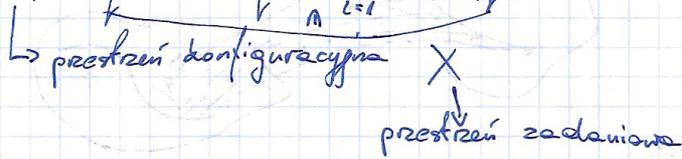
Spong Videosager
Dynamika i sterowanie robotów

Podstawy robotyki - wykład

26.10.2006

Kinematyka prosta

$$Q \ni q \rightarrow \downarrow(q) = \prod_{i=1}^n T_{i-1}^i(q_i) \in SE(3) = \begin{bmatrix} R_0^n & d_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$\dim Q = n$ $\dim X \leq 6$ $\dim X = m$

Robot jest nieredundantny wtedy gdy $\dim Q = \dim X$
 — — — — — redundantny (nadmiarowy) gdy $\dim Q > \dim X$

$$T = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

$$TT^{-1} = I_4$$

$$\begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Ra + dc = I_3 \\ Rb + de = 0^T \end{cases}$$

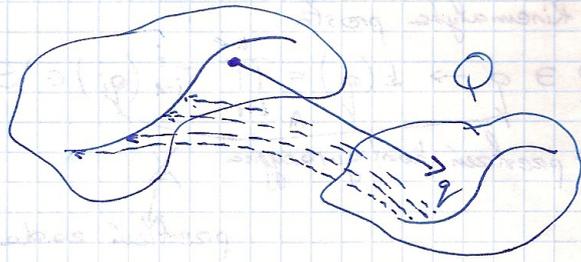
$$\begin{cases} Qa + 1c = 0 \Rightarrow c = 0 = [0 \ 0 \ 0] \\ 0 \cdot b + 1e = 1 \Rightarrow e = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ra = I_3 \Rightarrow a = R^{-1} = R^T \\ Rb = -d \cdot R^{-1} \\ R^{-1}Rb = -R^{-1}d \\ I_3 b = -R^{-1}d = -R^T d \end{cases}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odwrotne zadanie kinematyki: X

- a) punktowe \uparrow
- b) "trajektoryjne" \dashrightarrow



Dane:

$$x_f \in X$$

Znaleźć:

$$q^*: \downarrow (q^*) = x_f$$

Metody rozwiązywania:

a) analityczna

$$x_f = \prod_{i=1}^n A_i(q_i)$$

T_{i-1}^i	ile równań	\downarrow	P
	12	x_f	$A_1(q_1) \dots A_n(q_n)$
$A_i^{-1}(q_i)$	12	$A_1^{-1}(q_1)x_f$	$A_2(q_2) \dots A_n(q_n)$
	12	$A_2^{-1}(q_2)A_1^{-1}(q_1)x_f$	$A_3(q_3) \dots A_n(q_n)$
	12	$A_n^{-1}(q_n) \dots A_1^{-1}(q_1)x_f$	$A_n(q_n)$

Wady:

- trudna do liczenia

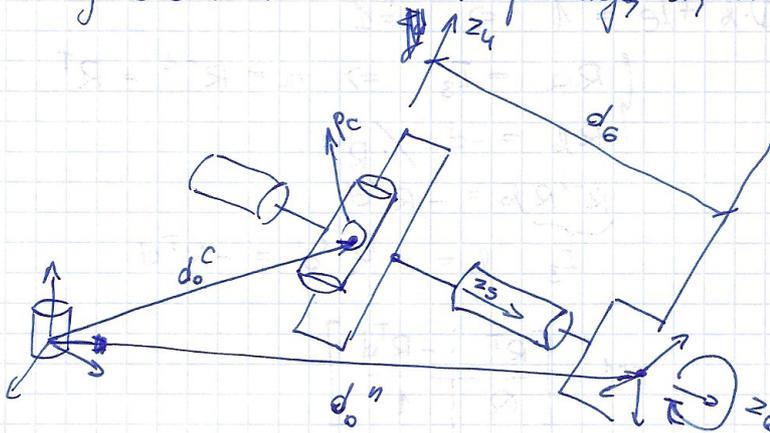
Zalety:

- analityczna
(wynikiem jest wzór!)

Ilość równań: $12 \cdot n$

b) odspęszczające kinematyczne

* trzy osie w mikro ruchach przecinają się w jednym punkcie



$n=6$

$$x_f = \begin{bmatrix} R_0^6 & d_0^6 \\ \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0^6 \\ \phi \end{bmatrix}$$

$$P_c = d_0^6 - \begin{bmatrix} d_6 R_0^6 \vec{k} \end{bmatrix}$$

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ten wzór jest prawdziwy dzięki *

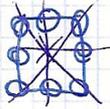
$$T_0^3 = \begin{bmatrix} R_0^3(q_1, q_2, q_3) & d_0^3(q_1, q_2, q_3) = p_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2) \quad p_c = d_0^3(q_1, q_2, q_3)$$

↓
3 ymm

$$T_0^6(q) = \begin{bmatrix} R_0^6 & d_0^6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↓ wyliczamy
 Q_1, Q_2, Q_3

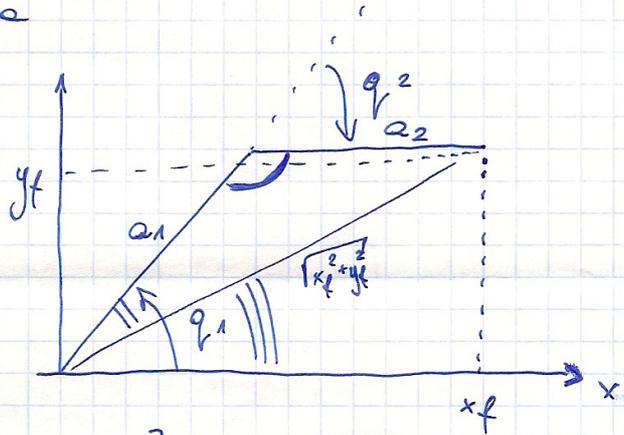


$$R_0^6 = R_0^3 R_3^6$$

Q_4, Q_5, Q_6

$$R_3^6 = (R_0^3)^T R_0^6$$

c) geometryczna



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{bmatrix}$$

$$c_1 \triangleq \cos q_1$$

$$c_{12} \triangleq \cos(q_1 + q_2)$$

$$x_f = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \end{bmatrix}$$

Q_1, Q_2

Kinematyka prosta

$q \rightarrow y$ (położenie i orientacja chwytaka)

Automatyka

(1) $\dot{x} = Ax + Bu \rightarrow \begin{matrix} u & \xrightarrow{(1)} & x & \xrightarrow{(2)} & y \\ \text{we stan} & & \text{stan} & & \text{wy} \end{matrix}$

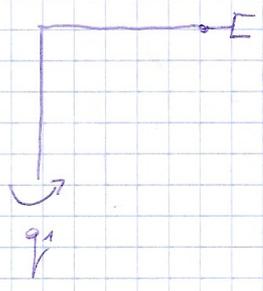
(2) $y = C^T x$

Robotyka

(1) $M \cdot \ddot{q} + C \dot{q} + G + T = u$ - dynamika

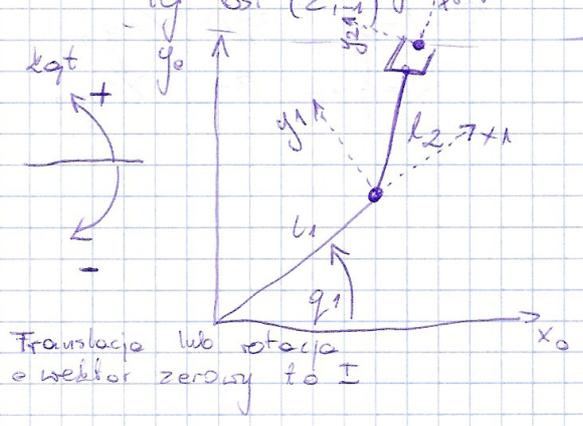
$u \xrightarrow{(1)} q \xrightarrow{(2)} y$
 we stan \uparrow wy

(2) $y = k(q)$ - kinematyka prosta



Notacja Denavit - Hartenberg (minimalna liczba transformacji)

1. Lokalny układ współrzędnych związany z i-tym stopniem swobody mocujemy NA KONCU (tego stopnia swobody)
2. Należy wybrać os Z_{i-1} w taki sposób, aby ruch w i-tym stopniu swobody był możliwy do wykonania względem tej osi (Z_{i-1})



Me we osi y_0 !

$$A_i^0(q_i) = A_{i-1}^0 = R_z Tr_z Tr_x R_x$$

$$A_1(q_1) = Rot(z, q_1) Tr(x, l_1)$$

$$A_2(q_2) = Rot(z, q_2) Tr(x, l_2)$$

$$K = A_1(q_1) \cdot A_2(q_2) \cdot \dots \cdot A_n(q_n)$$

Translacja lub rotacja o wektor zerowy to I

$$\cos q_i = c_i^o$$

$$\sin q_i = s_i^o$$

$$\cos(q_i^o + q_j^o) = c_{ij}^o$$

$$\sin(q_i^o + q_j^o) = s_{ij}^o$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & c_1 l_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & s_1 l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = A_1 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & c_1 l_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & s_1 l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 c_2 & 0 & c_1 c_2 l_2 - s_1 c_2 l_2 + c_1 l_1 \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 & -s_1 s_2 & 0 & s_1 c_2 l_2 + c_1 s_2 l_2 + s_1 l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c|c} c_1 c_2 & -s_1 c_2 & 0 & c_1 c_2 l_2 - s_1 c_2 l_2 + c_1 l_1 \\ s_1 c_2 + c_1 s_2 & -s_1 s_2 & 0 & s_1 c_2 l_2 + c_1 s_2 l_2 + s_1 l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sin(\alpha + \beta) = s_\alpha c_\beta + c_\alpha s_\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = c_\alpha c_\beta - s_\alpha s_\beta$$

redukowane

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} c_{12} & -s_{12} & 0 & c_{12} l_2 + c_1 l_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & s_{12} l_2 + s_1 l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$T = \begin{pmatrix} c_{12} l_2 + c_1 l_1 \\ s_{12} l_2 + s_1 l_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{matrix}$$

$$R_{ot}(z, q_1 + q_2)$$

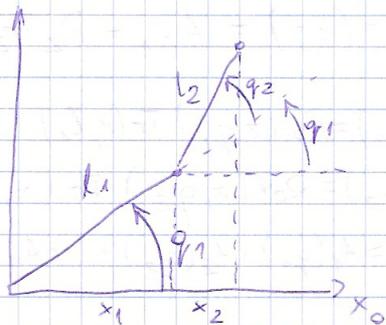
$$RPY = R_z R_y R_x = R_z, q_1 + q_2$$

$$\alpha = q_1 + q_2$$

$$E = R_z R_y R_z = R_z, q_1 + q_2$$

$$\text{np. } \alpha = q_1 \quad \beta = 0 \quad \gamma = q_2$$

$$\alpha = q_1 + q_2 \quad \beta = 0 \quad \gamma = q_2$$



$x = x_1 + x_2$

~~$x_2 = \dots$~~

-2-

$$\frac{x_1}{l_1} = \cos q_1 = c_1$$

↓

$$x_1 = c_1 l_1$$

$$\frac{x_2}{l_2} = \cos(q_1 + q_2) = c_{12}$$

↓

$$x_2 = c_{12} l_2$$

Rowiczek

1-szy stopień swobody Θ_1 (obrot kolumny)

$A_1(\Theta_1) = \text{Rot}(z, q_1) \cdot \text{Rot}(x, -90^\circ)$

$A_2(\Theta_2) = \text{Rot}(z, \Theta_2 - 90^\circ) \cdot \text{Tr}(x, d_1)$

$A_3(\Theta_3) = \text{Rot}(z, \Theta_3) \cdot \text{Tr}(x, d_2)$

$A_4(\Theta_4) = \text{Rot}(z, \Theta_4) \cdot \text{Tr}(x, d_3)$

c lub s
-90°

$$\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

~~A_{12}~~

$$A_{12} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & d_1 s_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & -d_1 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & d_1 c_1 s_2 \\ s_1 s_2 & c_2 s_1 & c_1 & d_1 s_1 s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & d_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\sin(\Theta_2 + 90^\circ) = \sin \Theta_2 \cdot \cos(-90^\circ) + \sin(-90^\circ) \cos \Theta_2 = -1 \cdot c_2 = -c_2$

$\sin(\alpha \pm 90^\circ) = \pm \cos \alpha$
 $\sin(\alpha \pm 270^\circ) = \mp \cos \alpha$

$\sin(\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha$ $\cos(\alpha - 90^\circ) = \sin \alpha$
 $\sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos \alpha$
 $\sin(\alpha + 270^\circ) = -\cos \alpha$
 $\sin(\alpha - 270^\circ) = \cos \alpha$

$$A_2 = \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & d_1 s_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & -d_1 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{34} = \begin{bmatrix} c_{34} & -s_{34} & 0 & c_{34} d_3 + c_3 d_2 \\ -s_{34} & c_{34} & 0 & s_{34} d_3 + s_3 d_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$K = \underbrace{A_1}_{A_{12}} \underbrace{A_2}_{A_{24}} \underbrace{A_3}_{A_{34}} \underbrace{A_4}_{A_{44}}$

To, co liczymy na pocz.

$R_x \bar{T}_x R_z \bar{T}_x$

$q_1 \Rightarrow \Theta_3$
 $q_2 \Rightarrow \Theta_4$

$l_1 \Rightarrow d_2$
 $l_2 \Rightarrow d_3$

$$A_{12} A_{34} = \begin{bmatrix} c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & d_1 c_1 s_2 \\ s_1 s_2 & c_2 s_1 & c_1 & d_1 s_1 s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & d_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{34} & -s_{34} & 0 & c_{34} d_3 + c_3 d_2 \\ s_{34} & c_{34} & 0 & s_{34} d_3 + s_3 d_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (*)$$

$$(*) = \begin{bmatrix} c_1 s_{234} & c_1 c_{234} \\ s_1 s_{234} & s_1 c_{234} \\ c_{234} & -s_{234} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(*) = \begin{bmatrix} c_1 s_2 c_{34} - c_1 c_2 s_{34} & -c_1 s_2 s_{34} + c_1 c_2 s_{34} & -s_1 & c_1 s_2 (c_{34} d_3 + c_3 d_2) + c_1 c_2 (s_{34} d_3 + s_3 d_2) + d_1 c_1 s_2 \\ s_1 s_2 c_{34} - c_2 s_1 s_{34} & -s_1 s_2 s_{34} + c_2 s_1 c_{34} & c_1 & s_1 s_2 (c_{34} d_3 + c_3 d_2) + c_2 s_1 (s_{34} d_3 + s_3 d_2) + d_1 s_1 s_2 \\ c_2 c_{34} + s_2 s_{34} & -c_2 s_{34} - s_2 c_{34} & 0 & c_2 (c_{34} d_3 + c_3 d_2) - s_2 (s_{34} d_3 + s_3 d_2) + d_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_{CH} = c_1 \left[d_1 s_2 + d_2 \underbrace{(s_2 c_3 + c_2 s_3)}_{s_{23}} + d_3 \underbrace{(s_2 c_{34} - c_2 s_{34})}_{s_{234}} \right] = c_1 \left[d_1 s_2 + d_2 s_{23} + d_3 s_{234} \right]$$

$$y_{CH} = s_1 \left[d_1 s_2 + d_2 s_{23} + d_3 s_{234} \right]$$

$$z_{CH} = d_1 c_2 + d_2 (c_2 c_3 - s_2 s_3) + d_3 (c_2 c_{34} - s_2 s_{34}) = d_1 c_2 + d_2 c_{23} + d_3 c_{234}$$

Identyfikacja parametryczna

dynamika IRB-1400



budowanie modelu (adekwatnego - musi być wystarczająco dużo parametrów, może być więcej)



n - liczba nieznanymi parametrów

Czyli musimy mieć n liniowo niezależnych równań aby to wyznaczyć.

n liniowo niezależnych funkcji w dziedzinie czasu (bo mamy r-nie różniczkowe)

$$u = a_1 f_1(q_1) + a_2 f_2(q_1, \dot{q}_1) + a_3 f_3(q) + a_4 f_4(q_4) + \dots$$

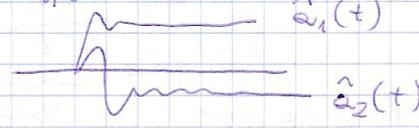
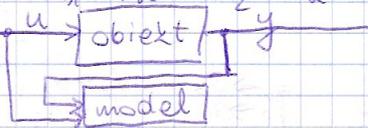
↑ bezwładności ↑ Coriolisa ↑ grawit
↑ tarcie

f_i - są znane ↑
 a_i - NIEZNANE ↑

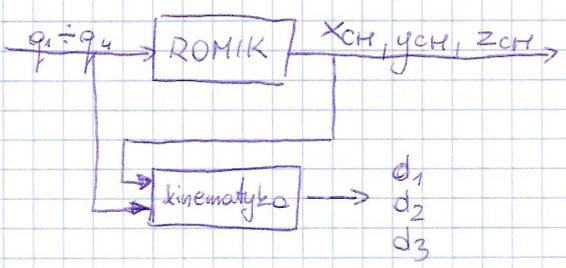
wart. ustalona

$$u = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + \dots + A_n \sin n\omega t$$

Tak długo podaneć sin na "we", aż na wyjściu ustali



chwytaka (punkt pracy)



$$\begin{aligned}
 q_1 &= \theta_1 \\
 q_2 &= \theta_2 \\
 q_3 &= \theta_2 + \theta_3 \\
 q_4 &= \theta_2 + \theta_3 + \theta_4
 \end{aligned}$$

liniowe użycie parametrów

$$\begin{aligned}
 x_{CH} &= c_{q_1} (d_3 s_{q_4} + d_2 s_{q_3} + d_1 s_{q_2}) \\
 y_{CH} &= s_{q_1} \\
 z_{CH} &=
 \end{aligned}$$

q_1	0
q_2	0
q_3	90°
q_4	90°
x_{CH}	285 [mm]
y_{CH}	0
z_{CH}	205

$$\begin{aligned}
 x_{CH} &= 285 = 1(d_3 \cdot 1 + d_2 \cdot 1 + d_1 \cdot 0) \\
 y_{CH} &= 0 = 0 \\
 z_{CH} &= 205 = d_3 \cdot 0 + d_2 \cdot 0 + d_1 \cdot 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 285 &= d_3 + d_2 \quad \leftarrow \text{rozdzielić tę sumę} \\
 205 &= d_1
 \end{aligned}$$

! Te równania nie są niezależne.

$$\begin{aligned}
 x_{CH} &= 261,57 \\
 y_{CH} &= 0 \\
 z_{CH} &= 261,57
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_1 &= 0 \\
 q_2 &= 0 \\
 q_3 &= 90^\circ \\
 q_4 &= 45^\circ
 \end{aligned}$$

~~ZAD~~ ZAD DOM

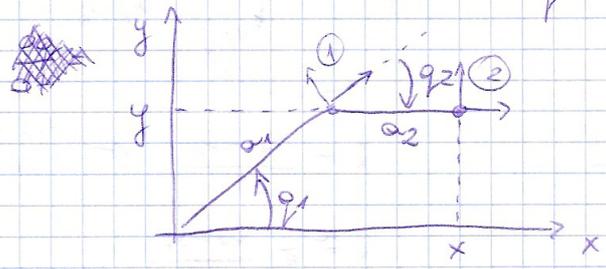
$$Q \ni q \mapsto k(q) \in X \subset SE(3)$$

Metoda Newtona

$$x = k(q), \quad \dot{x} = \frac{\partial k}{\partial q} \frac{dq}{dt} = J(q) \dot{q}$$

macierz
Jakobiego

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \dot{q} \\ \frac{d^2q}{dt^2} &= \ddot{q} \end{aligned} \right\}$$



$$T_0^1 = Rot(z, q_1) Tran(x, a_1)$$

$$T_1^2 = Rot(z, q_2) Tran(x, a_2)$$

$$T_0^2 = T_0^1 T_1^2$$

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

$c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$
 $s_{12} = \sin(q_1 + q_2)$

$$x = k(q) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{bmatrix}$$

$$k(q) = \begin{bmatrix} k_1(q) \\ \vdots \\ k_m(q) \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad n \geq m$$

$$\dot{x} = \frac{\partial k}{\partial q} \dot{q}$$

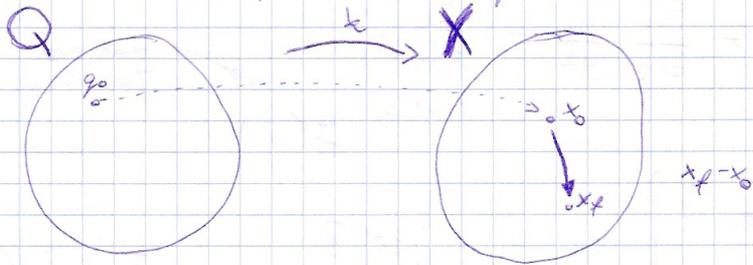
$(m \times 1)$ $(m \times n)$ $(n \times 1)$

$$\frac{\partial k}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial q_1} & \frac{\partial k_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial k_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial k_2}{\partial q_1} & \frac{\partial k_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial k_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial k_m}{\partial q_1} & \frac{\partial k_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial k_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = J(q) \dot{q}, \quad x_f, q_0$$

$$x = k(q) \\ x_0 = k(q_0)$$



$$\dot{x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$\dot{x} = \frac{x_f - x_0}{\Delta t} \leftarrow \text{tak byśmy chcieli}$$

$$\dot{x} \approx \frac{x_f - x_0}{\Delta t}$$

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} = J(q_i) \frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t}$$

$$\sum (x_f - x_i) = J(q_i) (q_{i+1} - q_i)$$

"i" - chwila bieżąca

"m" - to znany

$$q_i \rightarrow x_i = k(q_i)$$

$$q_{i+1} - q_i = \sum J^{-1}(q_i) (x_f - x_i)$$

□

$$q_{i+1} = q_i + \sum J^{-1}(q_i) (x_f - k(q_i))$$

Algorytm Newtona dla macierzy nieredundantnych ($m=n$)

$$q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_2 \rightarrow \dots$$

$$\|x_f - k(q_i)\| < \epsilon$$

$$q_{i+1} = q_i + \xi J^\#(q_i) (x_f - k(q_i))$$

$J^\# \rightarrow$ pseudo-odvratnosť Moore-Penrose'a

$$J^\# = J^T (JJ^T)^{-1}$$

Podstawy robotyki - ujęt. 9.11.2006

niered. red.

$$q_{i+1} = q_i + \xi J^{-1}(q_i) (x_f - k(q_i))$$

↑
współczynnik (dodatku)

Warunki dla ξ

$$\sum_{i=0}^{\infty} \xi_i^2 \rightarrow \infty$$

$J = \frac{\partial k}{\partial q}$

$$J^\# = J^T (JJ^T)^{-1}$$

Konfiguracja osobliwa

Konfiguracja osobliwa to taka, że

$\text{rank } J(q) < m$

↑
rzęd macierzy

$(m \times n)$

← dim X → dim Q

$m \leq n$

corank $J(q) = 0$

↑
stopień degeneracji

rzęd macierzy

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

rank() + corank() = m

$$\begin{cases} x = a_{11}c_{11} + a_{21}c_{12} \\ y = a_{11}s_{11} + a_{21}s_{12} \end{cases}$$

$$J(q) = \frac{\partial k}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{bmatrix}$$

$$J(q) = \left[\begin{array}{cc|c} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} & \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} & \end{array} \right]$$

$$\det J(q) = -(a_1 s_1 + a_2 s_{12}) a_2 c_{12} + (a_1 c_1 + a_2 c_{12}) a_2 s_{12} =$$

$$= -a_1 a_2 s_1 c_{12} - a_2^2 s_{12} c_{12} + a_1 a_2 c_1 s_{12} + a_2^2 s_{12} c_{12} =$$

$$= a_1 a_2 (s_{12} c_1 - c_{12} s_1) = a_1 a_2 s_2$$

$$\sin(q_1 + q_2 - q_1) = \sin(q_2)$$

Konfiguracje osobliwe, gdy

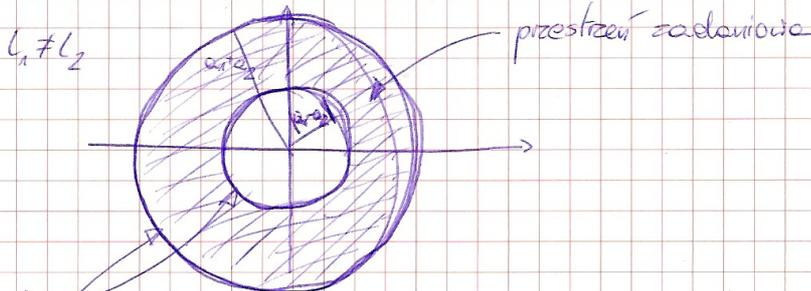
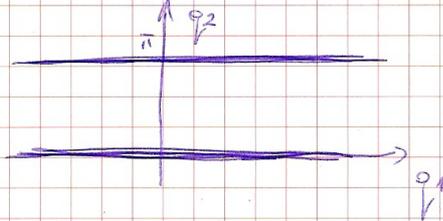
parametry robota

$$a_1 a_2 s_2 = 0$$

$$s_2 = 0 \Leftrightarrow q_2 = \{0, \pi\}$$

= pierwszej odciętej

$$K.O. = \{(*, 0) \cup (*, \pi)\}$$



konfiguracje osobliwe

Robust inverse odwrotność odporna

$$q_{i+1}^o = q_i^o + \xi \left(J(q) + \lambda I_m \right)^{-1} (x_f - k(q_i))$$

współczynnik liczbowy (maty)

Manipulowalność

$$m(q) = \sqrt{\det(J(q)J^T(q))}$$

Daje nam to pewną charakterystykę pewnych konfiguracji.

$$m(q) = a_1 a_2 / s_2$$

Podstawy robotyki - wykt.

23. 11. 2006

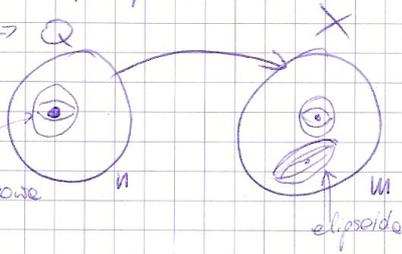
-1-

$$\dot{x} = J(q) \dot{q}$$

Fabryczki zorientowane
Czyni to.

Zbiór prędkości,
a nie konfiguracji.

sfera jednostkowa



$$m(q) = \sqrt{\det(J(q) J^T(q))}$$

$$\|\dot{q}\| = 1$$



$$J = U D V^T$$

(m x n) (m x m) (n x n) (n x n)

SVD - singular value decomposition.

$U \in SO(m)$

$V \in SO(n)$

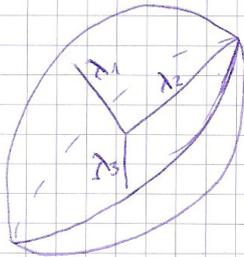
$D \rightarrow$ mac. diagonalna



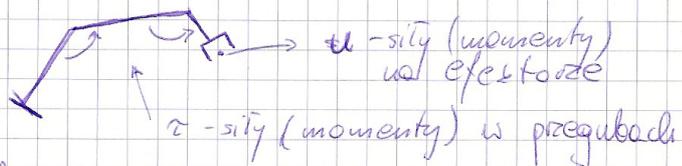
$$m(q) = \prod_{i=1}^m |\lambda_i|$$

$\lambda_i \mid i=1 \dots m$

↑ wartości osobliwe



\langle , \rangle - iloczyn skalarny



$$\langle u, \dot{x} \rangle = \langle \tau, \dot{q} \rangle$$

$$\langle u, J(q) \dot{q} \rangle = \langle \tau, \dot{q} \rangle$$



$$\langle J^T u, \dot{q} \rangle = \langle \tau, \dot{q} \rangle$$

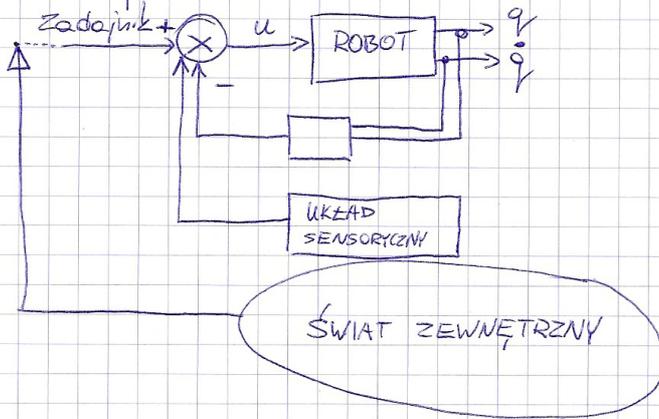
$$\tau = J^T(q) u$$

Robot jest autonomicznie sterowaną, (re-)programowalną wielozadaniową maszyną manipulacyjną o wielu stopniach swobody posiadającą własności manipulacyjne i lokomocyjne, stacjonarną i mobilną, stosowaną do różnych celów przemysłowych i specjalnych.

Roboty

- sztywne
 - elastyczne
- przegub
-ogumko

Generacje



argument na całym przedziale

MODELOWANIE DYNAMIKI

$$q(\cdot), t \in [0, T]$$

$$q(0) = q_0, q(T) = q_f$$

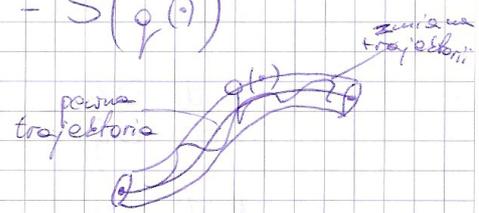
$$\overset{\text{działanie}}{S(q(\cdot))} = \int_0^T \underset{\text{f-cja Lagrange'a}}{L(q(t), \dot{q}(t))} dt$$

$$L(q, \dot{q}) = \underbrace{K(q, \dot{q})}_{\text{energia kinetyczna}} - \underbrace{U(q)}_{\text{energia potencjalna}}$$

$$\delta S = 0$$

$\delta \rightarrow$ wariacja (mala zmiana)

$$\delta S = S(q(\cdot) + \delta q(\cdot)) - S(q(\cdot))$$



Nie ma zmian na początku i końcu. $\rightarrow \delta q(0) = \delta q(T) = 0$

$$\begin{aligned} S(q + \delta q) &= \int_0^T L(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t)) dt = \\ &= \int_0^T \left[L(q(t), \dot{q}(t)) + \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) \delta q + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) \delta \dot{q} + \dots \right] dt \end{aligned}$$

Możemy wyciąć tę część, gdyż mamy założenie, że jest male zaburzenie.

$$\delta S = \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial q} (q(t), \dot{q}(t)) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (q(t), \dot{q}(t)) \delta \dot{q} \right) dt = (*)$$

$$\int_0^T \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = \int_0^T \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d(\delta q) = \left\{ \int u dv = uv - \int v du \right\}$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_0^T - \int_0^T \delta q d \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = - \int_0^T \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q dt$$

dzięki założeniu $\delta q(0) = \delta q(T) = 0$

$$(*) = \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$$

↑ to nie może być równe 0, bo chcemy aby nasza trajektorie mogła się zaburzać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

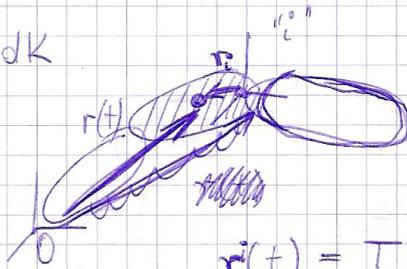
← można opuścić całkę, bo tak jest dla każdego punktu

↑ tak jest w ujęciu izolowanym
sily / momenty zewnętrzne

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

to jest równanie Eulera-Lagrange'a.

$$K = \int dk$$



$$\mathbf{r}_i(t) = T_0^{-1}(q) \cdot \mathbf{r}_i$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

iloczyn skalarny

$$\mathbf{v}^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle =$$

$$V = (V_1, V_2, V_3)$$

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2$$

$$V^2 = \langle V, V \rangle = \text{tr}(VV^T) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} [V_1 \ V_2 \ V_3] \right) =$$

$$= \text{tr} \begin{pmatrix} V_1^2 & V_1 V_2 & V_1 V_3 \\ V_2 V_1 & V_2^2 & V_2 V_3 \\ V_3 V_1 & V_3 V_2 & V_3^2 \end{pmatrix}$$

$$K_s = \int_S dK = \int_S \frac{1}{2} m_i \text{tr}(\dot{r}_i^i \dot{r}_i^{iT}) ds = (*)$$

$$\left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} (AB)^T = B^T A^T$$

$$\dot{r}_i^i = (T_0^i(q)) r_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T_0^i}{\partial q_j} \dot{q}_j r_i$$

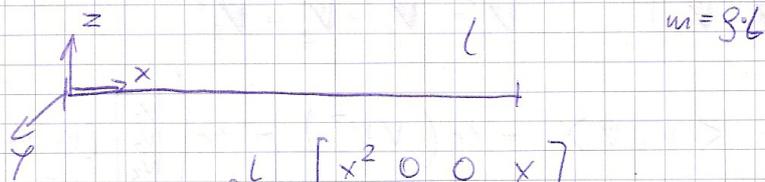
$$\text{tr}(\dot{r}_i^i \dot{r}_i^{iT}) = \text{tr} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial T_0^i}{\partial q_j} \dot{q}_j r_i \cdot r_i^T \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial T_0^i}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_k \right) \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} \text{atr}(A) = \text{tr}(A)$$

$$(*) = \frac{1}{2} \text{tr} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial T_0^i}{\partial q_j} \dot{q}_j \int m_i r_i r_i^T ds \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial T_0^i}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_k \right]$$

macierz pseudoinercji

$$\int m_i r_i r_i^T ds = \int m_i \begin{bmatrix} x_i^2 & x_i y_i & x_i z_i & x_i \\ y_i x_i & y_i^2 & y_i z_i & y_i \\ z_i x_i & z_i y_i & z_i^2 & z_i \\ x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix} ds = J_i$$

↑
takie oznaczenie nie jest to jacobian



$$J = \int_0^l \rho \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx$$

$$\int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^l = \frac{1}{3} l^3$$

$$\int_0^l x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^l = \frac{1}{2} l^2$$

$$\int_0^l 1 dx = l$$

$$\frac{1}{3} \rho l^3 = \frac{1}{3} \rho l \cdot l^2$$

\downarrow
 m

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} m l^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} m l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} m l & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$m \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{środek masy po wsp } x$$

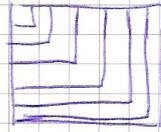
$$\sum_{k=1}^n Q_{jk}(q) \ddot{q}_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{jk}^i(q) \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i(q) = u_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$Q_{jk}(q) = \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\frac{\partial T_0^i}{\partial \dot{q}_j} J_i \left(\frac{\partial T_0^i}{\partial \dot{q}_k} \right)^T \right]$$

$$C_{jk}^i(q) = \sum_{s=\max(j,k)}^n \text{tr} \left[\frac{\partial^2 T_0^s}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} J_s \left(\frac{\partial T_0^s}{\partial \dot{q}_i} \right)^T \right]$$

WŁASNOŚĆ

$Q \rightarrow$ macierz inercji, symetryczna, dodatnio-określona



Sily bezwładności

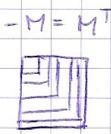
$C \rightarrow$ sily Coriolisa i odśrodkowe

$$\frac{dQ}{dt} = C + C^T$$

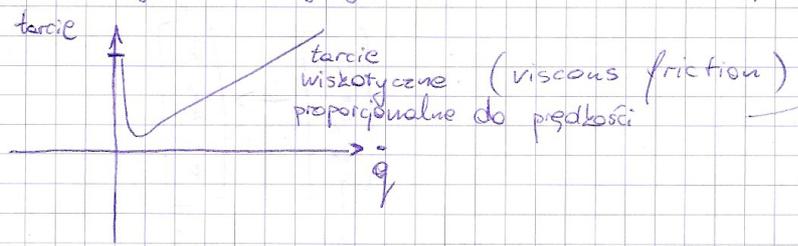
$D \rightarrow$ wektor sił grawitacji³

$$M(q)\ddot{q} + \underbrace{C(q, \dot{q})\dot{q}}_{\substack{\text{siły Coriolisa} \\ \leftarrow}} + \underbrace{R\dot{q}}_{\substack{\text{siły odśrodkowe} \\ \leftarrow}} + D(q) = u$$

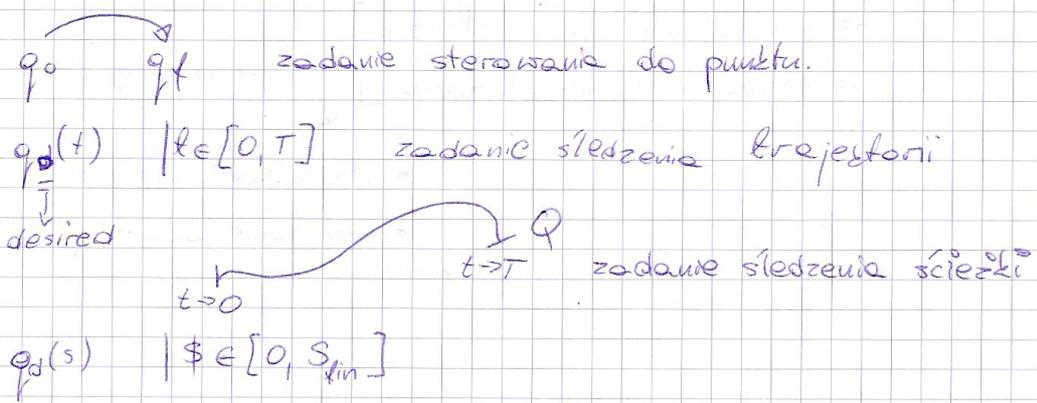
\uparrow wektor grawitacji
 \uparrow wektor grawitacji
 \leftarrow siły Coriolisa
 \leftarrow siły odśrodkowe



zjawiska dyssypatywne (tracące energii)



Mathematica
LISP
PROLOG



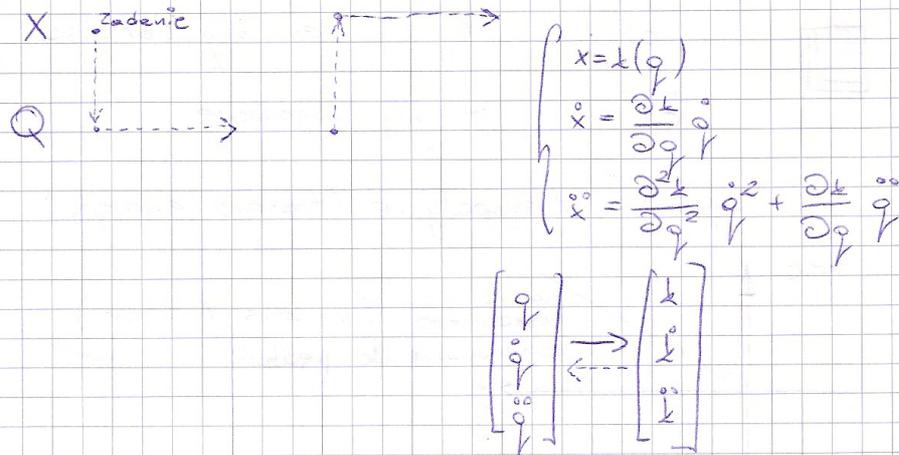
Ze względu na optymalność
 → optymalne
 → nieoptymalne

Ze względu na architekturę
 → scentralizowane
 → zdecentralizowane

Ze względu na przestrzeń, w której sterujemy

→ wewnętrzna (konfiguracyjna)

→ zewnętrzna (zadaniowa)



Ze względu na znajomość modelu

→ pełna znajomość modelu

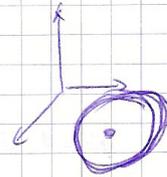
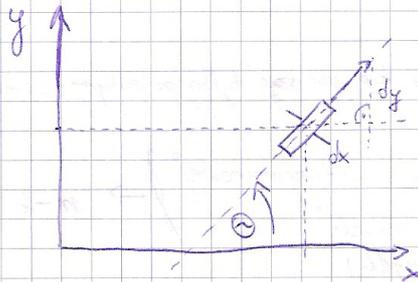
→ nieznaną parametryczną

→ nieznaną strukturalną.

nie wiemy.

- sterowanie odporne (robust control)
- sterowanie adaptacyjne (adaptive control)

układy holonomiczne vs nieholonomiczne



$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta$$

$$\begin{aligned} \cos \theta \, dy &= dx \sin \theta \\ \sin \theta \, \dot{x} - \cos \theta \, \dot{y} &= 0 \end{aligned} \quad / \frac{dt}$$

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

~~$$A(q) \dot{q} = 0$$~~

$$\begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} = 0$$

ograniczenia w formie Pfaff

$$A(q) \dot{q} = 0$$

holonomiczne: $\exists \Phi(q): \frac{d\Phi(q)}{dt} = A(q) \dot{q}$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

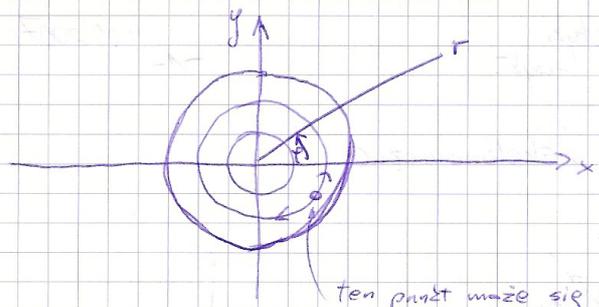
$$\Phi(q) = \text{const}$$

np. $q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 = 0$$

$$\Phi(q) = \Phi(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \quad \text{jest holonomic}$$

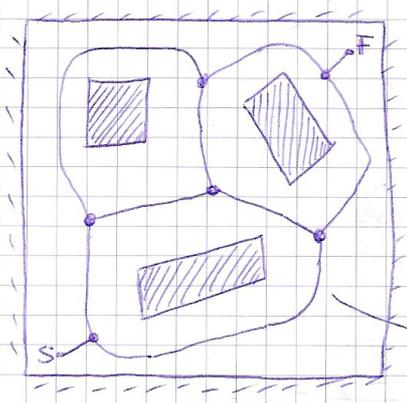


ten punkt może się poruszać tylko po jednym okręgu.

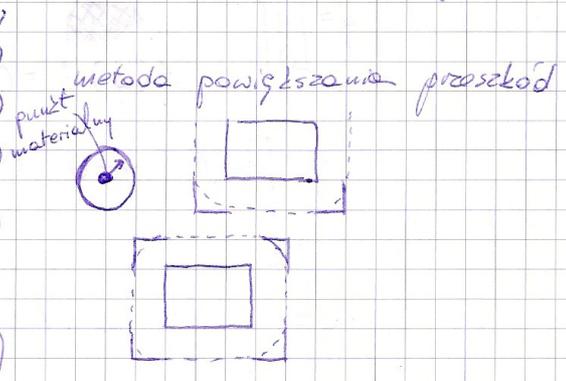
układ działa w przestrzeni n -wymiarowej \rightarrow $n-k$ wymiarowa.
 k ograniczeń holonomicznych (niezależnych)

Metody planowania ruchu układów holonomicznych.

1° diagram Voronoia

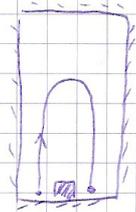


odcinek prosty i taki



metoda powiększania przeszkód

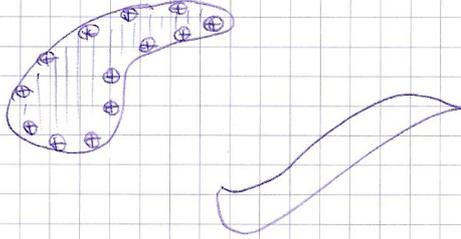
- używana najczęściej dla środowisk statycznych;
- Ruch robota bezpieczny
- metoda globalna (trzeba mieć pełną wiedzę o środowisku i planując z góry całą trasę)



2° Metoda pól potencjalnych

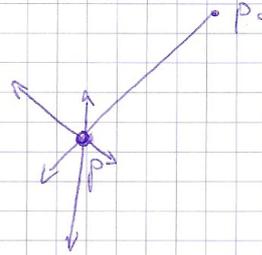
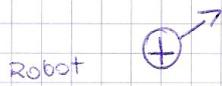
- ⊕ Robot
- ⊖ → cel
- ⊕ przeszkody

zakłada się, że odległość
w kierunku celu w każdym
miejscu jest taka sama



$$F_{odp} = k \cdot \frac{1}{\|p - p_0\|^n}$$

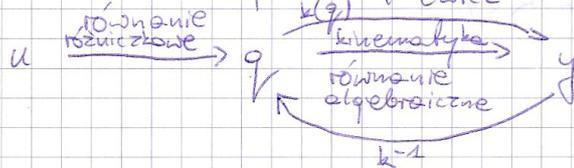
czasem
dodaje się
współczynnik
np. 2



- "pijany" (śledzenie ściany)
- ruchy Browna.

Podstawy robotyki - ćwiczenie

30.11.2006



$$y = k(q(t))$$

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} = \left[\frac{\partial k}{\partial q} \right] \cdot \dot{q}$$

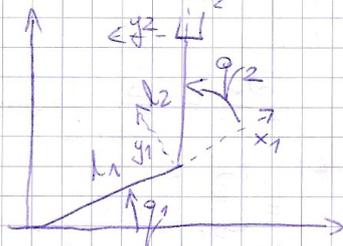
Siły prędkości transformuje się przez Jacobian.

$$\dot{y} = J \cdot \dot{q}$$

y - znane
 q - szukane } kinematyka odwrotna

$$J^{-1} \dot{y} = \dot{q}$$

$$J^{-1} \dot{y} = \dot{q}$$



$$A_1 = R(z, q_1) \cdot Tr(x_1, l_1) \cdot x_0$$

$$A_2 = R(z, q_2) \cdot Tr(x_1, l_2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} c_{12} & -s_{12} & 0 & c_{12}l_2 + c_{11}l_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & s_{12}l_2 + s_{11}l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$x = c_{12}l_2 + c_{11}l_1$$

$$y = s_{12}l_2 + s_{11}l_1$$

$$z = 0$$

$$RPY = \alpha, \beta, \gamma$$

$$\alpha = q_1 + q_2$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = 0$$

$$E = R_{z,\phi} R_{y,\theta} R_{z,\psi}$$

$$\phi = q_1$$

$$\theta = 0$$

$$\psi = q_2$$

Reprezentacja RPY

$$J_{6 \times n} = \frac{\partial k}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial q_1} \\ \frac{\partial k_2}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial k_n}{\partial q_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial q_1} & \frac{\partial k_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial k_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial k_n}{\partial q_1} & \frac{\partial k_n}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial k_n}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Może być mniej, na wasze
zadanie (jeśli potrzebujemy
Dla ~~... ..~~ up. tylko położenie, a nie orientacji)

Dla 2-wahadła

$$x_1 = x = c_{12} l_2 + c_{11} l_1$$

$$y_1 k_2 = y = s_{12} l_2 + s_{11} l_1$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y_1}{\partial q_1} & \frac{\partial y_1}{\partial q_2} \end{bmatrix} = (*) \quad \frac{\partial x}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} [l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cos q_1]$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_1} [l_2 \cos(q_1 + q_2)] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial q_1} l_1 \cos q_1 =$$

$$= -l_2 \sin(q_1 + q_2) - l_1 \sin q_1$$

$$(*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{bmatrix} = (**)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_1} = -l_2 s_{12} - l_1 s_{11}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial q_2} = -l_2 c_{12}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial q_1} = l_2 c_{12} + l_1 c_{11}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial q_2} = l_2 s_{12}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} [l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_1 \sin q_1]$$

$$(**) = \begin{bmatrix} -l_2 s_{12} - l_1 s_1 & -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} + l_1 c_1 & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Osobliwość są, wtedy, gdy Jacobian traci rząd!

Gdzie jest osobliwość?

Tam, gdzie $\text{rank} \left[\frac{\partial k}{\partial q} \right] = \text{rank } J < \text{rank } \text{uraz}$

→ w przypadku macierzy kwadratowej

$$\det J = (-l_2 s_{12} - l_1 s_1) l_2 c_{12} + l_2 s_{12} (l_2 c_{12} + l_1 c_1) = 0$$

$$= -l_2^2 s_{12} c_{12} - l_1 l_2 s_1 c_{12} + l_2^2 s_{12} c_{12} + l_1 l_2 c_1 s_{12} =$$

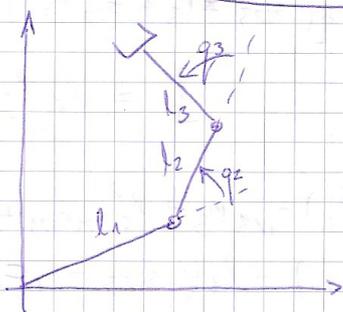
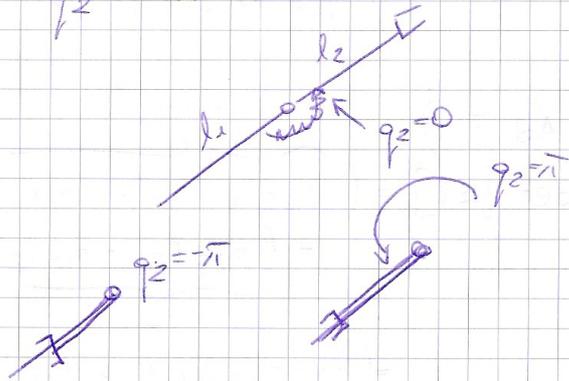
$$= l_1 l_2 (s_{12} c_1 - c_{12} s_1) =$$

$$= l_1 l_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_1) = l_1 l_2 s_2$$

Osobliwość położenia dla 2-wahadła:

$$s_2 = 0 \Rightarrow \varphi_2 = k\pi$$

$$\varphi_2 = 0$$



$$K = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & c_{13} l_3 + l_2 c_{12}^+ \\ s_{123} & c_{123} & 0 & s_{13} l_3 + s_{12} l_2^+ \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = c_{123} l_3 + c_{12} l_2 + c_1 l_1$$

$$y = s_{123} l_3 + s_{12} l_2 + s_1 l_1$$

$$J = \begin{bmatrix} \textcircled{x_1} & \textcircled{x_2} & \textcircled{x_3} \\ -s_{123} l_3 - s_{12} l_2 - s_1 l_1 & s_{123} l_3 - s_{12} l_2 & s_{123} l_3 \\ \textcircled{y_1} & \textcircled{y_2} & \textcircled{y_3} \\ c_{123} l_3 + c_{12} l_2 + c_1 l_1 & c_{123} l_3 + c_{12} l_2 & c_{123} l_3 \end{bmatrix}$$

I sposób - algebraiczny
wszystkie podwyznaczniki max rzędu mają być osobliwe.

$$\det [ab] = 0$$

$$\det [ac] = 0$$

$$\det [bc] = 0$$

II sposób - za pomocą macierzy manipulowalności $J J^T$

$$M = J \circ J^T$$

$$\det M = J J^T = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ad I)} \quad \det [ab] &= \overbrace{(-s_{123} l_3 - s_{12} l_2 - s_1 l_1)}^{-x - s_1 l_1} \overbrace{(c_{123} l_3 + c_{12} l_2)}^y + \\ &+ \overbrace{(s_{123} l_3 + s_{12} l_2)}^x \overbrace{(c_{123} l_3 + c_{12} l_2 + c_1 l_1)}^{y + c_1 l_1} = \\ &= (-x - s_1 l_1) y + x (y + c_1 l_1) = -xy - s_1 l_1 y + xy + x c_1 l_1 = \\ &= l_1 (x c_1 - y s_1) = l_1 \left[(s_{123} l_3 + s_{12} l_2) c_1 - (c_{123} l_3 + c_{12} l_2 / s_1) \right] = \\ &= l_1 \left[l_3 (s_{123} c_1 - c_{123}) + l_2 (s_{12} c_1 - c_{12} / s_1) \right] = l_1 (l_3 s_{23} + l_2 s_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det [ac] &= -l_3^2 s_{123} c_{123} - (s_{12} l_2 + s_1 l_1) c_{123} l_3 + l_3^2 s_{123} c_{123} + (c_{12} l_2 + c_1 l_1) s_{123} l_3 = \\ &= l_3 [l_2 (s_{123} c_{12} - s_{12} c_{123}) + l_1 (c_1 s_{123} - s_1 c_{123})] = \\ &= l_3 (l_2 s_3 + l_1 s_{23}) \end{aligned}$$

$$\det [bc] = -l_3^2 s_{123} c_{123} - l_2 l_3 s_{12} c_{123} + l_3^2 s_{123} c_{123} + l_1 l_2 c_{12} s_{123} = l_2 l_3 s_3$$

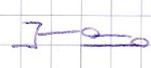
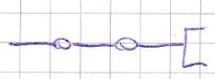
$$\begin{cases} l_1(l_3 s_{23} + l_2 s_2) = 0 \\ l_3(l_2 s_3 + l_1 s_{23}) = 0 \\ l_2 l_3 s_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \varphi_2 = 0 \\ \varphi_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \varphi_2 = 0 \\ \varphi_3 = \pm \pi \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \varphi_2 = \pi \\ \varphi_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \varphi_2 = \pm \pi \\ \varphi_3 = \pm \pi \end{matrix}$$



Ad II)

$$M = JJ^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\det M = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 =$$

$$= \cancel{x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_3^2 + x_2^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + x_2^2 y_3^2 + x_3^2 y_1^2 + x_3^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^2} - (x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_1^2 + x_3^2 y_1^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + 2x_1 x_3 y_1 y_3 + 2x_2 x_3 y_2 y_3) =$$

$$= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 =$$

$$= (\det [ab])^2 + (\det [ac])^2 + (\det [bc])^2$$

Laborki:

1. IRB-1400
2. PR-02 - matryca diodowa i "Basic"
3. Khepera - mały robot mobilny

ćw 3 - 8⁰⁰ ćw 1 i 2 : 8³⁰

Literatura:

zpcir.~~ict~~ict.pwr.wroc.pl

~~LABOR~~

→ rob.ict.pwr.wroc.pl

LABOR