

Podstawy robotyki - wykład

5.10.2006

-1-

dr hab. Ignacy Duleba, prof PWr

18 stycznia 2007

KOŁOKWIUM

materiał z wykładu i laboret

13:05 początek zajęć

wstęp do robotyki
podstawy robotyki

LITERATURA:

Craig → Introduction to robotics
M. Spong, M. Vidyasagar → -1-

Tchan, Jacek → Podstawy robotyki
Tchan, → Manipulatory i roboty mobilne

Journal of Robotics Systems → ~~aprecosopismo~~

przegub (joint) - to, co się rusza w robocie

ogniwo (link) - to, co jest między przegubami

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 x_i^2}$$

$$\|\lambda x\| = \|\lambda\| \cdot \|x\|$$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i = x^T y \quad \text{iloczyn skalarny}$$

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \angle(x, y)$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

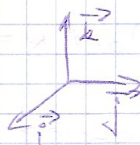
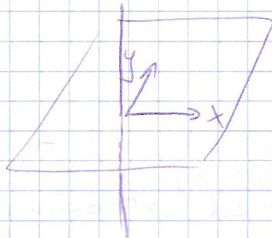
$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

iloczyn wektorowy
 $x \times y$

stosujemy układy prawosłowne

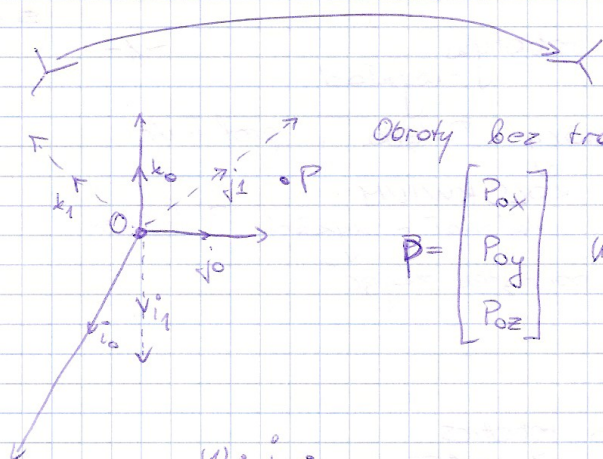
$$\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot |\sin \angle(x, y)|$$



$$x \times y = -y \times x$$

antysymetryczne

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$



Obróty bez translacji:

$$P = \begin{bmatrix} P_{0x} \\ P_{0y} \\ P_{0z} \end{bmatrix}$$

$$1) P = P_{0x} \cdot i_0 + P_{0y} \cdot j_0 + P_{0z} \cdot k_0$$

$$P = P_{1x} \cdot i_1 + P_{1y} \cdot j_1 + P_{1z} \cdot k_1$$

$$(1) \cdot i_0 =$$

$$(P_{0x} i_0 + P_{0y} j_0 + P_{0z} k_0) \cdot i_0 = P_{0x} \cdot \overbrace{i_0 \cdot i_0}^1 + P_{0y} \cdot \overbrace{i_0 \cdot j_0}^0 + P_{0z} \cdot \overbrace{i_0 \cdot k_0}^0 = P_{0x}$$

$$\begin{cases} P_{0x} = i_0 \cdot P_{1x} + j_0 \cdot P_{1y} + k_0 \cdot P_{1z} \\ P_{0y} = i_1 \cdot P_{1x} + j_1 \cdot P_{1y} + k_1 \cdot P_{1z} \\ P_{0z} = i_2 \cdot P_{1x} + j_2 \cdot P_{1y} + k_2 \cdot P_{1z} \end{cases}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} P_{0x} \\ P_{0y} \\ P_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_0 \cdot i_1 & j_0 \cdot i_1 & k_0 \cdot i_1 \\ i_0 \cdot j_1 & j_0 \cdot j_1 & k_0 \cdot j_1 \\ i_0 \cdot k_1 & j_0 \cdot k_1 & k_0 \cdot k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \end{bmatrix}$$

$$P_0 = R_1^0 \cdot P_1 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ R_1^0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Macierz transformacji między ukł. 1, 0} \\ \text{to otrzymamy } R_1^0 \end{matrix}$$

rotation (z ukł. 1 do ukł. 0)

$$P_1 = R_1^0 \cdot P_0$$

$$R_0^1 R_1^0 = I_3$$

$$(R_0^1)^{-1} = R_1^0$$

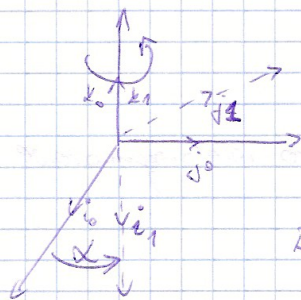
$$1) \underline{R^{-1} = R^T}$$

$$(R_0^1)^{-1} = (R_0^1)^T$$

$$2) \det R = 1$$

Gdy macierz ma własności 1) i 2) to należy do grupy special orthogonal group

Macierze rotacji mają te własności

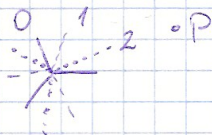


$$\text{Rot}(z, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(y, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(x, \gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

$$\dim \text{SO}(3) = 3$$



$$p_0 = R_0^1 p_1$$

$$p_0 = R_0^2 p_2$$

$$p_2 = R_2^1 p_1$$

$$p_1 = R_1^2 p_2$$

$$p_1 = R_1^2 p_2$$

$$p_0 = R_0^1 p_1$$

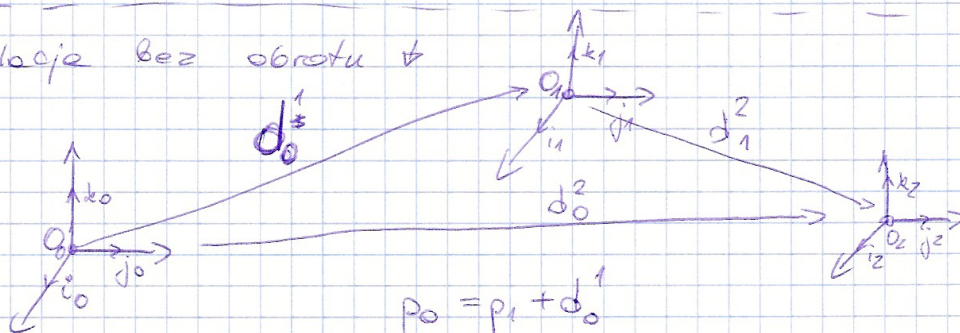
$$p_0 = R_0^1 R_1^2 p_2$$

$$p_0 = R_0^2 p_2$$

$$\Rightarrow R_0^2 = R_0^1 R_1^2$$

$$R_0^n = R_0^1 \cdot R_1^2 \cdot \dots \cdot R_{n-2}^{n-1} \cdot R_{n-1}^n$$

Translacja bez obrotu ↓



$$p_0 = p_1 + d_0^1$$

$$\begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1x} + d_0^1 x \\ p_{1y} + d_0^1 y \\ p_{1z} + d_0^1 z \end{bmatrix}$$

$$p_0 = d_0^2 + p_1 = d_0^1 + d_1^2 + p_2$$

czysty obrót \rightarrow $p_0 = R_0^1 p_1 + \emptyset$ \leftarrow zero wielowymiarowe

czysta translacja \rightarrow $p_0 = I_3 p_1 + d_0^1$

Współrzędne jednorodne

$$p_0 = \begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \end{bmatrix} \rightarrow P_0 = \begin{bmatrix} p_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} R_0^1 & d_0^1 \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix} P_1$$

$\begin{matrix} 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ 4 \times 1 & 1 \times 3 & 4 \times 1 \end{matrix}$

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^1 & d_0^1 \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$1 \equiv 1$

$$p_0 = R_0^1 p_1 + d_0^1$$

Gdy $\begin{cases} \det R = 1 \\ R^{-1} = R^T \end{cases}$

Podstawy robotyki - wykład.

12.10.2006

-1-

$\text{Re } SO(3) \quad R = \begin{bmatrix} n & o & a \end{bmatrix}$

$$\|n\| = \|o\| = \|a\| = 1$$

→ 3 ograniczenia

$$n \times o = a$$

→ 3 ograniczenia

↳ jedno wektorowe daje 3 skalarne

niezależne

$$\dim R = 3$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} R_0^1 & d_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_1 \quad 0 = [0 \ 0 \ 0]$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} P_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad P_1 = \begin{bmatrix} P_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = T_0^1 \dots T_{n-2}^{n-1} T_{n-1}^n P_n$$

$$T \in SE(3)$$

special Euclidean group

$$\dim T = 6 = 3 + 3$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ SO(3) & \mathbb{R}^3 \\ \uparrow & \uparrow \\ R & d \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_\alpha & 0 & s_\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\alpha & 0 & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

czysty obrót
wokół osi Y

$$\begin{matrix} \cos \alpha = c_\alpha \\ \sin \alpha = s_\alpha \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

translacja wzdłuż osi X

Parametryzacje $SO(3)$

a) kąty Eulera

$$Eul(\alpha, \beta, \gamma) =$$

$$= Rot(z, \alpha) Rot(y, \beta) Rot(z, \gamma)$$

← od lewej do prawej

b) kąty Roll-Pitch-Yaw
[roll-pitch-yaw]

$$RPY(\alpha, \beta, \gamma)$$

c) os'-kąt

ad a)

$$Eul(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (*)$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} i & j & k \\ c_\gamma & s_\gamma & 0 \\ -s_\gamma & c_\gamma & 0 \end{bmatrix} = i \cdot 0 + j \cdot 0 + k \cdot 1 = [0, 0, 1] \right\}$$

$$(*) = \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta & -s_\alpha & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta & c_\alpha & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ \\ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix}$$

Klasa przegubów:

G-klasa = liczba stopni swobody

V klasa

np. za pomocą 2 przegubów 5 klasy można zasympulować przegub 4 klasy

Podział ogniw ze względu na sztywność:

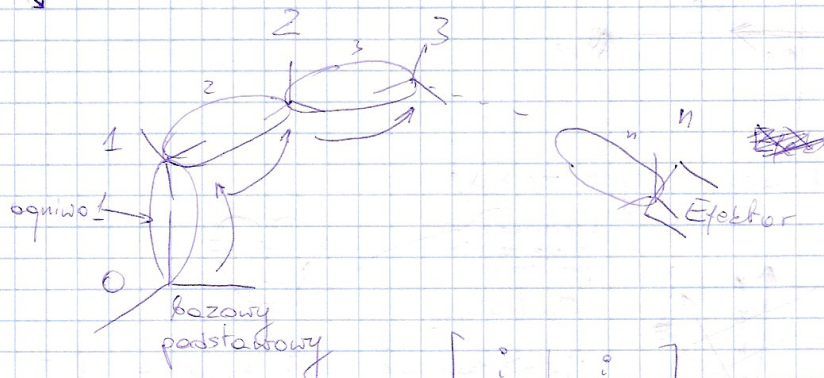
→ sztywne

→ elastyczne.

Podział pręgułów (ze wzgl. na sztywność)

→ sztywne

→ elastyczne → np. sprężyna



$$T_{i-1}^i = \begin{bmatrix} R_{i-1}^i & d_{i-1}^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

konfiguracja manipulatora

$$q = (q_1, \dots, q_n)^T$$

Denavit - Hartenberg 1955

$$T_0^n(q) = \prod_{i=1}^n T_{i-1}^i(q_i) = T_0^1(q_1) \cdot T_1^2(q_2) \cdot \dots \cdot T_{n-1}^n(q_n)$$

KINEMATYKA PROSTA wg Denavita-Hartenberga

Oś ruchu - zawsze z^i

1° Wybierz osie $z_0, \dots, z_{n-1} \rightarrow$ osie ruchu.

2° Wybierz układ podstawowy

3° Powtarzaj kroki 4- $i=1, \dots, n-1$

4° Wybierz O_i

(a) z_i przecina z_{i-1} to tam O_i

(b) $z_i \nparallel z_{i-1}$ to wyznaczamy prostą normalną n_i do z_{i-1}, z_i .
 O_i stawiamy, gdzie n_i przecina z_i

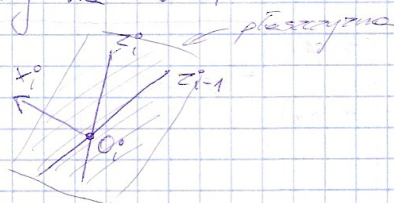


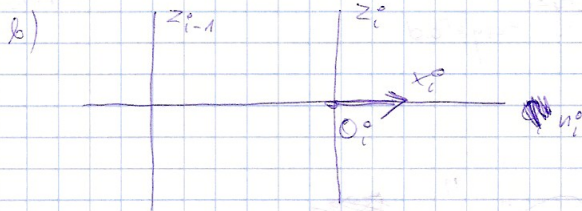
(c) $z_i \parallel z_{i-1}$, O_i arbitralny na osi z_i

5° Określamy x_i

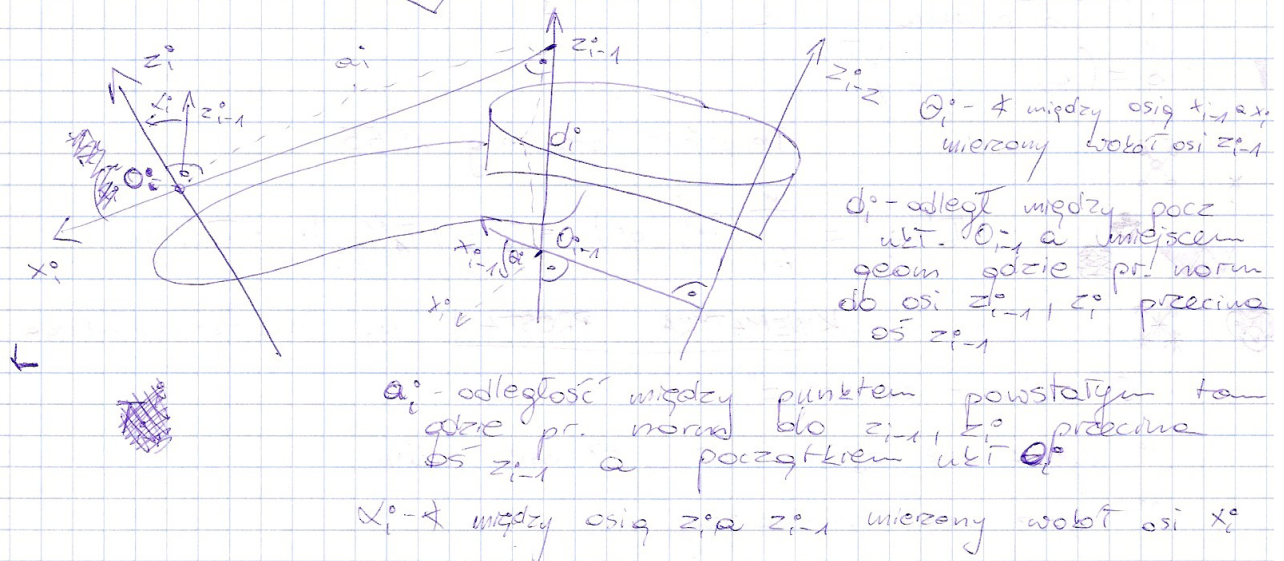
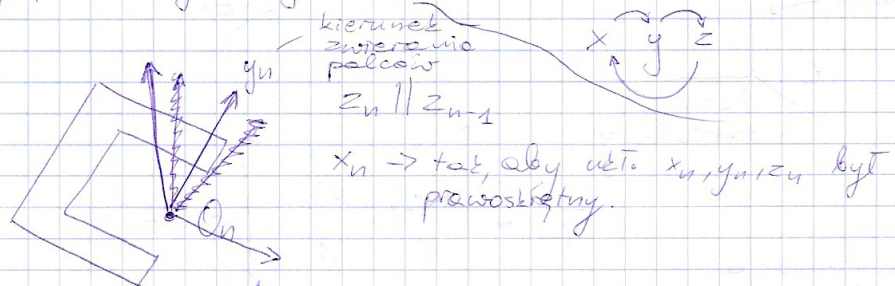
a) z_{i-1} przecina z_i

$x_i \nparallel z_{i-1} \nparallel z_i$
oś x_i jest \perp do płaszczyzny wyznaczonej przez z_i, z_{i-1}





6° Określamy y_i^0 , tak aby $y_i^0 = z_i^0 \times x_i^0$



$$T_{i-1}^i = \text{Rot}(z, \theta_i^0) \text{Trans}(z, d_i^0) \text{Trans}(x, a_i^0) \text{Rot}(x, \alpha_i^0)$$

Zmienną ruchu może być tylko θ_i^0 lub d_i^0 , bo osią ruchu jest "z"

W zależności od typu ruchu (przegub, przesuw^{ny}) może być {
 przegub obrotowy - θ_i^0
 -r- translacyjny - d_i^0

n - liczba stopni swobody manipulatora

Lp.	θ_i^0	d_i^0	a_i^0	α_i^0
1	$\theta(q_1)$			
2		$d(q_2)$		
3	$\theta(q_3)$			
...				
n				

-X-

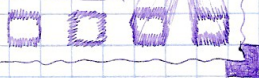
19.10.2006

$$R^5 T^1$$

$$R^2 T^1 R^3$$

Luke

→
zaczynając
od lewej



$$T_0^n(q) = \prod_{i=1}^n T_{i-1}^i(q_i)$$

Ruch w przestrzeni R^3

$$Tr(x, a) = T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Tr(x, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot(x, \alpha) = \begin{matrix} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Tr(y, b) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -x \\ -y \\ -z \end{matrix}$$

$$Rot(z, \beta) = \begin{matrix} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_\beta & -s_\beta & 0 & 0 \\ s_\beta & c_\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Rot(y, \gamma) = \begin{matrix} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} c_\gamma & 0 & s_\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\gamma & 0 & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

→
domnożenie w normalną
stronę (złożenie ruchów)
oś bieżąca

←
do reprezentacji Roll-Pitch-Yaw

Własności macierzy obrotów:

a) $R^{-1} = R^T$

b) $\det R = +1$

Roll - Pitch - Yaw

$$RPY(\alpha, \beta, \gamma) = Rot(z, \alpha) Rot(y, \beta) Rot(x, \gamma) = Rot(z, 45^\circ) Rot(y, 90^\circ) Rot(x, 30^\circ)$$

$$RPY(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przy mnożeniu macierzy samych rotacji można się
zawęzić do podmacierzy 3×3 .

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

spr.

$$R \cdot R^T = I$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

r_i - kolumny
↪ wiersze jedn.

$$R = \begin{bmatrix} | & | & | \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

$$\|r_2\| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|r_1\| = \|r_2\| = \|r_3\| = 1 \quad \text{Toż samo dla.}$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{r}_3$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{r}_3 = \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{r}_1 = \vec{r}_2$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \hat{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \hat{k}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$= \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \hat{j}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \hat{k} \cdot 0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_2 \times \vec{r}_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} \cdot 0 + \hat{j} \cdot 0 + \hat{k} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}_3 \times \vec{r}_1 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \hat{j}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \hat{k} \cdot 0 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_o^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & 0 \\ s_x & c_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & 0 \\ s_x & c_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$P_o^* = \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & x \\ s_x & c_x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_o = \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & x \\ s_x & c_x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & x \\ s_x & c_x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_o = K_o^1 P_1$$

jakie
składowe

translacja jednego układu względem drugiego (innego)
(T)

$$K_a^b = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wektor przesunięcia od początku układu a do początku układu b.

$$K = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & T_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} R_1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K K^{-1} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K K^{-1} = \begin{bmatrix} R R_1 + T \cdot 0 & R T_1 + T \\ 0 \cdot R_1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot T_1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R R_1 & R T_1 + T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_o^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & 0 \\ s_x & c_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & 0 \\ s_x & c_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$P_o^* = \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & x \\ s_x & c_x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_o = \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & x \\ s_x & c_x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} c_x & -s_x & 0 & x \\ s_x & c_x & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_o = K_o^1 P_1$$

jakie
składowe

translacja jednego układu względem drugiego (innego)
(T)

$$K_a^b = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

wektor przesunięcia od początku układu a do początku układu b.

$$K = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3} & T_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} R_1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K K^{-1} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K K^{-1} = \begin{bmatrix} R R_1 + T \cdot 0 & R T_1 + T \\ 0 \cdot R_1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot T_1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R R_1 & R T_1 + T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} / R R_1 = I_3$$

$$R^{-1} R R_1 = R^{-1} I_3$$

$$I_3 R_1 = R^{-1} I_3$$

$$R_1 = R^{-1} = R^T$$

$$R_1 = R^T$$

$$R T_1 + T = 0$$

$$R^{-1} / R T_1 = -T$$

$$R^{-1} R T_1 = R^{-1} (-T)$$

$$T_1 = -R^{-1} T = -R^T T$$

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dane: R

Chcemy znaleźć reprezentacje (lokalne):

- 1) kąty Eulera $R_z R_y R_z$
- 2) kąty ~~RPR~~ RPY $R_z R_y R_x$ - wzgl. osi ustalonych
- 3) osi kąt

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = R_{z,\alpha} R_{y,\beta} R_{z,\gamma} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{bmatrix}$$

$$1^\circ \quad c_\beta = 0 \Rightarrow \underbrace{\beta = +90^\circ \text{ lub } -90^\circ}_{\text{założenie}}$$

lokalne, niejednoznaczne

$$\beta = +90^\circ \quad c_\beta = 0 \quad s_\beta = 1$$

$$E(\alpha, 90^\circ, \gamma) = \begin{bmatrix} -s_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\gamma & c_\alpha \\ c_\alpha s_\gamma & c_\alpha c_\gamma & s_\alpha \\ -c_\gamma & s_\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -c_\gamma = -1 \\ s_\gamma = 0 \end{cases} \quad \text{albo} \quad \begin{cases} c_\gamma = 1 \\ s_\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\underline{\gamma = 0}$$

$$E(\alpha, 90^\circ, 0^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -s_\alpha & c_\alpha \\ 0 & c_\alpha & s_\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-s_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad c_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$s_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad c_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$s_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad c_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Downarrow \\ \alpha = 135^\circ$$

$$E(135^\circ, 90^\circ, 0^\circ)$$

Alternatywne
2° $c_\beta = 0 \Rightarrow \beta = -90^\circ$

$$c_\beta = 0 \quad s_\beta = -1$$

$$E(\alpha, -90^\circ, \gamma) = \begin{bmatrix} -s_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\gamma & -c_\alpha \\ c_\alpha s_\gamma & c_\alpha c_\gamma & -s_\alpha \\ c_\gamma & -s_\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_\gamma = -1 \quad s_\gamma = 0$$

$$\Downarrow \\ \gamma = 180^\circ$$

$$E(\alpha, -90^\circ, 180^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & s_\alpha & -c_\alpha \\ 0 & -c_\alpha & -s_\alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} & -c_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -s_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} & -c_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$s_\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad c_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = -45^\circ$$

Gdy sprzeczne r-wo
to znaczy, że nie
ma alternatywnego
rozr.

Spong Vidyasager
Dynamika i sterowanie robotów

Kinematyka prosta

$$Q \ni q \rightarrow \mathbf{t}(q) = \prod_{i=1}^n T_{i-1}^i(q_i) \in SE(3) = \begin{bmatrix} R_0^n & d_0^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↳ przestrzeń konfiguracyjna X

przestrzeń zadaniowa

R^6 + parametryzacja α, β, γ

$$\begin{bmatrix} d_0^n \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \mathbb{R}^3$

\downarrow

\mathbb{R}^6

$$\dim Q = n$$

$$\dim X \leq 6$$

$$\dim X = m$$

Robot jest nieredundantny wtedy gdy $\dim Q = \dim X$
 — — — — — redundantny (nadmiarowy) gdy $\dim Q > \dim X$

$$T = \begin{bmatrix} R^T & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

$$T T^{-1} = I_4$$

$$\begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & 0^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Ra + dc = I_3 \\ Rb + de = 0^T \end{cases}$$

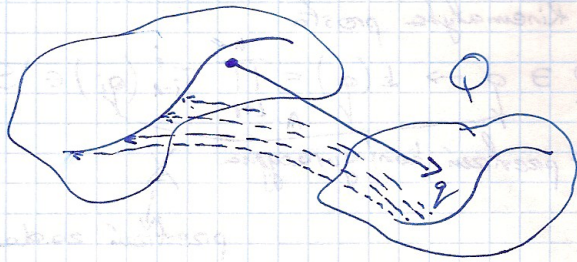
$$\begin{cases} Ra + dc = 0 \Rightarrow c = 0 = [0 \ 0 \ 0] \\ 0 \cdot b + 1 \cdot e = 1 \Rightarrow e = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ra = I_3 \Rightarrow a = R^{-1} = R^T \\ Rb = -d \cdot R^{-1} \\ R^{-1}Rb = -R^{-1}d \\ I_3 b = -R^{-1}d = -R^T d \end{cases}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Odwrotne zadanie kinematyki:

- punktowe
- "trajektoryjne"



Dane:

$$x_f \in X$$

Znaleźć:

$$q^*: \perp(q^*) = x_f$$

Metody rozwiązywania:

- analityczna

$$x_f = \prod_{i=1}^n A_i(q_i)$$

Wady:

- trudna do liczenia

Zalety:

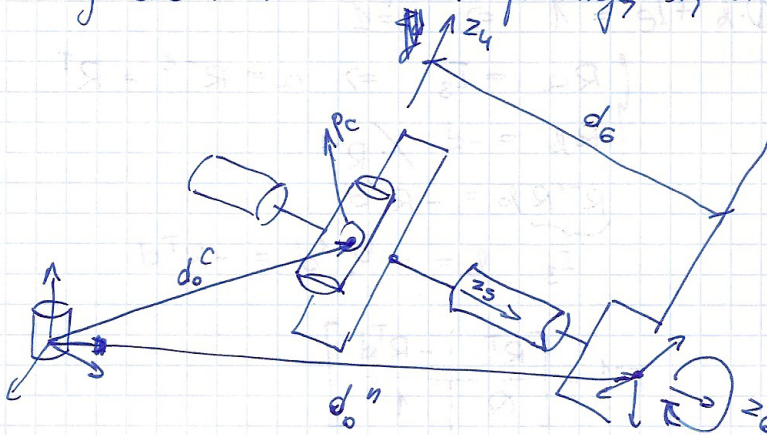
- analityczna
(wynikiem jest wzór!)

T_{i-1}	ile równań	\perp	P
T_1	12	x_f	$A_1(q_1) \dots A_n(q_n)$
T_2	12	$A_1^{-1}(q_1)x_f$	$A_2(q_2) \dots A_n(q_n)$
T_3	12	$A_1^{-1}(q_1)A_2^{-1}(q_2)x_f$	$A_3(q_3) \dots A_n(q_n)$
T_n	12	$A_1^{-1}(q_1) \dots A_{n-1}^{-1}(q_{n-1})x_f$	$A_n(q_n)$

Ilość równań: $12 \cdot n$

- odspzeganie kinematyczne

* trzy osie w mikroruchach przecinają się w jednym punkcie



$n=6$

$$x_f = \begin{bmatrix} R_0^6 & d_0^6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_c = d_0^6 - [d_6 R_0^6 \vec{k}]$$

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ten wzór jest prawdziwy dzięki *

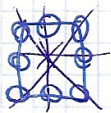
$$T_0^3 = \begin{bmatrix} R_0^3(q_1, q_2, q_3) & d_0^3(q_1, q_2, q_3) = p_c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^6(q) = \begin{bmatrix} R_0^6 & d_0^6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2^o) \quad p_c = d_0^3(q_1, q_2, q_3)$$

↓
3 ym

↓ wyliczamy
 Q_1, Q_2, Q_3

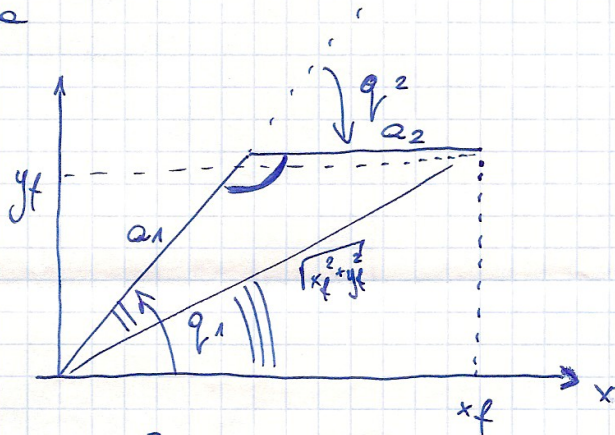


$$R_0^6 = R_0^3 R_3^6$$

Q_4, Q_5, Q_6

$$R_3^6 = (R_0^3)^T R_0^6$$

c) geometryczna



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{bmatrix}$$

Q_1, Q_2

$$c_1 \triangleq \cos q_1$$

$$c_{12} \triangleq \cos(q_1 + q_2)$$

$$x_f = \begin{bmatrix} x_f \\ y_f \end{bmatrix}$$

Kinematyka prosta

$q \rightarrow y$ (położenie i orientacja chwytaka)

Automatyka

$$(1) \dot{x} = Ax + Bu \rightarrow \begin{matrix} u & \xrightarrow{(1)} & x & \xrightarrow{(2)} & y \\ \text{we} & & \text{stan} & & \text{wy} \end{matrix}$$

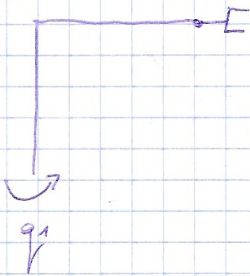
$$(2) y = C^T x$$

Robotyka

$$(1) M \ddot{q} + C \dot{q} + G + T = u \quad \text{- dynamika}$$

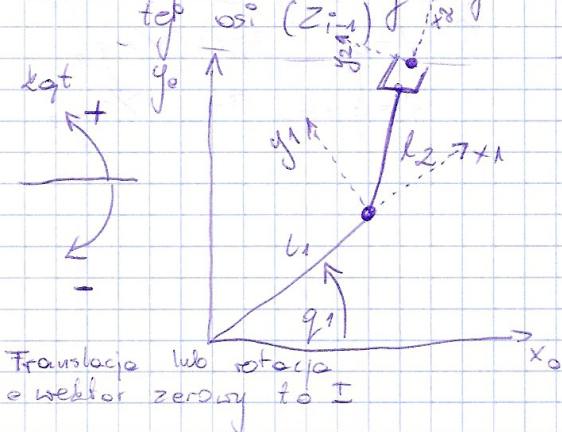
$$\begin{matrix} u & \xrightarrow{(1)} & q & \xrightarrow{(2)} & y \\ \text{we} & & \text{stan} & & \text{wy} \end{matrix}$$

$$(2) y = k(q) \quad \text{- kinematyka prosta}$$



Notacja Denawita - Hartenberga
(minimalna liczba transformacji)

1. Lokalny układ współrzędnych związany z i-tym stopniem swobody mocujemy NA KONCU (tego stopnia swobody)
2. Należy wybrać os Z_{i-1} w taki sposób, aby ruch w i-tym stopniu swobody był możliwy do wykonania względem tej osi (Z_{i-1})



nie ma osi y!

$$A_i^0(q_i) = A_{i-1}^0 = R_z Tr_z Tr_x R_x$$

$$A_1(q_1) = Rot(z, q_1) Tr(x, l_1)$$

$$A_2(q_2) = Rot(z, q_2) Tr(x, l_2)$$

$$K = A_1(q_1) \cdot A_2(q_2) \cdot \dots \cdot A_n(q_n)$$

$$\cos q_i = c_i^\circ$$

$$\sin q_i = s_i^\circ$$

$$\cos(q_i^\circ + q_j^\circ) = c_{ij}^\circ$$

$$\sin(q_i^\circ + q_j^\circ) = s_{ij}^\circ$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & c_1 l_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & s_1 l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = A_1 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & c_1 l_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & s_1 l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 c_2 & 0 & c_1 c_2 l_2 - s_1 c_2 l_2 + c_1 l_1 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 & 0 & s_1 c_2 l_2 + c_1 c_2 l_2 + s_1 l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 c_2 & 0 & c_1 c_2 l_2 - s_1 c_2 l_2 + c_1 l_1 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 & 0 & s_1 c_2 l_2 + c_1 c_2 l_2 + s_1 l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = s_\alpha c_\beta + c_\alpha s_\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = c_\alpha c_\beta - s_\alpha s_\beta$$

redukowane

$$\begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & c_{12} l_2 - s_{12} l_2 + c_1 l_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & s_{12} l_2 + c_{12} l_2 + s_1 l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} c_{12} l_2 - s_{12} l_2 + c_1 l_1 \\ s_{12} l_2 + c_{12} l_2 + s_1 l_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{matrix}$$

$$R_{ot}(z, q_1 + q_2)$$

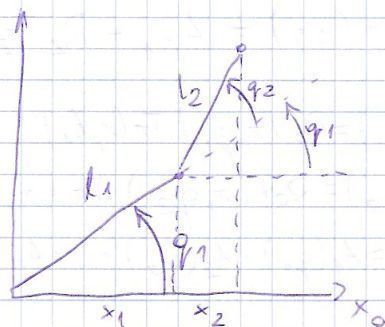
$$RPY = R_z R_y R_x = R_z, q_1 + q_2$$

$$\alpha = q_1 + q_2$$

$$E = R_z R_y R_z = R_z, q_1 + q_2$$

$$\text{wp. } \alpha = q_1 \quad \beta = 0 \quad \gamma = q_2$$

$$\alpha = q_1 + q_2 \quad \beta = 0 \quad \gamma = q_2$$



$$x = x_1 + x_2$$

$$\frac{x_1}{l_1} = \cos q_1 = c_1$$

$$x_1 = c_1 l_1$$

$$\frac{x_2}{l_2} = \cos(q_1 + q_2) = c_{12}$$

$$x_2 = c_{12} l_2$$

Rowiczek

1-szy stopień swobody Θ_1 (obrot kolumny)

$$A_1(\Theta_1) = \text{Rot}(z, q_1) \cdot \text{Rot}(x, -90^\circ)$$

$$A_2(\Theta_2) = \text{Rot}(z, \Theta_2 - 90^\circ) \cdot \text{Tr}(x, d_1)$$

$$A_3(\Theta_3) = \text{Rot}(z, \Theta_3) \cdot \text{Tr}(x, d_2)$$

$$A_4(\Theta_4) = \text{Rot}(z, \Theta_4) \cdot \text{Tr}(x, d_3)$$

c lub s
 -90°

$$\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & d_1 s_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & -d_1 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & d_1 c_1 s_2 \\ s_1 s_2 & s_1 c_2 & c_1 & d_1 s_1 s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & d_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sin(\Theta_2 + 90^\circ) = \sin \Theta_2 \cdot \cos(-90^\circ) + \sin(-90^\circ) \cos \Theta_2 = -1 \cdot c_2 = -c_2$$

$$\sin(\alpha \pm 90^\circ) = \pm \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + 270^\circ) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - 270^\circ) = \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha - 90^\circ) = \sin \alpha$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 & c_2 & 0 & d_1 s_2 \\ -c_2 & s_2 & 0 & -d_1 c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{34} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & c_3 d_3 + s_3 d_2 \\ -s_3 & c_3 & 0 & s_3 d_3 + c_3 d_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \underbrace{A_1}_{A_{12}} \underbrace{A_2}_{A_{24}} \underbrace{A_3}_{A_{34}} \underbrace{A_4}_{A_{44}}$$

To, co liczymy na pocz.

$R_x \bar{T}_x R_z \bar{T}_x$

$q_1 \Rightarrow \Theta_3$
 $q_2 \Rightarrow \Theta_4$

$l_1 \Rightarrow d_2$
 $l_2 \Rightarrow d_3$

$$A_{12} A_{34} = \begin{bmatrix} c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & d_1 c_1 s_2 \\ s_1 s_2 & s_1 c_2 & c_1 & d_1 s_1 s_2 \\ c_2 & -s_2 & 0 & d_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{34} & -s_{34} & 0 & c_{34} d_3 + c_3 d_2 \\ s_{34} & c_{34} & 0 & s_{34} d_3 + s_3 d_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (*)$$

$$(*) = \begin{bmatrix} c_1 s_{234} & c_1 c_{234} \\ s_1 s_{234} & s_1 c_{234} \\ c_{234} & -s_{234} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(*) = \begin{bmatrix} c_1 s_2 c_{34} - c_1 c_2 s_{34} & -c_1 s_2 s_{34} + c_1 c_2 c_{34} & -s_1 & c_1 s_2 (c_{34} d_3 + c_3 d_2) + c_1 c_2 (s_{34} d_3 + s_3 d_2) + d_1 c_1 s_2 \\ s_1 s_2 c_{34} - c_2 s_1 s_{34} & -s_1 s_2 s_{34} + c_2 s_1 c_{34} & c_1 & s_1 s_2 (c_{34} d_3 + c_3 d_2) + c_2 s_1 (s_{34} d_3 + s_3 d_2) + d_1 s_1 s_2 \\ c_2 c_{34} + s_2 s_{34} & -c_2 s_{34} - s_2 c_{34} & 0 & c_2 (c_{34} d_3 + c_3 d_2) - s_2 (s_{34} d_3 + s_3 d_2) + d_1 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_{CH} = c_1 \left[d_1 s_2 + d_2 \underbrace{(s_2 c_3 + c_2 s_3)}_{s_{23}} + d_3 \underbrace{(s_2 c_{34} - c_2 s_{34})}_{s_{234}} \right] = c_1 [d_1 s_2 + d_2 s_{23} + d_3 s_{234}]$$

$$y_{CH} = s_1 [d_1 s_2 + d_2 s_{23} + d_3 s_{234}]$$

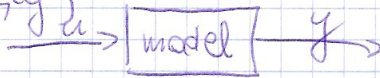
$$z_{CH} = d_1 c_2 + d_2 (c_2 c_3 - s_2 s_3) + d_3 (c_2 c_{34} - s_2 s_{34}) = d_1 c_2 + d_2 c_{23} + d_3 c_{234}$$

Identyfikacja parametryczna

dynamika IRB-1400



budowanie modelu
(adekwatnego - musi być wystarczająco
dużo parametrów, może być
więcej)



n - liczba nieznanymi parametrów

Czyli musimy mieć n liniowo niezależnych
równań aby to wyznaczyć.

n liniowo niezależnych funkcji w
dziedzinie czasu (bo mamy
r-rnice różniczkowe)

$$u = a_1 f_1(q_1) + a_2 f_2(q_1, \dot{q}) + a_3 f_3(q) + a_4 f_4(q_4) + \dots$$

\uparrow bezwładności \uparrow Coriolisa \uparrow grawit

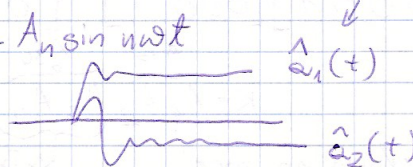
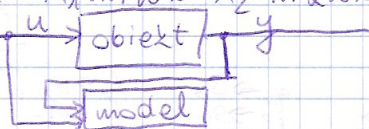
\uparrow
łarcie

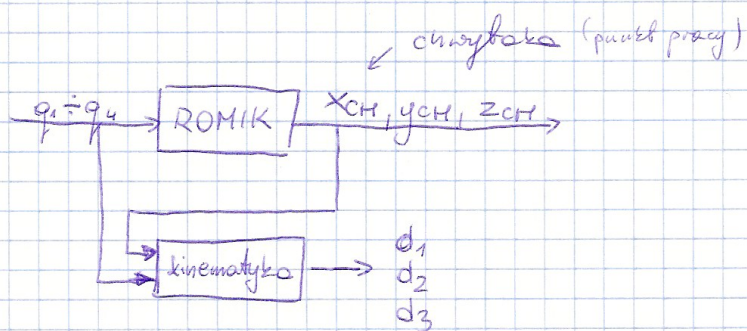
f_i - są znane \uparrow
 a_i - NIEZNANE

wart. ustalona

$$u = A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + \dots A_n \sin n\omega t$$

Tak długo
podawać sin
na "wien", aż na
wyn sie ustali





$$q_1 = \theta_1$$

$$q_2 = \theta_2$$

$$q_3 = \theta_2 + \theta_3$$

$$q_4 = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4$$

$$x_{CH} = c_{q_1} (d_3 s_{q_4} + d_2 s_{q_3} + d_1 s_{q_4})$$

$$y_{CH} = s_{q_1}$$

$$z_{CH} =$$

liniowe \rightarrow
u=gl
parametrów

q_1	0
q_2	0
q_3	90°
q_4	90°
x_{CH}	285 [mm]
y_{CH}	0
z_{CH}	205

$$x_{CH} = 285 = 1(d_3 \cdot 1 + d_2 \cdot 1 + d_1 \cdot 0)$$

$$y_{CH} = 0 = 0$$

$$z_{CH} = 205 = d_3 \cdot 0 + d_2 \cdot 0 + d_1 \cdot 1$$

$$285 = d_3 + d_2 \quad \leftarrow \text{rozdzielić tę sumę}$$

$$205 = d_1$$



Te równania nie są niezależne.

$$x_{CH} = 261,57$$

$$y_{CH} = 0$$

$$z_{CH} = 261,57$$

$$q_1 = 0$$

$$q_2 = 0$$

$$q_3 = 90^\circ$$

$$q_4 = 45^\circ$$

~~ZAD~~

ZAD DOM

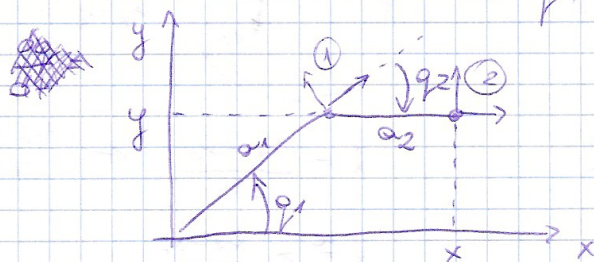
$$Q \ni q \mapsto k(q) \in X \subset SE(3)$$

Metoda Newtona

$$x = k(q), \quad \dot{x} = \frac{\partial k}{\partial q} \frac{dq}{dt} = \underbrace{\left(\frac{\partial k}{\partial q} \right)}_{J(q)} \dot{q}$$

macierz
Jakobiego

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \dot{q} \\ \frac{d^2 q}{dt^2} = \ddot{q} \end{cases}$$



$$T_0^1 = \text{Rot}(z, q_1) \text{Tran}(x, a_1)$$

$$T_1^2 = \text{Rot}(z, q_2) \text{Tran}(x, a_2)$$

$$T_0^2 = T_0^1 T_1^2$$

$$T_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

$c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$
 $s_{12} = \sin(q_1 + q_2)$

$$x = k(q) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \end{bmatrix}$$

$$k(q) = \begin{bmatrix} k_1(q) \\ \vdots \\ k_m(q) \end{bmatrix}$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}$$

$$n \geq m$$

$$\dot{x} = \frac{\partial k}{\partial q} \dot{q}$$

$(m \times 1)$ $(m \times n)$ $(n \times 1)$

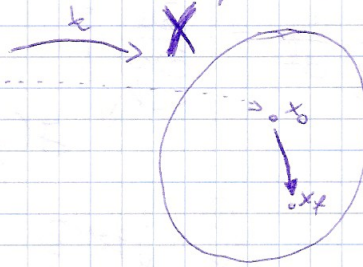
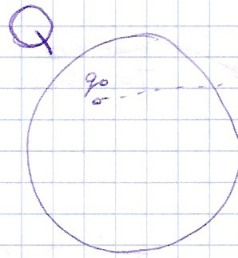
$$\frac{\partial k}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial q_1} & \frac{\partial k_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial k_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial k_2}{\partial q_1} & \frac{\partial k_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial k_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial k_m}{\partial q_1} & \frac{\partial k_m}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial k_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = J(q) \dot{q}, \quad x_f, q_0$$

$$x = k(q)$$

$$x_0 = k(q_0)$$



$$x_f - x_0$$

$$\dot{x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$\dot{x} = \frac{x_f - x_0}{\Delta t} \quad \leftarrow \text{tak byśmy chcieli}$$

$$\dot{x} \approx \frac{x_f - x_0}{\Delta t}$$

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} = J(q_i) \frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t}$$

$$\sum (x_f - x_i) = J(q_i) (q_{i+1} - q_i)$$

$$q_i \rightarrow x_i = k(q_i)$$

"i" - chwila bieżąca

"m" - to znany

$$q_{i+1} - q_i = \sum J^{-1}(q_i) (x_f - x_i)$$

$$k(q_i)$$

□

$$q_{i+1} = q_i + \sum J^{-1}(q_i) (x_f - k(q_i))$$

Algorytm Newtona dla macierzy nieredundantnych ($m=n$)

$$q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_2 \rightarrow \dots$$



$$\|x_f - k(q_i)\| < \epsilon$$

$$q_{i+1} = q_i + \xi J^{\#}(q_i) (x_f - k(q_i))$$

$J^{\#} \rightarrow$ pseudo-odwrotność Moore-Penrose'a

$$J^{\#} = J^T (J J^T)^{-1}$$

Grota-Roweckiego 44, ☎ 032 327 58 52/53, Poznań, PL Wolności 6, ☎ 061 850 18 93 do 95, Gdańsk, ul. Heweliusza 11, ☎ 058 321 72 50/51, Gdańsk-Wrzeszcz, ul. Grunwaldzka 76-78, ☎ 058 524 3402/03, Gdynia, ul. Armii Krajowej 13, ☎ 058 660 64 84/85, Łódź, ul. Piotrkowska 101, ☎ 042 633 77 00/30/50, Lublin, Al. Racławickie 6, ☎ 081 534 86 24/25, Szczecin, Al. Wojska Polskiego 29, ☎ 091 432 05 40/41, Kielce, ul. Sienkiewicza 42, ☎ 041 360 00 26/27

Wrocław, ul. Laciarska 4, ☎ 071 344 47 73/74 lub 341 85 01/04, Gliwice, ul. Wyszyńskiego 12, ☎ 032 331 42 91/92, Zabrze, ul. Wolności 291, ☎ 032 278 60 91/92, Chorzów, ul. Wolności 45, ☎ 032 249 38 65, Sosnowiec, ul. Targowa 4, ☎ 032 296 33 40/41, Tychy, ul. Wolności 1, ☎ 032 261 10 10/11

$$\det J(q) = - (a_1 s_1 + a_2 s_{12}) a_2 c_{12} + (a_1 c_1 + a_2 c_{12}) a_2 s_{12} =$$

$$= -a_1 a_2 s_1 c_{12} - a_2^2 s_{12} c_{12} + a_1 a_2 c_1 s_{12} + a_2^2 s_{12} c_{12} =$$

$$= a_1 a_2 (s_{12} c_1 - c_{12} s_1) = a_1 a_2 s_2$$

||

$$\sin(q_1 + q_2 - q_1) = \sin(q_2)$$

konfiguracje osobliwe, gdy
parametry robota $\leftarrow a_1 a_2 s_2 = 0$

$s_2 = 0 \Leftrightarrow q_2 = \{0, \pi\}$ = pierwszej ręki

K.o. = $\{(*, 0) \cup (*, \pi)\}$

$l_1 \neq l_2$

konfiguracje osobliwe

Robust inverse odwrotność odporna

$$q_{i+1}^* = q_i^* + \xi \left(J(q) + \lambda I_m \right)^{-1} (x_f - k(q_i))$$

współczynnik liczbowy (maty)

Warszawa, Al. Jerozolimskie 27 ☎ 022 628 70 04 do 06, Al. Solidarności 117 ☎ 022 652 57 17/18
 Warszawa, ul. Mazowiecka 6/8, ☎ 022 850 52 77/89, ul. Śniadeckich 17, ☎ 022 626 80 04/05
 Warszawa Ursynów, ul. Indiri Gandhi 15 ☎ 022 644 23 53/58
 Warszawa Bielany, ul. Reymonta 12 A ☎ 022 639 76 05 i 866 86 44
 Katowice, ul. 3 Maja 10 ☎ 032 253 05 72/73, ul. Mickiewicza 28 ☎ 032 253 05 19/20, Kraków, ul. Podwale 7 ☎ 012 426 16 01/03 lub 012 431 18 98

PROFI-LINGUA
 SZKOŁA JĘZYKÓW OBcych
www.profi-lingua.pl

Wrocław, ul. Laciarska 4, ☎ 071 344 47 73 / 74 lub 341 85 01 / 04, Gliwice, ul. Wyszyńskiego 12, ☎ 032 331 42 91 / 92, Zabrze, ul. Wolności 291, ☎ 032 278 60 91 / 92, Chorzów, ul. Wolności 45, ☎ 032 249 38 65, Sosnowiec, ul. Targowa 4, ☎ 032 296 33 40 / 41, Tychy, ul. Grot-Roweckiego 44, ☎ 032 327 58 52 / 53, Poznań, Pl. Wolności 6, ☎ 061 850 18 93 do 95, Gdańsk, ul. Heweliusza 11, ☎ 058 321 72 50 / 51, Gdańsk-Wrzeszcz, ul. Grunwaldzka 76 / 78, ☎ 058 524 34 02 / 03, Gdynia, ul. Armii Krajowej 13, ☎ 058 660 64 84 / 85, Łódź, ul. Piotrkowska 101, ☎ 042 633 77 00 / 30 / 50, Lublin, Al. Radwickie 6, ☎ 081 534 86 24 / 25, Szczecin, Al. Wojska Polskiego 29, ☎ 091 432 05 40 / 41, Kielce, ul. Sienkiewicza 42, ☎ 041 360 00 26 / 27

-2-

9.11.2006

Manipulowalność

$$m(q) = \sqrt{\det(J(q)J^T(q))}$$

Daje nam to pewną charakterystykę pewnych konfiguracji.

$$m(q) = a_1 a_2 / s_2$$

PROFI-LINGUA

SKOŁA JĘZYKÓW OBcych

Warszawa, Al. Jerozolimskie 27 ☎ 022 628 70 04 do 06, Al. Solidarności 117 ☎ 022 652 57 17 / 18

Warszawa, ul. Mazowiecka 6/8, ☎ 022 850 52 77 / 89, ul. Śniadeckich 17, ☎ 022 626 80 04 / 05

Warszawa Ursynów, ul. Indiri Gandhi 15 ☎ 022 644 23 53 / 58

Warszawa Bielany, ul. Reymonta 12 A ☎ 022 639 76 05 i 866 86 44

Katowice, ul. 3 Maja 10 ☎ 032 253 05 72 / 73, ul. Mickiewicza 28 ☎ 032 253 05 19 / 20, Kraków, ul. Podwale 7 ☎ 012 426 16 01 / 03 lub 012 431 18 98

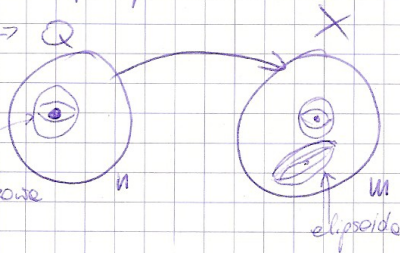
www.profi-lingua.pl

$$\dot{x} = J(q) \dot{q}$$

Takie założenie
Czysto matemat.

zbiór prędkości,
a nie konfigur.

sfera jednostkowa



$$m(q) = \sqrt{\det(J(q) J^T(q))}$$

$$\|\dot{q}\| = 1$$



$$J = U D V^T$$

$(m \times n) \quad (m \times m) (n \times n) (n \times n)$

SVD - singular value decomposition.

$$U \in SO(m)$$

$$V \in SO(n)$$

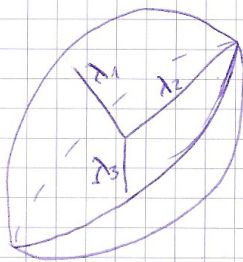
D → mac. diagonalna



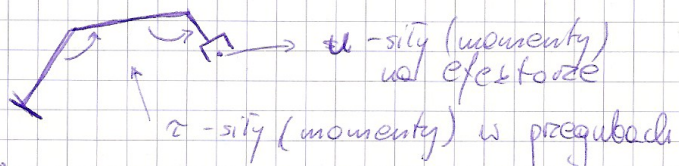
$$\lambda_i \quad | \quad i=1 \dots m$$

↑ wartości osobliwe

$$m(q) = \prod_{i=1}^m |\lambda_i|$$



\langle , \rangle - iloczyn skalarny



$$\langle u, \dot{x} \rangle = \langle \tau, \dot{q} \rangle$$

$$\langle u, J(q) \dot{q} \rangle = \langle \tau, \dot{q} \rangle$$



$$\langle J^T u, \dot{q} \rangle = \langle \tau, \dot{q} \rangle$$

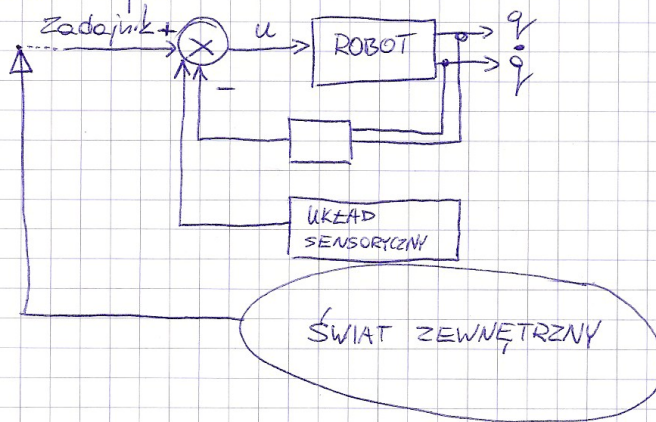
$$\tau = J^T(q) u$$

Robot jest autonomicznie sterowaną (re-) programowaną wielozadaniową maszyną manipulacyjną o wielu stopniach swobody posiadającą własności manipulacyjne i lokomocyjne, stacjonarną i mobilną stosowaną do różnych celów przemysłowych i specjalnych.

Roboty

- sztywne
 - elastyczne
- przegub
-ogumno

Generacje



argument na całym przedziale

MODELOWANIE DYNAMIKI

$$q(\cdot), t \in [0, T]$$

$$q(0) = q_0, q(T) = q_f$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{działanie}}}{S(q(\cdot))} = \int_0^T \underset{\substack{\uparrow \\ \text{f-cja Lagrange'a}}}{L(q(t), \dot{q}(t))} dt$$

$$L(q, \dot{q}) = \frac{K(q, \dot{q})}{2} - U(q)$$

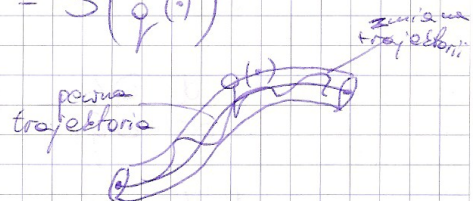
energia kinetyczna

energia potencjalna

$$\delta S = 0$$

$\delta \rightarrow$ wariacja (mała zmiana)

$$\delta S = S(q(\cdot) + \delta q(\cdot)) - S(q(\cdot))$$



Nie ma zmian na początku i końcu. \rightarrow

$$\delta q(0) = \delta q(T) = 0$$

$$S(q + \delta q) = \int_0^T L(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t)) dt =$$

$$= \int_0^T \left[L(q(t), \dot{q}(t)) + \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) \delta \dot{q} + \dots \right] dt$$

Możemy wyciąć tę część, gdyż mamy założenie, że jest małe zaburzenie.

$$\delta S = \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial q} (q(t), \dot{q}(t)) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} (q(t), \dot{q}(t)) \delta \dot{q} \right) dt = (*)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^T \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt &= \int_0^T \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d(\delta q) = \left\{ \int u dv = uv - \int v du \right\} \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_0^T - \int_0^T \delta q d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = - \int_0^T \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q dt \end{aligned} \right.$$

dzięki założeniu $\delta q(0) = \delta q(T) = 0$

$$(*) = \int_0^T \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0$$

↑ to nie może być równe 0, bo chcemy aby nasza trajektorie mogła się zaburzać

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

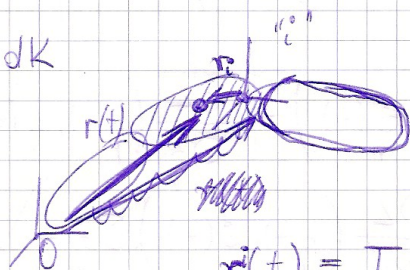
← można opuścić całkę, bo tak jest dla każdego punktu

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

↑ tak jest w ujęciu izolowanym
sily / momenty zewnętrzne

to nie Eulera - Lagrange'a.

$$K = \int dK$$



$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{T}_i^T(q) \cdot \mathbf{r}_i$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

iloczyn skalarny

$$\mathbf{v}^2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle =$$

$$\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$$

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2$$

$$V^2 = \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle = \text{tr}(\mathbf{V} \mathbf{V}^T) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} [V_1 \ V_2 \ V_3]_{1 \times 3} \right) =$$

$$= \text{tr} \begin{pmatrix} V_1^2 & V_1 V_2 & V_1 V_3 \\ V_2 V_1 & V_2^2 & V_2 V_3 \\ V_3 V_1 & V_3 V_2 & V_3^2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

$$K_S = \int_S dK = \int_S \frac{1}{2} m_i \text{tr}(\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i) ds = (*) \quad \left\{ (AB)^T = B^T A^T \right.$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \left(\mathbf{T}_0^i(\mathbf{q}) \mathbf{r}_i \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{T}_0^i}{\partial q_j} \dot{q}_j \mathbf{r}_i$$

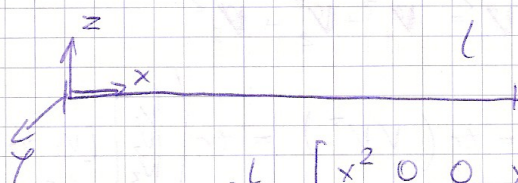
$$\text{tr}(\dot{\mathbf{r}}_i^T \dot{\mathbf{r}}_i) = \text{tr} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{T}_0^i}{\partial q_j} \dot{q}_j \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i^T \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{T}_0^i}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_k \right) \quad \left\{ \text{tr}(A) = \text{tr}(A^T) \right.$$

$$(*) = \frac{1}{2} \text{tr} \left[\sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{T}_0^i}{\partial q_j} \dot{q}_j \int m_i \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T ds \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{T}_0^i}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_k \right]$$

macierz
pseudoinercji

$$\int m_i \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T = \int m_i \begin{bmatrix} x_i^2 & x_i y_i & x_i z_i & x_i \\ y_i x_i & y_i^2 & y_i z_i & y_i \\ z_i x_i & z_i y_i & z_i^2 & z_i \\ x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_i$$

↑
takie oznaczenie
nie jest to jacobian



$$m = \rho \cdot l$$

$$J = \int_0^l \rho \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} dx$$

$$\int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^l = \frac{1}{3} l^3$$

$$\int_0^l x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^l = \frac{1}{2} l^2$$

$$\int_0^l 1 dx = l$$

$$\frac{1}{3} \rho l^3 = \frac{1}{3} \rho l \cdot l^2$$

\downarrow
 m

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} m l^3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} m l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} m l & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

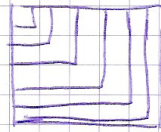
$$m \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{--- środek masy po wsp } x$$

$$\sum_{k=1}^n Q_{jk}(q) \ddot{q}_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{jk}^i(q) \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i(q) = u_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$Q_{jk}(q) = \sum_{i=1}^n \text{tr} \left[\frac{\partial T_0^i}{\partial \dot{q}_j} J_i \left(\frac{\partial T_0^i}{\partial \dot{q}_k} \right)^T \right]$$

$$C_{jk}^i(q) = \sum_{s=\max(j,k)}^n \text{tr} \left[\frac{\partial^2 T_0^s}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} J_s \left(\frac{\partial T_0^s}{\partial \dot{q}_i} \right)^T \right]$$


WŁASNOŚĆ

 $Q \rightarrow$ macierz inercji, symetryczna, dodatnio-określonaSily bezwładności $C \rightarrow$ sily Coriolisa i odśrodkowe

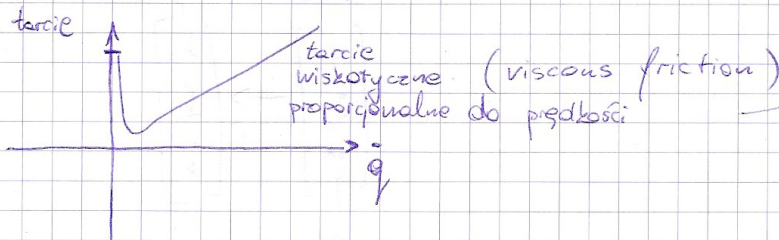
$$\frac{dQ}{dt} = C + C^T$$

 $D \rightarrow$ wektor sił grawitacji

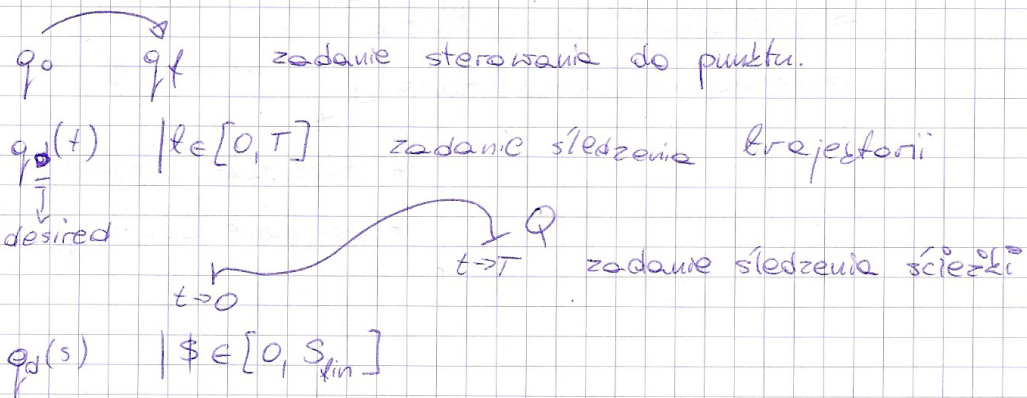
$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + R\dot{q} + D(q) = u$$

$-M = M^T$

 $\dot{q}_i \dot{q}_j$ $i \neq j$ ← siły Coriolisa
 \dot{q}_i^2 ← siły odśrodkowe
 $D(q)$ ← wektor grawitacji

zjawiska dyssypatywne (tracące energię)



Mathematica
LISP
PROLOG



Ze względu na optymalność

- optymalne
- nieoptymalne

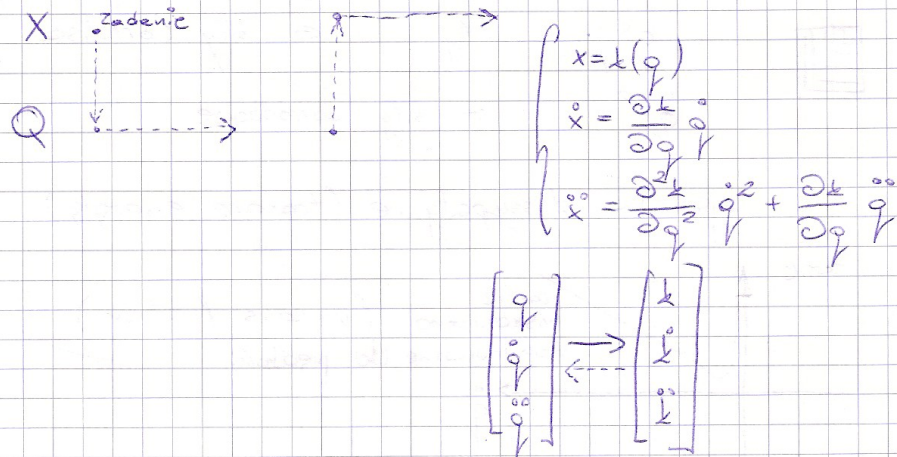
Ze względu na architekturę

- scentralizowane
- zdecentralizowane

Ze względu na przestrzeń, w której sterujemy

→ wewnętrzna (konfiguracyjna)

→ zewnętrzna (zadaniowa)



Ze względu na znajomość modelu

→ pełna znajomość modelu

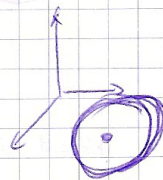
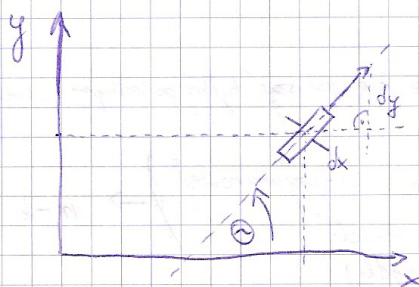
→ nieznaną parametryczną

→ nieznaną strukturalną.

nie nie wiemy.

- sterowanie odporne (robust control)
- sterowanie adaptacyjne (adaptive control)

układy holonomiczne vs nieholonomiczne



$$\frac{dy}{dx} = \tan \theta$$

$$\begin{aligned} \cos \theta \, dy &= dx \sin \theta \quad / \frac{d}{dt} \\ \sin \theta \, \dot{x} - \cos \theta \, \dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$$

$$A(q) \dot{q} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0$$

ograniczenia w formie Pfaff

$$A(q) \dot{q} = 0$$

holonomiczne: $\exists \Phi(q): \frac{d\Phi(q)}{dt} = A(q) \dot{q}$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

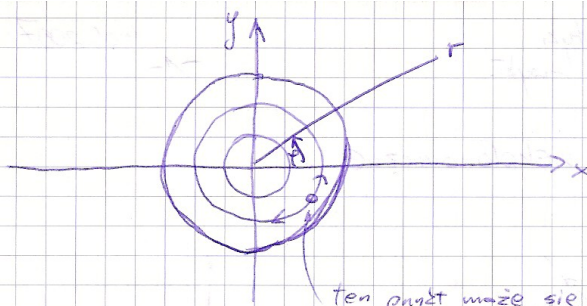
$$\Phi(q) = \text{const}$$

np. $q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \dot{y}^2 = 0$$

$$\Phi(q) = \Phi(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \quad \text{jest holonomic}$$

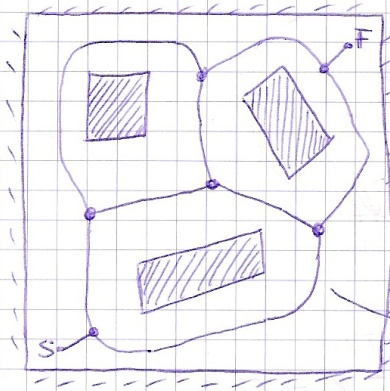


ten punkt może się poruszać tylko po jednym okręgu.

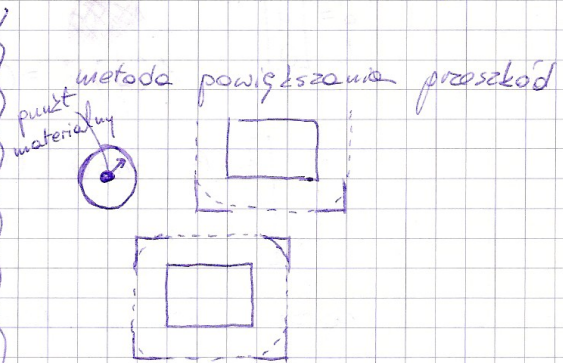
układ działa w przestrzeni n -wymiarowej \rightarrow $n-k$ wymiarowa.
 k ograniczeń holonomicznych (niezależnych)

Metody planowania ruchu układów holonomicznych.

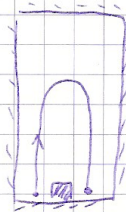
1° diagram Voronoia



odcinek prosty
i tu!



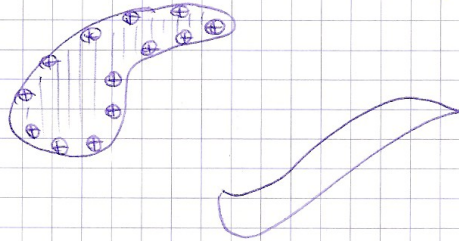
- używana najczęściej dla środowisk statycznych;
- Ruch robota bezpieczny
- metoda globalna (trzeba mieć pełną wiedzę o środowisku i planując z góry całą trasę)



2° Metoda pól potencjałowych

⊕ Robot
⊖ → cel ⊕ przeszkody

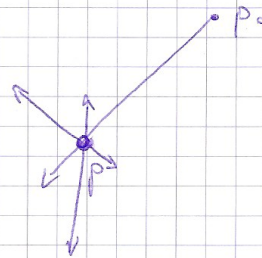
zakłada się, że odległość
w kierunku celu w każdym
miejscu jest taka sama



$$F_{odp} = k \cdot \frac{1}{\|p - p_o\|^n}$$

czasem
dodaje się
współczynnik
np. 2

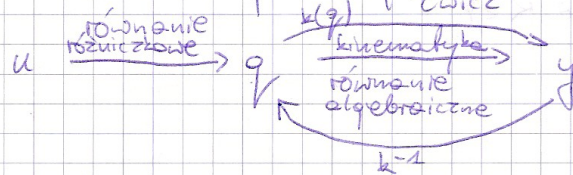
Robot ⊕ →



- "pijany" (ślęczenie ścian)
- ruchy Browna.

Podstawy robotyki - ćwiczenie

30.11.2006



$$y = k(q(t))$$

$$\dot{y} = \frac{\partial k}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} = \left[\frac{\partial k}{\partial q} \right] \cdot \dot{q}$$

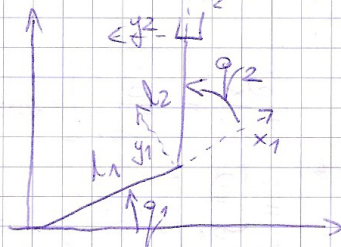
Śty prędkości transformuje się przez Jacobian.

$$\dot{y} = J \cdot \dot{q}$$

y - znane
 q - szukane } kinematyka odwrotna

$$J^{-1} \dot{y} = \dot{q}$$

$$J^{-1} \dot{y} = \dot{q}$$



$$A_1 = R(z, q_1) \cdot Tr(x_1, l_1) x_0$$

$$A_2 = R(z, q_2) \cdot Tr(x_1, l_2)$$

$$\begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & c_{12}l_2 + c_1l_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & s_{12}l_2 + s_1l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = c_{12}l_2 + c_1l_1$$

$$y = s_{12}l_2 + s_1l_1$$

$$z = 0$$

$$RPY = (k_1, k_2)$$

$$\alpha = q_1 + q_2$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = 0$$

$$E = R_z \phi R_y \theta R_z \psi$$

$$\phi = q_1$$

$$\theta = 0$$

$$\psi = q_2$$

Reprezentacja RPY

$$J_{6 \times n} = \frac{\partial k}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial q} \\ \frac{\partial k_2}{\partial q} \\ \vdots \\ \frac{\partial k_6}{\partial q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial q_1} & \frac{\partial k_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial k_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial k_6}{\partial q_1} & \frac{\partial k_6}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial k_6}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Może mieć więcej na nasze
zadanie (jeśli potrzebujemy
Dla ~~niektórych~~ up. tylko położenie, a nie orientację)

Dla 2-wahadła

$$x = c_{12} l_2 + c_{11} l_1$$

$$y = s_{12} l_2 + s_{11} l_1$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{bmatrix} = (*) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial q_1} &= \frac{\partial}{\partial q_1} [l_2 \cos(q_1 + q_2) + l_1 \cos q_1] \\ &= \frac{\partial}{\partial q_1} [l_2 \cos(q_1 + q_2)] + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial q_1} l_1 \cos q_1 = \\ &= -l_2 \sin(q_1 + q_2) - l_1 \sin q_1 \end{aligned}$$

$$(*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{bmatrix} = (**)$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_1} = -l_2 s_{12} - l_1 s_{11}$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_2} = -l_2 s_{12}$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_1} = l_2 c_{12} + l_1 c_{11}$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_2} = l_2 c_{12}$$

$$\frac{\partial y}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} [l_2 \sin(q_1 + q_2) + l_1 \sin q_1]$$

$$(**) = \begin{bmatrix} -l_2 s_{12} - l_1 s_1 & -l_2 s_{12} \\ l_2 c_{12} + l_1 c_1 & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Osobliwości są wtedy, gdy J (Jacobian traci rang!)

Gdzie jest osobliwość?

Tam, gdzie $\text{rank} \left[\frac{\partial k}{\partial q} \right] = \text{rank } J < \text{rank max}$

→ przypadku macierzy kwadratowej

$$\det J = (-l_2 s_{12} - l_1 s_1) l_2 c_{12} + l_2 s_{12} (l_2 c_{12} + l_1 c_1) = 0$$

$$= -\cancel{l_2^2 s_{12} c_{12}} - l_1 l_2 s_1 c_{12} + l_2^2 s_{12} c_{12} + \cancel{l_2 c_1 s_{12}} =$$

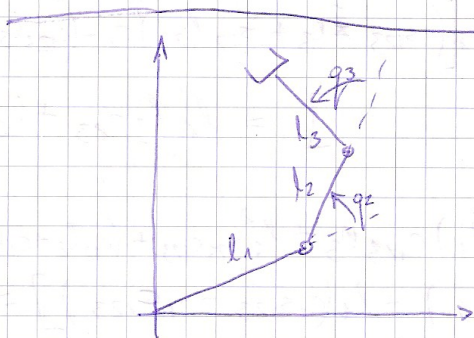
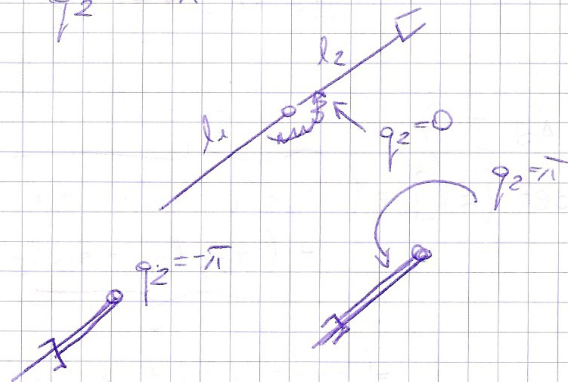
$$= l_1 l_2 (s_{12} c_1 - c_{12} s_1) =$$

$$= l_1 l_2 \sin(\phi_1 + q_2 - \phi_1) = l_1 l_2 s_2$$

Osobliwość położenia dla 2-wahadła:

$$s_2 = 0 \Rightarrow q_2 = k\pi$$

$$q_2 = 0$$



$$K = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & c_{123} l_3 + c_2 l_2^+ \\ s_{123} & c_{123} & 0 & s_{123} l_3 + s_2 l_2^+ \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = c_{123} l_3 + c_{12} l_2 + c_1 l_1$$

$$y = s_{123} l_3 + s_{12} l_2 + s_1 l_1$$

$$J = \begin{bmatrix} \textcircled{x_1} & \textcircled{x_2} & \textcircled{x_3} \\ -s_{123} l_3 - s_{12} l_2 - s_1 l_1 & s_{123} l_3 - s_{12} l_2 & s_{123} l_3 \\ \textcircled{y_1} & \textcircled{y_2} & \textcircled{y_3} \\ c_{123} l_3 + c_{12} l_2 + c_1 l_1 & c_{123} l_3 + c_{12} l_2 & c_{123} l_3 \end{bmatrix}$$

I sposób - algebraiczny

wszystkie podwyznaczniki max rzędu mają być osobliwe.

$$\det [ab] = 0$$

$$\circ \det [ac] = 0$$

$$\circ \det [bc] = 0$$

II sposób - za pomocą macierzy manipulowalności $J J^T$

$$M = J \circ J^T$$

$$\det M = J J^T = 0$$

Ad I)

$$\begin{aligned} \det [ab] &= \overbrace{(-s_{123} l_3 - s_{12} l_2 - s_1 l_1)}^{-x - s_1 l_1} \overbrace{(c_{123} l_3 + c_{12} l_2)}^y + \\ &\quad + \overbrace{(s_{123} l_3 + s_{12} l_2)}^x \overbrace{(c_{123} l_3 + c_{12} l_2 + c_1 l_1)}^{y + c_1 l_1} = \\ &= (-x - s_1 l_1) y + x (y + c_1 l_1) = -xy - s_1 l_1 y + xy + x c_1 l_1 = \\ &= l_1 (x c_1 - y s_1) = l_1 \left[(s_{123} l_3 + s_{12} l_2) c_1 - (c_{123} l_3 + c_{12} l_2) s_1 \right] = \\ &= l_1 \left[l_3 (s_{123} c_1 - c_{123} s_1) + l_2 (s_{12} c_1 - c_{12} s_1) \right] = l_1 (l_3 s_{23} + l_2 s_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det [ac] &= -l_3^2 s_{123} c_{123} - (s_{12} l_2 + s_1 l_1) c_{123} l_3 + l_3^2 s_{123} c_{123} + (c_{12} l_2 + c_1 l_1) s_{123} l_3 = \\ &= l_3 [l_2 (s_{123} c_{12} - s_{12} c_{123}) + l_1 (c_1 s_{123} - s_1 c_{123})] = \\ &= l_3 (l_2 s_3 + l_1 s_{23}) \end{aligned}$$

$$\det [bc] = -l_3^2 s_{123} c_{123} - l_2 l_3 s_{12} c_{123} + l_3^2 s_{123} c_{123} + l_1 l_2 c_{12} s_{123} =$$

$$= l_2 l_3 s_3$$

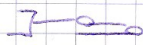
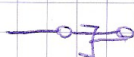
$$\begin{cases} l_1(l_3 s_{23} + l_2 s_2) = 0 \\ l_3(l_2 s_3 + l_1 s_{23}) = 0 \\ l_2 l_3 s_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} q_2 = 0 \\ q_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} q_2 = 0 \\ q_3 = \pm \pi \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} q_2 = \pi \\ q_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} q_2 = \pm \pi \\ q_3 = \pm \pi \end{matrix}$$



Ad II)

$$M = JJ^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 & y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \end{bmatrix}$$

$$\det M = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 =$$

$$= \cancel{x_1^2 y_1^2} + \cancel{x_1^2 y_2^2} + \cancel{x_1^2 y_3^2} + \cancel{x_2^2 y_1^2} + \cancel{x_2^2 y_2^2} + \cancel{x_2^2 y_3^2} + \cancel{x_3^2 y_1^2} + \cancel{x_3^2 y_2^2} + \cancel{x_3^2 y_3^2} +$$

$$- (x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_1^2 + x_3^2 y_1^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 + 2x_1 x_3 y_1 y_3 + 2x_2 x_3 y_2 y_3) =$$

$$= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 =$$

$$= (\det [ab])^2 + (\det [ac])^2 + (\det [bc])^2$$

Laborki:

1. IRB-1400
2. PR-02 - matryca diodowa i "Basic"
3. Khepera - mały robot mobilny

ćw 3 - 8⁰⁰

ćw 1 i 2 : 8³⁰

Literatura:

zpcir.~~ict~~ict.pwr.wroc.pl

~~LABORIO~~

→ lab.ict.pwr.wroc.pl

LABORIO