

4. Testowanie hipotez statystycznych

Badania statystyczne mają na ogół dwojaki cel:

- ocenę nieznaną parametrów rozkładów, lub
- potwierdzenie (niekiedy – obalenie) pewnych przypuszczeń, nazywanych hipotezami statystycznymi, dotyczących rozkładów.

Metody statystyczne, którymi zajmowaliśmy się dotychczas, służyły do oceny nieznaną parametrów. Obecnie poznamy metody służące do sprawdzania (weryfikacji) hipotez statystycznych.

Hipotezą statystyczną – nazywamy sformułowane przypuszczenie, które dotyczy:

1. wartości nieznaną parametrów w populacji generalnej - **hipotezy parametryczne**,
2. kształtu rozkładów teoretycznych dla obserwowanych zmiennych losowych - **hipotezy nieparametryczne**.

Weryfikację stawianą hipotez statystycznych przeprowadza się na podstawie otrzymanych wyników próby losowej.

Procedura postępowania, za pomocą której z każdej możliwej dokonanej próby losowej $\{X_i\}$, przy ustalonym prawdopodobieństwie, formułujemy wniosek (decyzję) przyjęcia lub odrzucenia weryfikowanej hipotezy, jest nazywana **testem statystycznym**.

W celu zilustrowania problemu testowania hipotez statystycznych rozpatrzmy następujący przykład:

a) W fabryce jest maszyna do produkcji pewnych detali. Aby sprawdzić, jaki procent wyrobów produkowanych przez nią ma wady, trzeba wylosować pewną liczbę detali i zbadać, ile z nich nie spełnia przyjętej normy jakości. Jeśli wylosowano n detali i wśród nich jest n_w wadliwych, to: n_w/n jest oceną prawdopodobieństwa wyprodukowania wadliwego detalu przez badaną maszynę. Zadanie sprowadza się więc do oceny pewnego parametru.

b) Fabryka chce kupić nową maszynę, a producent zapewnia, że przeciętnie tylko 1 na 100 wyprodukowanych detali jest wadliwy. Aby to sprawdzić losuje się np. 500 detali wyprodukowanych na tej maszynie i bada się ich jakość. Przypuśćmy, że $n_w = 20$ z nich nie spełnia normy jakości. Czy na podstawie takiego wyniku badań można odrzucić zapewnienie producenta? Zadanie więc sprowadza się do podjęcia decyzji o przyjęciu lub odrzuceniu hipotezy producenta, że prawdopodobieństwo wyprodukowania wadliwego elementu nie jest większe od $1/100 = 0,01$.

Ogólne sformułowanie problemu testowania hipotez statystycznych

Niech $f(x, \theta)$ - gęstość rozkładu prawdopodobieństwa rozważanej cechy X . Zakładamy, że funkcja ta jest znana z dokładnością do parametru θ .

Stawiamy hipotezę zwaną **hipotezą zerową** H_0 orzekającą, że $\theta = \theta_0$, gdzie θ_0 jest określone w wyniku badań (estymator).

Ze zbioru wszystkich możliwych w danym zagadnieniu hipotez wyróżniamy, ze względu na aspekt praktyczny, tę hipotezę, która podlega weryfikacji. Tę wyróżnioną hipotezę nazywamy **hipotezą zerową** i oznaczamy symbolem H_0 .

Wszystkie pozostałe hipotezy nazywamy **hipotezami alternatywnymi** i oznaczamy symbolem H_1 .

Hipoteza zerowa H_0 - podstawowe przypuszczenie, które jest przedmiotem weryfikacji.

Hipoteza alternatywna H_1 - hipoteza konkurencyjna w stosunku do hipotezy zerowej:

H_0 : w populacji generalnej występuje pewna własność,

H_1 : w populacji generalnej nie występuje pewna własność.

W procesie weryfikacji:

- odrzuca się hipotezę H_0 i wówczas przyjmuje się hipotezę H_1 lub:
- stwierdza się, że nie ma podstaw, aby odrzucić hipotezę H_0 .

Aby sprawdzić hipotezę H_0 , pobieramy próbę z rozważanej populacji:

X_1, \dots, X_n - niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie $f(x, \theta)$.

Następnie przyjmujemy pewien poziom istotności α , gdzie $0 < \alpha < 1$ i konstruujemy na podstawie wylosowanej próby przedział ufności dla parametru θ na poziomie ufności $1 - \alpha$.

Jeśli θ_0 znajdzie się w tym przedziale, przyjmujemy sprawdzaną hipotezę: $H_0 : \theta = \theta_0$. W przeciwnym razie odrzucamy ją.

Stosowanie przedstawionej reguły sprawdzania hipotez statystycznych zapewnia kontrolę częstości popełnianych tzw. **błędów pierwszego rodzaju**.

Błąd pierwszego rodzaju – prawdopodobieństwo błędnego odrzucenia hipotezy H_0 jest równe przyjętemu poziomowi istotności α .

Oznacza to, że jeśli zastosowalibyśmy tę regułę n razy w sytuacjach, kiedy postawione hipotezy są prawdziwe, wówczas oczekiwana liczba błędnych decyzji byłaby równa $\alpha * n$.

Przedstawioną metodę można stosować do sprawdzania hipotez statystycznych dotyczących parametrów każdego rozkładu.

Najważniejsze punkty tej metody:

- 1) Ustalenie rozkładu $f(x, \theta)$ badanej wielkości X .
- 2) Postawienie hipotezy $H_0 : \theta = \theta_0$ oraz hipotezy alternatywnej H_1 .
- 3) Ustalenie poziomu istotności α (zwykle 0,01, 0,05) ..
- 4) Skonstruowanie dla parametru θ przedziału ufności na poziomie ufności $1 - \alpha$.
- 5) Pobranie próby (przeprowadzenie eksperymentu i zanotowanie wyników).
- 6) Przyjęcie hipotezy H_0 , jeśli θ_0 leży w $(1 - \alpha)\%$ przedziale ufności (obszar przyjęć).
- 7) Odrzucenie hipotezy H_0 , gdy θ_0 nie leży w $(1 - \alpha)\%$ przedziale ufności (obszar krytyczny).

Punkty 4, 6, 7 można zastąpić punktami równoważnymi:

- 4a) Określenie statystyki testowej T oraz obszaru przyjęć i obszaru krytycznego dla hipotezy H_0 .
- 6a) Przyjęcie hipotezy H_0 , jeśli zaobserwowana wartość T znajdzie się w tzw. obszarze przyjęć.
- 7a) Odrzucenie hipotezy H_0 , jeśli zaobserwowana wartość T znajdzie się w tzw. obszarze krytycznym.

Testowanie jest prawidłowe tylko wtedy, gdy kolejne etapy są wykonywane w podanej kolejności. Hipotezę należy formułować przed eksperymentem. Każde odstępstwo powoduje, że tracimy kontrolę nad prawdopodobieństwem popełnienia **błędu pierwszego rodzaju**.

Błąd pierwszego rodzaju – prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy H_0 , gdy jest ona prawdziwa.

Błąd drugiego rodzaju – przyjęcie hipotezy H_0 jako prawdziwej, podczas gdy jest ona fałszywa.

W testach statystycznych stosowanych w praktyce bardzo często nie określa się błędu drugiego rodzaju, natomiast zbiór krytyczny buduje się w ten sposób, aby zagwarantować małe prawdopodobieństwo (równe obranemu poziomowi istotności α) zaobserwowania wartości statystyki testowej należącej do tego zbioru. Jeżeli obliczona wartość statystyki testowej będzie zawierała się w ustalonym zbiorze krytycznym, to będzie można twierdzić, że zaszło zdarzenie o małym prawdopodobieństwie α i wówczas weryfikowaną hipotezę H_0 należy odrzucić. W przypadku, gdy obliczona wartość statystyki testowej nie znajdzie się w zbiorze krytycznym, a to oznacza, że prawdopodobieństwo takiego zdarzenia jest większe od α , to można jedynie twierdzić, że nie ma podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy H_0 na podstawie analizowanej jednej próby.

Konstrukcja wyżej określonych testów jest dosyć prosta, gdyż nie uwzględnia błędu drugiego rodzaju. Ceną za tę prostotę jest to, że nie możemy formułować wniosku o przyjęciu weryfikowanej hipotezy H_0 , lecz zawsze formułujemy wniosek o treści: „**brak podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy H_0** ”. Opisany powyżej rodzaj testów nosi nazwę **testów istotności**. W testach tych wskazane jest takie sformułowanie hipotezy H_0 , co do której mamy większe przekonanie o jej fałszywości niż o jej prawdziwości.

Zwróćmy uwagę na to, że nie został tutaj postawiony problem, aby rozstrzygać o tym, czy postawiona hipoteza H_0 jest czy nie jest prawdziwa. Ograniczyliśmy się tylko do podania reguły określającej, kiedy na podstawie próby hipotezę H_0 należy przyjąć, a kiedy odrzucić. Przyjęcie hipotezy H_0 nie oznacza naszego

całkowitego przekonania o jej prawdziwości. Również jej odrzucenie, nie oznacza, że jesteśmy przekonani o tym, że jest ona fałszywa.

Obszar krytyczny testu - to podzbiór przestrzeni próby o tej własności że jeśli otrzymamy w próbie punkt przestrzeni próby należący do tego podzbioru, to podejmuje się decyzję odrzucenia hipotezy zerowej. W zależności od hipotezy alternatywnej (H_1) i zerowej (H_0) wyróżnia się:

- obszar krytyczny testu dwustronny: jest to obszar złożony z dwóch rozłącznych podzbiorów z przestrzeni próby wyznaczony najczęściej symetrycznie w rozkładzie statystyki. Testu z dwustronnym obszarem krytycznym używa się zwykle wtedy gdy hipoteza alternatywna jest w postaci nierówności typu \neq ,
- obszar krytyczny testu jednostronny: jest to obszar złożony z jednego podzbioru przestrzeni próby wybranego z jednej strony w rozkładzie odpowiedniej statystyki. Hipoteza alternatywna H_1 występuje w postaci nierówności typu $<$ lub $>$.

1) **rozkład dwustronny** (obszar krytyczny testu dwustronny $U_{1-\frac{1}{2}\alpha}$)

$$H_0 : m = m_0$$

$$H_1 : m \neq m_0$$

średnia z próby jest zgodna ze średnią populacji generalnej, dla rozkładu dwustronnego wartość statystyki t odczytujemy z tablicy t - Studenta dla $n-1$ i α

2) **rozkład prawostronny** (obszar krytyczny prawostronny $U_{1-\alpha}$)

$$H_0 : m = m_0$$

$$H_1 : m > m_0$$

dla rozkładu prawostronnego wartość statystyki t odczytujemy z tablicy t - Studenta dla $n-1$ i 2α

3) **rozkład lewostronny** (obszar krytyczny lewostronny $U_{\alpha(-)}$)

$$H_0 : m = m_0$$

$$H_1 : m < m_0$$

dla rozkładu lewostronnego wartość statystyki t odczytujemy z tablicy t - Studenta dla $n-1$ i 2α .

4.1. Przykłady testów statystycznych.

4.1.1. Testy dla wartości średniej.

Niech nieznanymi parametrami próby będą wartość oczekiwana i wariancja. Rozpatrzmy 3 modele:

1. rozkład normalny ze znaną wariancją,
2. rozkład normalny z nieznaną wariancją,
3. rozkład dowolny ze skończoną wariancją i duża próba.

We wszystkich modelach n – liczebność próby.

Model 1.

Populacja generalna ma rozkład $N(m; \sigma)$, odchylenie standardowe σ jest znane. Nieznany jest parametr m , dla którego stawiamy hipotezę:

$$H_0 : m = m_0, \text{ przeciwko jednej z hipotez:}$$

$$H_1 : m \neq m_0,$$

$$H_1 : m > m_0,$$

$$H_1 : m < m_0.$$

Do weryfikacji hipotezy H_0 w tym modelu wykorzystujemy statystykę U , która jest ściśle związana z wartością \bar{X} i odchyleniem standardowym σ :

$$U = \frac{\bar{X} - m_0}{\sigma} \sqrt{n}, \quad (4.1)$$

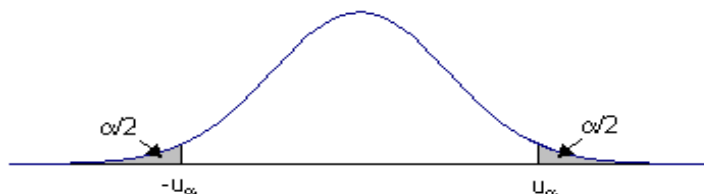
która przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 ma rozkład normalny standaryzowany $N(0;1)$.

W przypadku hipotezy alternatywnej:

$H_1 : m \neq m_0$ obszar krytyczny jest dwustronny, symetryczny i dla poziomu istotności α ma postać $(-\infty, -u_\alpha) \cup (u_\alpha, \infty)$, gdzie u_α wyznacza się z:

$$P(|U| > u_\alpha) = 2P(U > u_\alpha) = 2(1 - \Phi(u_\alpha)) = \alpha.$$

A stąd: $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, gdzie u_α - wartość zmiennej losowej U odczytana z tablicy dystrybucyjnej rozkładu normalnego standaryzowanego.

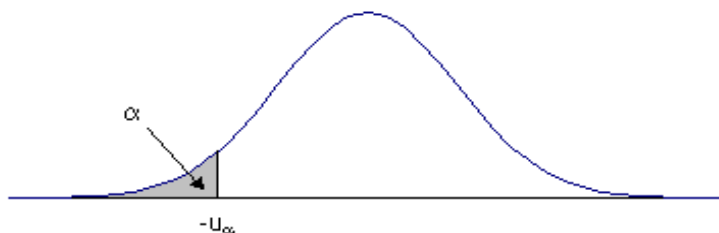


W przypadku hipotezy alternatywnej:

$H_1 : m < m_0$ obszar krytyczny jest lewostronny: $(-\infty, -u_\alpha)$, gdzie u_α wyznacza się z: $P(U < -u_\alpha) = \alpha$.

W tym przypadku: $\Phi(-u_\alpha) = 1 - \Phi(u_\alpha) = \alpha$, czyli: $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$,

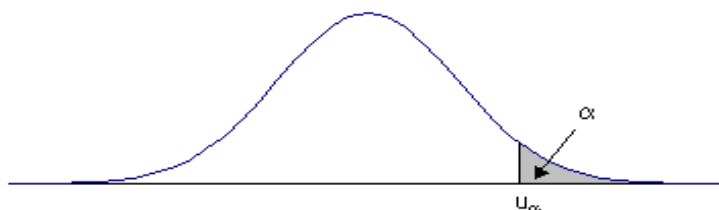
gdzie u_α - wartość zmiennej losowej U odczytana z tablicy dystrybucyjnej rozkładu normalnego standaryzowanego.



$H_1 : m > m_0$ obszar krytyczny jest prawostronny: (u_α, ∞) , gdzie u_α wyznacza się z: $P(U > u_\alpha) = \alpha$.

W tym przypadku: $1 - \Phi(u_\alpha) = \alpha$, czyli: $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha$,

gdzie u_α - wartość zmiennej losowej U odczytana z tablicy dystrybucyjnej rozkładu normalnego standaryzowanego.



Przykład 4.1.

Pewna populacja generalna ma rozkład normalny $N(2; 0,2)$. Pobrano z niej próbę $n = 100$ danych i otrzymano wartości: $\bar{X} = 2,0031$ i $\hat{S} = 0,1967$.

Sprawdzić na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ hipotezę, że $m = 2$.

Model 2.

Populacja generalna ma rozkład $N(m; \sigma)$, odchylenie standardowe σ jest nieznane. Hipotezy zerowa i alternatywne są takie same jak w poprzednim modelu. Ponieważ σ nie jest znane, więc statystyka służąca do weryfikacji hipotezy będzie dana wzorem (przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0):

:

$$t = \frac{\bar{X} - m_0}{S} \sqrt{n-1} = \frac{\bar{X} - m_0}{\hat{S}} \sqrt{n}, \quad (4.2)$$

o której wiemy, że ma rozkład niezależny od σ , a mianowicie – rozkład t Studenta o $n-1$ stopniach swobody.

Wobec tego t_α wyznaczamy ze wzorów:

$$P(|t| > t_\alpha) = \alpha \text{ dla dwustronnego obszaru krytycznego, lub}$$

$$P(t > t_\alpha) = \alpha \text{ dla jednostronnych obszarów krytycznych.}$$

Jeżeli tablice statystyczne podają tylko wartość t_α dla danych α i n , to przy jednostronnych obszarach krytycznych trzeba skorzystać z zależności:

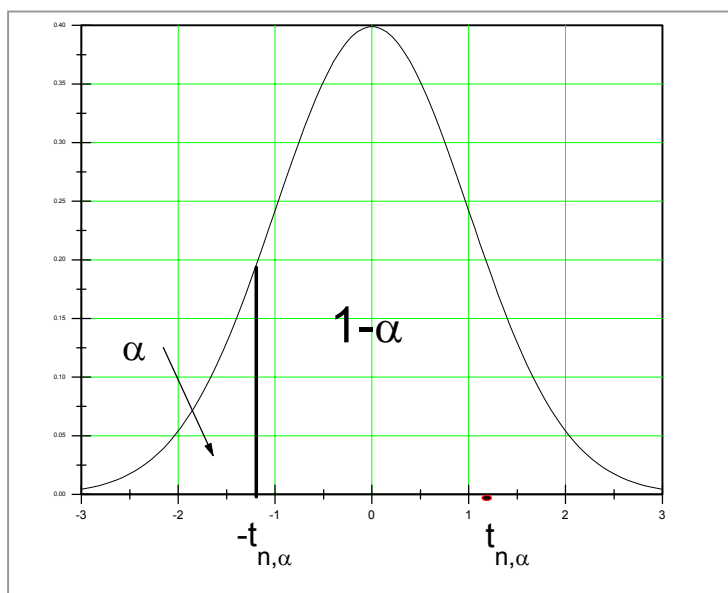
$$2P(t > t_\alpha) = P(|t| > t_\alpha).$$

Hipotezę $H_0 : m = m_0$ odrzucamy, gdy

$$|\bar{X} - m_0| > t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}},$$

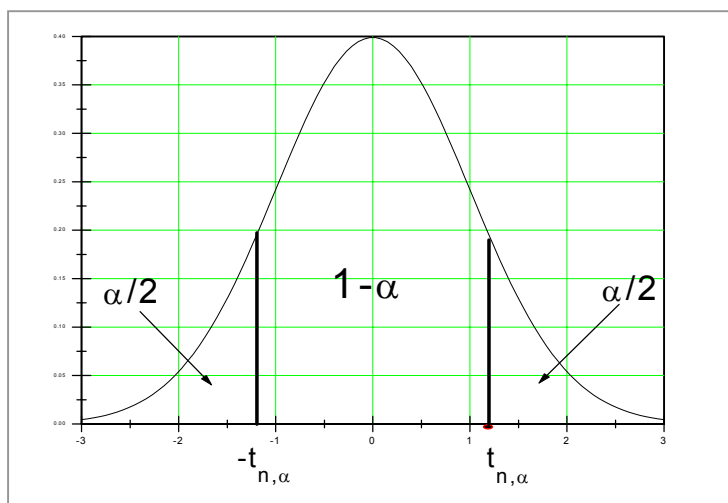
a przyjmujemy, gdy

$$|\bar{X} - m_0| \leq t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n-1}}$$



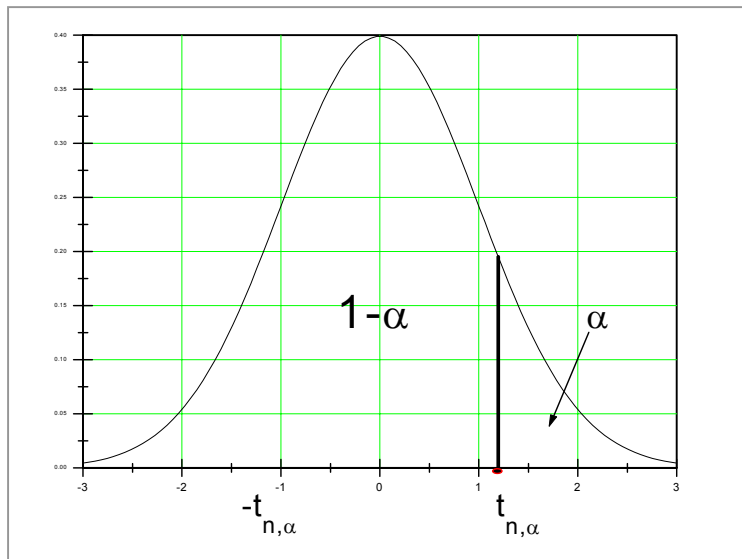
Jednostronny obszar krytyczny
($-\infty, -t_{n,\alpha}$)

$t_{\alpha, n-1}$



Dwustronny obszar krytyczny
($-\infty, -t_{n,\alpha}$), ($t_{n,\alpha}, +\infty$)

$t_{\alpha/2, n-1}$



Jednostronny obszar krytyczny
($t_{n,\alpha}, +\infty$)

$t_{\alpha, n-1}$

Przykład 4.2.

Pewna populacja generalna ma rozkład normalny $N(2; 0,2)$. Pobrano z niej próbę $n = 4$ dane i otrzymano wartości: $\bar{X} = 1,9650$ i $S = 0,1464$.

Sprawdzić na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ hipotezę, że $m = 1,8$.

Model 3.

Populacja generalna ma rozkład dowolny o skończonej wariancji, parametr σ może, ale nie musi być znany, natomiast próba jest duża ($n > 30$). Aby móc zweryfikować hipotezę o nieznanej wartości przeciętnej cechy X takiej populacji, musimy znać rozkład jakiejś statystyki, która może służyć za test. Tylko wtedy możemy zbudować obszar krytyczny. Nie znając rozkładu cechy X , nie potrafimy znaleźć dokładnego rozkładu żadnej statystyki. Nie jest to jednak sytuacja bez wyjścia. Można bowiem skorzystać z twierdzenia Lindeberga – Levy’ego, które mówi, że jeśli n jest dostatecznie duże, a zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n są niezależne, o jednakowym rozkładzie, i zachodzi: $E(X_1) = \dots = E(X_n) = m$ oraz:

$V(X_1) = \dots = V(X_n) = \sigma^2$, to zmienna losowa $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ ma rozkład normalny o parametrach m i

σ / \sqrt{n} . Przyjmujemy również: $\sigma^2 \approx S_n^2$ (wariancja empiryczna jest zbliżona z prawdopodobieństwem 1 do wariancji rozważanej cechy populacji generalnej). Wobec powyższego, dochodzimy do wniosku, że chcąc zweryfikować hipotezę:

$H_0 : m = m_0$, przeciwko hipotezie alternatywnej:

$H_1 : m \neq m_0$,

w przypadku, gdy nie ma żadnych informacji o postaci rozkładu cechy X w populacji, należy pobrać dostatecznie liczną próbę, a następnie za test przyjąć statystykę \bar{X}_n .

Hipotezę H_0 przyjmujemy, gdy:

$$\frac{|\bar{X}_n - m_0|}{S_n} \sqrt{n} \leq \varepsilon_\alpha \quad (4.3)$$

odrzucaemy, jeśli:

$$\frac{|\bar{X}_n - m_0|}{S_n} \sqrt{n} > \varepsilon_\alpha$$

gdzie ε_α jest liczbą odczytaną z tablicy rozkładu normalnego, spełniającą warunek:

$$P\left(\frac{|\bar{X}_n - m_0|}{S_n} \sqrt{n} > \varepsilon_\alpha\right) = \alpha \quad (4.4)$$

Przykład 4.3.

Zużycie wody przez zakład przemysłowy podlega losowym wahaniom w kolejnych dniach. Na podstawie obserwacji dla $n=256$ dni stwierdzono, że średnie dzienne zużycie wody wynosi $\bar{X}_{256}=102$ hl, a średnie odchylenie kwadratowe $S_{256}^2 = 64 \text{ hl}^2$. Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0.05$, zweryfikować hipotezę, że średnie dzienne zużycie wody wynosi 100 hl.

4.1.2. Testy weryfikujące hipotezę o równości dwóch wartości oczekiwanych

Model I.

Często zachodzi konieczność porównania wyników dwóch prób i odpowiedzenia na pytanie, czy pochodzą one z tej samej populacji generalnej. Populacje mają rozkłady $N(m_1; \sigma_1)$ i $N(m_2; \sigma_2)$, a odchylenia standardowe σ_1, σ_2 są znane. Nieznane są parametry m_1, m_2 , dla których stawiamy hipotezę:

$H_0 : m_1 = m_2$, przeciwko jednej z hipotez alternatywnych:

$H_1 : m_1 \neq m_2$,

$H_1 : m_2 > m_2$,

$H_1 : m_1 < m_2$.

Z dwóch niezależnych prób o licznosciach n_1, n_2 obliczamy statystykę:

$$U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad (4.7)$$

Statystyka ta ma, przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 rozkład $N(0; 1)$. Obszar krytyczny przyjmujemy dwustronny, prawostronny lub lewostronny, w zależności od hipotezy alternatywnej.

Model II.

Populacje mają rozkłady $N(m_1; \sigma_1)$ i $N(m_2; \sigma_2)$, a odchylenia standardowe σ_1, σ_2 są nieznane, ale wiadomo że są równe: $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$. Można udowodnić następujące twierdzenie:

Twierdzenie:

Jeżeli mamy dwie próby wylosowane z populacji o takiej samej wariancji σ i rozkładach $N(m_1; \sigma)$, $N(m_2; \sigma)$, to statystyka:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \quad (4.8)$$

ma, przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 rozkład t Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody.

Model III

Nieznany (dowolny) rozkład, duża próba. Sprawdzianem testu jest statystyka:

$$u = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

4.1.3 Testy dla wariancji.

Niech badana cecha X populacji generalnej ma rozkład normalny $N(m; \sigma)$, przy czym oba parametry są nieznane. Formułujemy hipotezę:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, \text{ wobec hipotez alternatywnych:}$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2,$$

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2.$$

Zakładamy poziom istotności $\alpha \in (0;1)$.

Do testowania hipotezy w tym modelu wykorzystujemy statystykę χ^2 :

$$\chi_{obs}^2 = \frac{nS^2}{\sigma_0^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2} \quad (4.5)$$

która, przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 , ma rozkład chi – kwadrat o $n - 1$ stopniach swobody.

a) Gdy hipotezą alternatywną jest: $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$, wówczas zbiorem krytycznym jest przedział:

$(0; \chi_{1-\alpha; n-1}]$, gdzie: $\chi_{1-\alpha; n-1}$ - kwantyl rozkładu chi – kwadrat o $n-1$ stopniach swobody.

b) Gdy hipotezą alternatywną jest: $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$, wówczas zbiorem krytycznym jest przedział:

$[\chi_{\alpha; n-1}; +\infty)$, gdzie: $\chi_{\alpha; n-1}$ - kwantyl rozkładu chi – kwadrat o $n-1$ stopniach swobody.

c) Gdy hipotezą alternatywną jest: $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, wówczas zbiorem krytycznym jest przedział:

$(0; \chi_{1-\alpha/2; n-1}] \cup [\chi_{\alpha/2; n-1}; +\infty)$

Z tablic otrzymujemy wartość χ_α^2 taką, że $P(\chi^2 > \chi_\alpha^2) = \alpha$.

Hipotezę $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej, jeśli obliczona z próby wartość statystyki testowej χ_{obl}^2 należy do zbioru krytycznego. Gdy obliczona z próby wartość statystyki testowej nie mieści się w wyznaczonym w wyznaczonym zbiorze krytycznym, to możemy tylko stwierdzić, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$. Oznacza to, że wyniki uzyskane z analizowanej próby nie przeczą tej hipotezie.

Jeśli liczebność próby n jest duża, to statystyka χ^2 określona wzorem (4.5) ma rozkład asymptotycznie normalny $N(n; \sqrt{2n})$. Dlatego zamiast statystyki (4.5) wygodniej jest użyć statystyki:

$$U = \frac{\chi^2 - n}{\sqrt{2n}} \quad (4.6)$$

o rozkładzie normalnym standaryzowanym $N(0; 1)$.

Przykład 4.4.

Pewnym przyrządem dokonano 10 pomiarów pewnej wielkości otrzymując następujące wyniki: 4.98, 4.92, 4.88, 4.98, 5.02, 4.99, 5.08, 5.03, 4.86, 4.93. Dane te pochodzą z próby o rozkładzie $N(5; 0.1)$.

a) Sprawdzić, że pomiarów dokonano przyrządem o dokładności nie gorszej niż 0.05.

b) Sprawdzić, że pomiarów dokonano przyrządem o dokładności nie gorszej niż 0.1.

Przyjąć poziom istotności 0,05.

4.1.4. Test dla wskaźnika struktury (rozkład dwumianowy).

Populacja generalna ma rozkład 2 punktowy z parametrem p , próba duża ($n > 100$)

$$H_0 : p = p_0$$

$$H_1 : p \neq p_0$$

$$H_1 : p > p_0$$

$$H_1 : p < p_0$$

Statystyka testowa: $U = \frac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$, gdzie: $\frac{m}{n} = p$, oraz zachodzi: $p_0 + q_0 = 1$
 $q_0 = 1 - p_0$

- jeśli $H_1 : p \neq p_0$ i $|U| \geq U_\alpha$ to odrzucamy H_0

- jeśli $H_1 : p > p_0$ i $U \geq U_\alpha$ to odrzucamy H_0

- jeśli $H_1 : p < p_0$ i $U \leq -U_\alpha$ to odrzucamy H_0

Wartość p .

Decyzja o przyjęciu lub odrzuceniu sprawdzanej hipotezy H_0 zależy od przyjętego poziomu istotności. Może się zdarzyć, że przy poziomie istotności $\alpha = 0.01$ należy ją przyjąć, a przy poziomie $\alpha = 0.05$ odrzucić. Dlatego bardzo często w opracowaniach statystycznych podaje pewien wskaźnik, nazywany **wartością p** (p -value).

Wartość p – jest to najmniejszy poziom istotności, przy którym musielibyśmy, dla danej próby, jeszcze odrzucić sprawdzaną hipotezę.

Mając taki wskaźnik, wiadomo, dla jakich poziomów istotności α sprawdzaną hipotezę H_0 należy przyjąć.

Należy ją przyjąć jeśli wartość $p > \alpha$.

ZADANIA.

Zadanie 4.8.

W pewnej fabryce maszyna jest ustawiona tak, aby produkować zakrętki do butelek o średnicy 2 cm. Zaistniało podejrzenie, że maszyna się rozregulowała. Przebadano 10 nakrętek i otrzymano następujące wyniki:

$$\mu_0 = 2 \text{ cm}, \quad \bar{X} = 1,992 \text{ cm}, \quad S = 0,006 \text{ cm}.$$

Zweryfikować na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ hipotezę głoszącą, że średnia z próby jest:

- 1) różna od średniej populacji,
- 2) większa od średniej z populacji,
- 3) jest mniejsza od średniej z populacji.

Zadanie 4.9.

Norma techniczna przewiduje średnio 55 sek. na wykonanie pewnej operacji technicznej przez robotników na pewnym stanowisku roboczym. Ponieważ robotnicy skarżyli się że norma ta jest zła dokonano pomiarów chronometrażowych dla 60 wylosowanych robotników i otrzymano z tej próby średnią równą 72 sek. oraz odchylenie standardowe równe 20 sek. Czy można na poziomie istotności $\alpha = 0,01$ odrzucić hipotezę że rzeczywisty średni czas wykonania tej operacji jest zgodny z normą.

Zadanie 4.10.

Wylosowano niezależnie 10 indywidualnych gospodarstw rolnych w pewnej wsi i otrzymano dla nich następujące wielkości uzyskanych plonów owsa:

18.1, 17.0, 17.5, 17.8, 18.3, 16.7, 18.0, 15.9, 17.6, 18.1

Zweryfikuj hipotezę że średni plon owsa w tej wsi wynosi 18.0 kwintali z hektara przy poziomie istotności $\alpha = 0.1$.

Zadanie 4.11.

Na 800 zbadanych pacjentów pewnego szpitala 320 miało grupę krwi 0. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikuj hipotezę że procent pacjentów z tą grupą krwi wynosi 35%.

Zadanie 4.12.

W magazynie żywnościowym wylosowano niezależnie 120 składowanych tam skrzynek z cytrynami. Po ich zbadaniu okazało się, że w 16 skrzynkach znaleziono zepsute cytryny. Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ zweryfikuj hipotezę że przechowywana partia zawiera więcej niż 5% skrzynek z zepsutymi cytrynami.

Zadanie 4.13.

Producent oświadcza, że średni czas świecenia żarówek produkowanych przez niego wynosi 1000 godzin. Aby zweryfikować hipotezę $H_0 : m = 1000$, zbadano czas świecenia $n = 100$ żarówek i stwierdzono, że w tej próbie $\bar{X} = 990$ oraz $S^2 = 144$ godziny².

W oparciu o poziom istotności $\alpha = 0,02$ zweryfikuj postawioną hipotezę.

Zadanie 4.14.

Sprawdzić na poziomie istotności 0,05 hipotezę, że średni wzrost dorosłych Polaków to 175cm.

Na podstawie pomiarów 100 wybranych losowo Polaków otrzymano wyniki:

$\bar{X} = 171$ cm oraz $S^2 = 9$ cm². Założyć, że wzrost Polaków podlega rozkładowi normalnemu.