

Estymacja przedziałowa

Przedziały ufności

Na poprzednim wykładzie zajmowaliśmy się ocenami punktowymi szacowania nieznanego parametru, tzn. chodziło o podanie jednej liczby możliwie najmniej różniącej się od nieznanego parametru. Taka estymacja punktowa parametrów, bez wskazania stopnia dokładności oszacowań, jest często niewystarczająca.

W przeciwieństwie do estymacji punktowej, estymacja przedziałowa jest metodą pozwalającą nie tylko na oszacowanie wartości parametru jakiegoś rozkładu, ale również podanie dokładności z jaką to oszacowanie wykonano.

Podstawy metod estymacji przedziałowej opracował polski statystyk Jerzy Sława – Neyman.

Idea estymacji przedziałowej polega na tym, że zamiast szacowania parametru θ za pomocą jednej liczby, należy znaleźć przedział (z_1, z_2) zwany **przedziałem ufności**, w którym nieznaną wartość parametru znajdzie się z **zadawanym nas prawdopodobieństwem**. Końce tego przedziału muszą być więc zmiennymi losowymi, będącymi statystykami:

$$z_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \quad \text{ i } \quad z_2 = f_2(x_1, \dots, x_n)$$

gdzie x_1, \dots, x_n - elementowa próbka z populacji, w której cecha X ma rozkład typu ciągłego, zależny od nieznanego parametru θ , takimi, aby $P\{\theta \in (z_1, z_2)\}$ było bliskie 1. Bliskość 1 określa się liczbą $1 - \alpha$ i nazywa się **poziomem ufności**.

Definicja.

Jeśli dla danego $\alpha \in (0,1)$ jest spełniona równość: $P(z_1 \leq \theta \leq z_2) = 1 - \alpha$, (3.1)

to przedział (z_1, z_2) nazywamy **przedziałem ufności** dla parametru θ ,

a liczbę $1 - \alpha$ - **poziomem ufności**,

zaś α - **poziom istotności**.

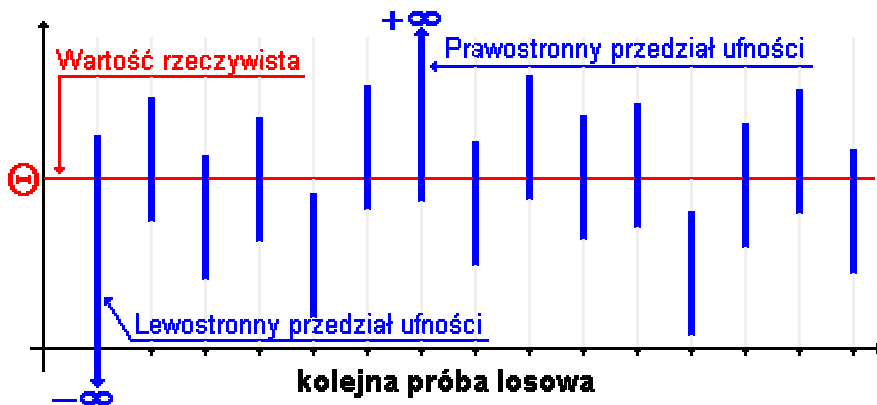
Im mniejsze α , tym dłuższy przedział ufności. Zazwyczaj α przybiera jedną z wartości: 0,1, 0,05, 0,01, przy czym wartość $\alpha = 0,05$ jest najczęściej używana – mówimy wówczas o 95 % przedziale ufności. Sposób określania przedziału ufności zależy od rozkładu, w którym występuje nieznaną wartość parametru, od tego czy znamy pozostałe parametry w tym rozkładzie oraz od liczebności próby. Z praktycznego punktu widzenia pożądaną jest, aby przy danym α , przedział ufności był najkrótszy.

Z podanego określenia wynika, że przedział ufności jest przedziałem losowym, zmieniającym się od próbki do próbki. Niektóre otrzymane na podstawie próbek przedziały będą zawierały nieznaną wartość parametru θ , inne nie. Wzór (3.1) należy interpretować w ten sposób, że w dużej serii próbek częstość zdarzenia polegającego na tym, że przedział ufności pokrywa nieznaną wartość parametru θ , jest w przybliżeniu równa $1 - \alpha$.

θ oznacza parametr, którego wartość chcemy oszacować. Może to być na przykład wartość średnia, wariancja albo odchylenie standardowe jakiegoś rozkładu.

Poszukujemy takich dwóch wartości z_1 i z_2 , aby przedział przez nie wyznaczony z zadanyą prawdopodobieństwem zawierał w sobie rzeczywistą wartość parametru θ .

Wyjaśnijmy pewien problem natury logicznej. Podkreślone zdanie ma dość złożoną formę. Nie bez powodu. Wbrew pozorom, nie jest ono tożsame ze stwierdzeniem, że poszukiwana wartość z zadanyą prawdopodobieństwem znajduje się w tym przedziale. Parametr θ przyjmuje jedną, konkretną wartość. To, że jej nie znamy, nie zmienia faktu, że taka rzeczywista wartość istnieje. Tak więc dla jakiegoś przedziału, prawdopodobieństwo, że ta rzeczywista wartość należy do tego przedziału jest albo równe 1 albo równe 0. Innych możliwości nie ma. Zwróćmy uwagę, że o ile wartość θ , jest jednoznaczna i zależy tylko od badanego rozkładu, o tyle z_1 i z_2 są zmiennymi losowymi i tak naprawdę zależą od prób losowych. W związku z tym, podkreślone zdanie należy rozumieć w ten sposób, że gdybyśmy wyznaczyli przedział ufności np. 100 razy to zazwyczaj około 100 $(1 - \alpha)$ przedziałów zawierałoby w sobie rzeczywistą wartość parametru θ .



Każdy z przedziałów zaznaczonych na powyższym rysunku stanowi realizację przedziału ufności na poziomie ufności $1 - \alpha$ dla nieznanego parametru Θ .

Lewostronnym przedziałem ufności nazywamy przedział ufności postaci $(-\infty, z_1)$.

Prawostronnym przedziałem ufności nazywamy przedział ufności postaci $(z_2, +\infty)$.

● Istnieje nieskończenie wiele przedziałów ufności dla danego poziomu ufności.

● Dla poziomu ufności równego jedności przedział ufności rozciąga się od minus do plus nieskończoności.

Do estymacji przedziałowej dla małych prób ($n < 30$) losowanych z populacji o rozkładzie normalnym

wartości oczekiwanej -

stosuje się rozkład t Studenta

wariancji i odchylenia standardowego -

stosuje się rozkład chi - kwadrat

Przykłady znajdowania przedziałów ufności.

Przedziały ufności dla średniej.

Model 1.

Cecha X elementów populacji generalnej ma rozkład normalny $N(m; \sigma)$, przy czym odchylenie standardowe σ jest **znane**, a m **nieznane**. Znaleźć przedział ufności dla wartości przeciętnej m .

Przyjmijmy za estymator parametru m średnią empiryczną z próby o licznosci n :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Statystyka \bar{X}_n jest zmienną losową o rozkładzie: $N(m; \sigma / \sqrt{n})$.

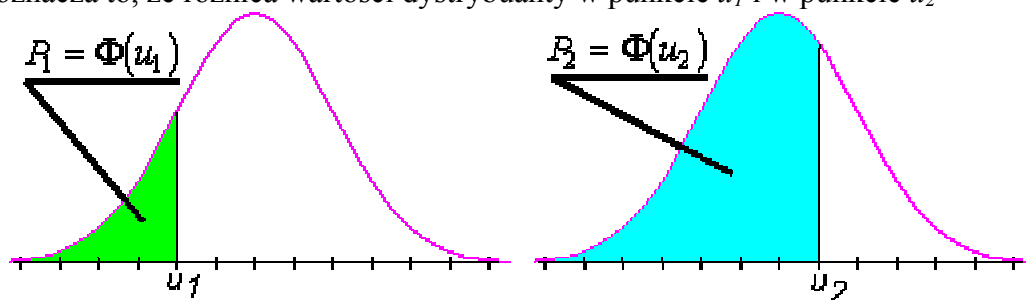
Dokonując standaryzacji zmiennej losowej \bar{X}_n , otrzymamy nową zmienną losową:

$$U = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \sqrt{n}$$

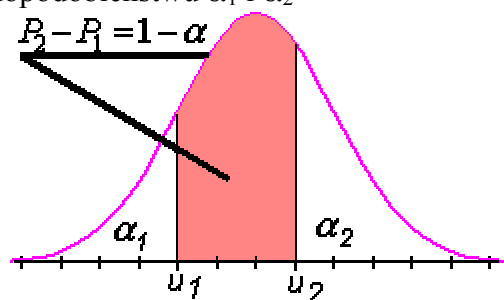
Zgodnie z definicją przedziału ufności, musimy znaleźć takie dwie wartości zmiennej losowej u_1 i u_2 , żeby prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa U przyjmie wartość pomiędzy u_1 a u_2 było równe poziomowi ufności, czyli $1 - \alpha$:

$$P(u_1 < U < u_2) = \Phi(u_2 - u_1) = 1 - \alpha$$

Oczywiście oznacza to, że różnica wartości dystrybuanty w punkcie u_1 i w punkcie u_2



jest równa temu prawdopodobieństwu. A więc obszary na lewo i na prawo od zaznaczonego obszaru odpowiadają odpowiednio prawdopodobieństwu α_1 i α_2



Jak widać: $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, $u_1 = u(\alpha_1)$, $u_2 = u(1 - \alpha_2)$

Tak więc równanie definiujące przedział ufności można przedstawić w postaci:

$$P(u(\alpha_1) < \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \sqrt{n} < u(1 - \alpha_2)) = 1 - \alpha, \text{ a po przekształceniach:}$$

$$P(u(\alpha_1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X}_n - m < u(1 - \alpha_2) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

$$P(\bar{X}_n - u(\alpha_1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{X}_n + u(1 - \alpha_2) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

otrzymamy przedział losowy zawierający z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$ nieznaną wartość średnią m :

$$(\bar{X}_n - u(\alpha_1) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u(1 - \alpha_2) \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Zauważmy, że powyższa formuła definiuje nieskończenie wiele przedziałów ufności, w zależności od wybranej wartości jednego z parametrów α .

Poniżej przedstawiono 3 najczęściej używane przedziały ufności:

1) Lewostronny przedział ufności:

$$\alpha_1 = 0 \quad (-\infty, \bar{X}_n - u(\alpha) \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

2) Prawostronny przedział ufności:

$$\alpha_2 = 0 \quad (\bar{X}_n - u(1 - \alpha) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty)$$

3) Symetryczny względem wartości średniej przedział ufności – najczęściej używany:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2} \quad \left(\bar{X}_n - u\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u\left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Ponieważ standaryzowany rozkład normalny jest symetryczny względem zera, to:

$u\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -u\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$, więc symetryczny przedział ufności można zapisać jako:

$$\left(\bar{X}_n - u\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + u\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Przedział ufności jest symetryczny względem tej średniej \bar{X}_n .

Przedział ufności dla średniej m w populacji otrzymuje się ze wzoru:

$$P\left\{ \bar{X}_n - u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{X}_n + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = 1 - \alpha \quad (3.2)$$

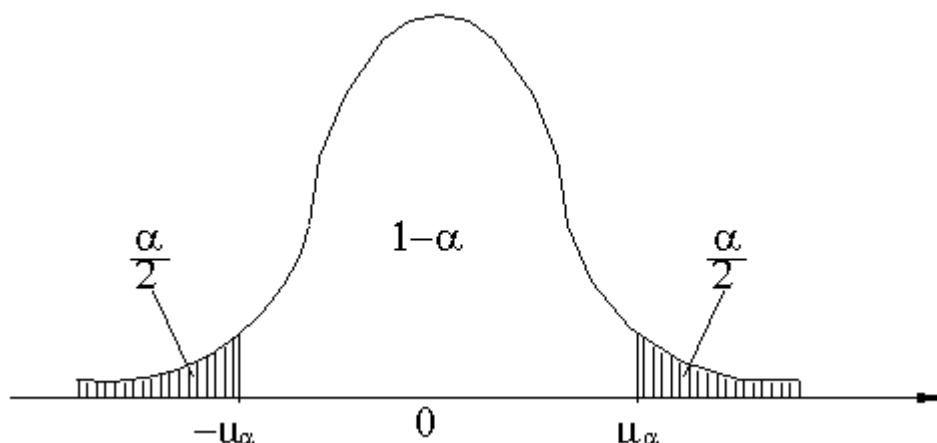
gdzie:

$u_\alpha = u\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ - jest wartością zmiennej losowej U o rozkładzie normalnym,

Wartość u_α dla danego współczynnika ufności $1-\alpha$ wyznacza się z rozkładu normalnego standaryzowanego $N(0,1)$, w taki sposób, by spełniona była relacja:

$$P\{-u_\alpha < m < u_\alpha\} = 1 - \alpha$$

u_α jest taką wartością zmiennej losowej o rozkładzie normalnym standaryzowanym, że pole powierzchni pod krzywą gęstości w przedziale $(-u_\alpha, u_\alpha)$ wynosi $1-\alpha$, a pole pod krzywą gęstości na prawo od u_α i na lewo od $-u_\alpha$ wynosi po $\alpha/2$.



Model 2.

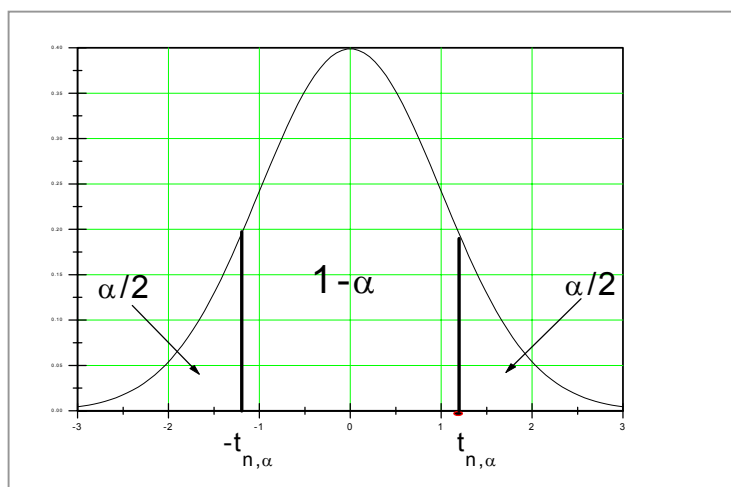
Estymacja przedziałowa wartości oczekiwanej μ dla $n < 30$.

Cecha X populacji ma rozkład $N(\mu; \sigma)$, przy czym zarówno μ jak i σ stanowią nieznane parametry tego rozkładu.

Statystyka $t = \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n-1}$, gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n}}$, n – liczebność próbki,

ma rozkład t Studenta o $n-1$ stopniach swobody. Ponieważ rozkład tej statystyki jest niezależny od nieznanymi parametrów μ jak i σ , a zależy tylko od liczebności próby, zatem statystykę tę można wykorzystać do konstrukcji przedziału ufności dla wartości przeciętnej μ . Można zapisać:

$$P(|t| < t_{n,\alpha}) = 1 - \alpha$$



Przekształcając powyższe równanie:

$$P\left(\left|\frac{\bar{x} - \mu}{S} \sqrt{n-1}\right| < t_{n,\alpha}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-t_{n,\alpha} < \frac{\bar{x} - \mu}{S} \sqrt{n-1} < t_{n,\alpha}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\frac{S}{\sqrt{n-1}} t_{n,\alpha} < \bar{x} - \mu < \frac{S}{\sqrt{n-1}} t_{n,\alpha}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n-1}} t_{n,\alpha} < -\mu < \frac{S}{\sqrt{n-1}} t_{n,\alpha} - \bar{x}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n-1}} t_{n,\alpha} > \mu > \bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n-1}} t_{n,\alpha}\right) = 1 - \alpha$$

otrzymamy ostatecznie

$$P\left(\bar{x} - t_{n,\alpha} \hat{S}_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + t_{n,\alpha} \hat{S}_{\bar{x}}\right) = 1 - \alpha \quad (3.4)$$

gdzie $\hat{S}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$ odchyleniem standardowym średniej arytmetycznej.

Równanie (3.4) interpretujemy następująco:

$(1-\alpha)100\%$ przedziałem ufności dla nieznannej wartości oczekiwanej jest przedział określony podwójną nierównością: $\bar{x} - t_{n,\alpha} \hat{S}_{\bar{x}} < \mu < \bar{x} + t_{n,\alpha} \hat{S}_{\bar{x}}$. Wartości krytyczne $t_{n,\alpha}$ rozkładu t Studenta odczytujemy z tablic dla liczby stopni swobody $r = n-1$.

Przykład 3.1:

Pobrano próbkę o liczebności 100 danych z populacji o rozkładzie $N(2 ; 0.2)$. Dla tych 100 danych obliczono $\bar{X}_n = 2.0031$ $\sigma = 0.1967$. Wyznaczyć przedział ufności dla średniej przy poziomie ufności $1-\alpha = 0.95$.

Przykład 3.2:

Wzięto próbkę o liczności $n = 4$ z populacji o rozkładzie normalnym. Obliczono, że: $\bar{X} = 2.105$ $\bar{S} = 0.19841$. Wyznaczyć przedział ufności dla wartości średniej na poziomie ufności 0.95.

Model 3.

Cecha X populacji generalnej ma rozkład dowolny o nieznanach parametrach, czyli nieznaney wartości przeciętnej μ i skończonej wariancji σ^2 . Zakładamy liczebność próby $n > 30$.

Z centralnego twierdzenia granicznego wynika, że statystyka :

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \quad \text{ma asymptotyczny rozkład } N(0; 1).$$

Ze względu na dużą liczebność próbek, nieznaną wartość σ zastępujemy przez estymator \hat{S}^2 obliczony z próbek.

Zatem model ten sprowadza się do modelu 1, czyli:

$$\mu = \bar{X} \pm u \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

$$\text{gdzie: } \hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Przedziały ufności dla wariancji.

W zależności od tego, czy próba jest mała czy duża, przedział ufności dla wariancji buduje się odpowiednio w oparciu o rozkład χ^2 (chi - kwadrat) bądź o rozkład normalny.

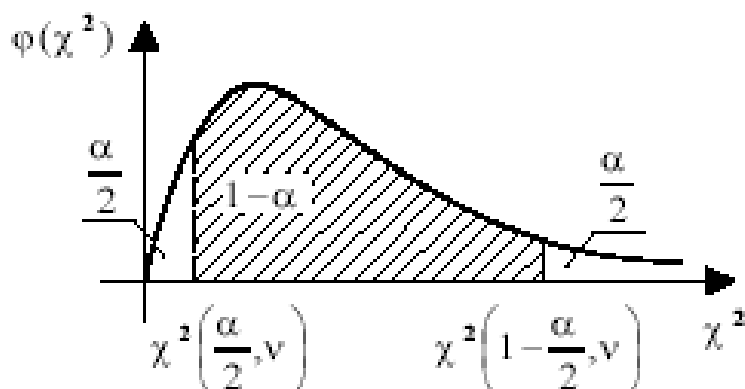
Model 4

Badana cecha w populacji generalnej ma rozkład normalny $N(\mu; \sigma)$ o nieznanach parametrach μ i σ . Z populacji tej wylosowano niezależnie do próby n elementów (n jest małe tj. $n < 30$). Z tej próby obliczono wariancję S^2 .

Konstrukcję przedziału ufności oprzemy na statystyce χ^2 chi - kwadrat:

$$\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}, \text{ która ma rozkład chi - kwadrat o } n-1 \text{ stopniach swobody.}$$

Oznaczmy kwantyle tego rozkładu przez: $\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, n-1\right)$ oraz $\chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}, n-1\right)$ dla ustalonego poziomu ufności $1 - \alpha$.



Zgodnie z powyższym rysunkiem można zapisać nierówności:

$$P(\chi^2(\frac{\alpha}{2}, n-1) < \chi^2 < \chi^2(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)) = 1 - \alpha$$

$$P(\chi^2(\frac{\alpha}{2}, n-1) < \frac{nS^2}{\sigma^2} < \chi^2(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)) = 1 - \alpha$$

Rozwiązując nierówność zawartą w nawiasie względem σ^2 otrzymuje się na poziomie ufności $1 - \alpha$ przedział ufności określony warunkiem:

$$\frac{nS^2}{\chi^2(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} < \sigma^2 < \frac{nS^2}{\chi^2(\frac{\alpha}{2}, n-1)}$$

Jeżeli w powyższym wzorze wykorzystamy nieobciążony estymator \hat{S}^2 , to zgodnie z definicją statystyki

chi – kwadrat: $\chi^2 = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}$ można zapisać:

$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2(1-\frac{\alpha}{2}, n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2(\frac{\alpha}{2}, n-1)}$$

Przedziały ufności dla odchylenia standardowego σ stanowią pierwiastki kwadratowe powyższych przedziałów.

Przykład 3.4:

Dokonano 10 pomiarów stratności P z prądów wirowych próbki kompozytu proszkowego i otrzymano następujące wyniki:

1.56, 1.55, 1.50, 1.46, 1.56, 1.51, 1.49, 1.49, 1.40, 1.49. Wartość $\bar{x} = 1.5010$ oraz $\hat{S}^2 = 0.0022$

Wyznaczyć przedział ufności dla średniokwadratowego błędu pomiarowego stratności (czyli dla σ^2) przy poziomie ufności 0.9, zakładając, że błąd pomiaru ma rozkład normalny.

Model 5.

Badana cecha w populacji generalnej ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$ lub zbliżony do normalnego o nieznanach parametrach μ i σ . Z populacji tej wylosowano niezależnie dużą liczbę n elementów ($n > 30$).

Z tej próby obliczono odchylenie standardowe $S = \sqrt{S^2}$. Wówczas przybliżony przedział ufności dla odchylenia standardowego σ populacji generalnej jest określony wzorem:

$$P\left\{\frac{S}{1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}} < \sigma < \frac{S}{1 - \frac{u_\alpha}{\sqrt{2n}}}\right\} = 1 - \alpha$$

Przykład 3.5:

W zakładzie X zbadano 500 urządzeń spośród nowo wyprodukowanej partii i otrzymano następujący rozkład liczby usterek:

Liczba usterek	0	1	2	3	4	5	6
Liczba urządzeń	112	168	119	63	28	9	1

Wyznaczyć przedział ufności dla odchylenia standardowego usterek dla poziomu ufności 0.99.

Przykład 3.6.

W losowo wybranej grupie 450 samochodów osobowych marki FSO 1500 przeprowadzono badanie zużycia benzyny na tej samej dla wszystkich samochodów trasie długości 100 km. Okazało się, że odchylenie standardowe zużycia benzyny dla tej grupy samochodów wynosiło 0,8 litra na 100 km. Zakładając, że badana cecha ma rozkład normalny wyznaczyć przedział ufności dla odchylenia standardowego ze zużyciem benzyny przez wszystkie samochody tej marki na takiej trasie. Przyjąć poziom ufności 0,99.

Przykład 3.7.

W celu oszacowania średniej długości pewnego detalu produkowanego w przedsiębiorstwie wylosowano 17 detali i otrzymano średnią ich długość 32 cm oraz odchylenie standardowe 0,6 mm. Oszacować przy poziomie ufności 0,90 wartość oczekiwaną produkowanych w tej firmie detali.

Minimalna liczebność próby

Minimalna liczebność próby – taka liczebność próby, która zapewni wymaganą dokładność (precyzję oszacowania) przy danym poziomie ufności.

1. Minimalna liczność próby dla estymacji przedziałowej średniej m w populacji przy znanym odchyleniu standardowym σ w populacji.

Należy znaleźć taką liczebność próby n , dla której przy danym poziomie ufności $1-\alpha$, połowa długości przedziału ufności Δx – nie przekroczy ustalonej z góry wartości.

Wyznaczamy przedział, który z danym prawdopodobieństwem obejmie mierzoną wartość parametru populacji:

$$P\{\bar{X} - u_{\alpha} \sigma_x < m < \bar{X} + u_{\alpha} \sigma_x\} = 1 - \alpha$$

Oznaczmy: $\Delta x = u_{\alpha} \sigma_x = u_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ dopuszczalny błąd oceny (tolerancja)

Zatem: $\sqrt{n} = \frac{u_{\alpha} \sigma}{\Delta x}$

Czyli minimalna liczebność próbek:
$$n = \frac{u_{\alpha}^2 \sigma^2}{\Delta x^2} \quad (3.5)$$

Jeżeli liczność próby losowej z rozkładu normalnego o wartości średniej m i odchyleniu standardowym σ spełnia warunek (3.5) to: $P(|\bar{X} - m| \leq \Delta x) \geq 1 - \alpha$

Z prawdopodobieństwem co najmniej $1 - \alpha$ błąd bezwzględny oszacowania nieznannej wartości średniej m przez \bar{X} nie przekroczy Δx , tzn. wśród wielu próbek o liczności n częstość takich, dla których błąd bezwzględny średniej z próby nie przekroczy Δx jest w przybliżeniu nie mniejsza niż $1 - \alpha$.

Przykład 3.8:

Wykonujemy pomiar grubości płytki platynowej. Ile pomiarów n należy wykonać aby dopuszczalny błąd oceny (tolerancja) wyniósł $\Delta x = 0.016$, standardowy błąd pomiaru $\sigma = 0.1$ mm. Przyjąć poziom ufności $1 - \alpha = 0.95$.

Przykład 3.9.

Producent chce ocenić średnią zawartość nikotyny w paczkach papierosów pewnego gatunku. Wiadomo, że standardowe odchylenie zawartości nikotyny w losowo wybranej paczce papierosów $\sigma = 8$ mg. Określić liczbę paczek papierosów, w których należy zbadać zawartość nikotyny, aby na poziomie ufności co najmniej 0,95 móc stwierdzić, że obliczona średnia z próbki \bar{X} nie będzie się różniła od prawdziwej średniej zawartości nikotyny μ o więcej niż 1,5 mg.

2. Minimalna liczność próby dla estymacji przedziałowej średniej m w populacji przy nieznanym odchyleniu standardowym σ w populacji.

Losujemy próbę wstępną n_0 i na jej podstawie wyznaczamy właściwą liczebność próby:

$$n = \frac{t_{\alpha, n_0-1}^2 \cdot \hat{S}^2}{\Delta x^2}$$

gdzie:

t_{α, n_0-1} – wartość z tablic rozkładu t Studenta dla α i n_0-1 stopni swobody

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Jeżeli $n \leq n_0$ to próbę wstępną traktujemy jako właściwą. Jeżeli zaś $n > n_0$ to musimy próbę powiększyć o $n - n_0$.

ZADANIA.

Przykład 3.10.

Stacja paliw sprzedała 8019 litrów gazu w ciągu 9 losowo wybranych dni. Załóżmy, że dzienna ilość sprzedanego gazu ma rozkład normalny o standardowym odchyleniu $\sigma = 90$ litrów. Skonstruować przedziały ufności dla średniej dziennej sprzedaży gazu na poziomach ufności:

(a) 0,98 (b) 0,80.

Przykład 3.11.

Zanotowano czasy obsługi przy okienku kasowym (w minutach) 64 losowo wybranych klientów

pewnego banku. Obliczono: średnią z próbki $\bar{x} = 3,2$ min. oraz wariancję z próbki $s^2 = 1,44$ min.².

Znaleźć 98% przedział ufności dla średniego czasu obsługi μ , jeśli można założyć, że czas obsługi klienta przy okienku kasowym ma rozkład normalny.

Przykład 3.12.

W ciągu pięciu losowo wybranych tygodni zaobserwowano następujące zużycia cukru (w gospodarstwie domowym, w kg):

3,8, 4,5, 5,2, 4,0, 5,5.

Skonstruować 90% przedział ufności dla średniego tygodniowego zużycia cukru w tym gospodarstwie, jeśli przyjmiemy rozkład normalny zużycia cukru.

Przykład 3.13.

Dla poziomu ufności 0,95 oszacować przedziałowo zróżnicowanie zmiennej określającej liczbę usterek w produkcji telewizorów w przedsiębiorstwie ELEMIS, mając obliczone z 20 elementowej próby: przeciętną ilość usterek wynoszącą 5 sztuk oraz zróżnicowanie bezwzględne, które wynosi ± 3 usterki.

Przykład 3.14.

Zbadano czas świecenia 26 żarówek i uzyskano wyniki: empiryczną wartość oczekiwaną $\bar{X} = 1221 h$ i odchylenie standardowe empiryczne $S = 432 h$. Zakładając, że czas świecenia żarówek ma rozkład normalny, oszacować metodą przedziałową średni czas świecenia żarówek. Przyjąć poziom ufności 0,99.

Przykład 3.15.

Zakładając, że kwartalne wydatki na reklamę (w tys. zł) mają rozkład normalny, wylosowano do próby 100 zakładów usługowych i otrzymano następujący rozkład wydatków na reklamę:

Kwartalne wydatki na reklamę	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20
Liczba zakładów	10	20	40	30

Oszacować metodą przedziałową odchylenie standardowe wydatków na reklamę na poziomie ufności 0,95.

Przykład 3.16.

W celu oszacowania średniego czasu poświęconego tygodniowo przez studentów na naukę, wylosowano próbę $n = 132$ studentów i otrzymano w niej następujące wyniki:

Czas nauki w godz.	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10	10 - 12
Liczba studentów	10	28	42	30	15	7

Przyjmując poziom ufności 0,90 oszacować metodą przedziałową średni tygodniowy czas nauki studentów.