

# Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna

## Część pierwsza - elementy rachunku prawdopodobieństwa

Paweł Biernacki  
**Bartłomiej Golenko**

Instytut Telekomunikacji i Akustyki  
Politechnika Wrocławska  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27  
50-370 Wrocław  
pawel.biernacki@pwr.wroc.pl  
bartlomiej.golenko@pwr.wroc.pl

## Plan wykładów

1. Zdarzenia losowe. Pojęcie prawdopodobieństwa. Różne definicje.
2. Prawdopodobieństwo warunkowe. Niezależność zdarzeń.  
Schemat Bernoulliego.
3. Prawdopodobieństwo całkowite. Twierdzenie hipotez.
4. Zmienne losowe dyskretne i ciągłe. Rozkłady zmiennych losowych. Dystrybuanta.
5. Momenty zmiennych losowych (zwykłe, centralne, mieszane).
6. Współczynnik korelacji. Ilość informacji. Entropia.
7. Funkcje zmiennych losowych dyskretnych i ciągłych.
8. Wielowymiarowe zmienne losowe. Nieliniowe przekształcenie tych zmiennych.
9. Nierówność Markowa i Czebyszewa. Prawa wielkich liczb.
10. Funkcja charakterystyczna. Wyznaczanie podstawowych parametrów.

## Literatura

1. W. Kordecki, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna: definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2002
2. W. Krysiński, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach. Cz. 1, Rachunek prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 2002
3. A. Plucińska, E. Pluciński, *Elementy probabilistyki*, PWN, Warszawa 1990
4. T. Gerstenkorn, T. Srodką, *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1983
5. W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, PWN, Warszawa 1987
6. A. Papoulis, *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*, WNT, Warszawa 1972

## Zaliczenie

1. Zaliczenie na podstawie dwóch kolokwίων.
2. Kolokwium: 4 zadania po 3 punkty = 12 punktów maksymalnie
3. Kolokwium odbywa się w dwóch turach po 45 minut dla każdej połowy studentów. Należy przyjść z dokumentem potwierdzającym tożsamość !
4. Mniej niż 3 punkty z kolokwium to BRAK ZALICZENIA KURSU
5. Zaliczenie kursu od 12 punktów z obu kolokwίων.
6. Mniej niż 6 punktów z obu kolokwίων nie uprawnia do terminu poprawkowego !!!
7. Termin pierwszego kolokwium: .....

Listy zadań wywieszane będą co miesiąc na trzecim piętrze budynku C5.

Listy zadań wywieszane będą co miesiąc na trzecim piętrze budynku C5.

Terminy konsultacji – będą podane na tabliczce na drzwiach pokoju 305–C5.

## Wykład I - Omawiane zagadnienia

- ▶ Podstawowe pojęcia kombinatoryki
- ▶ Zdarzenia losowe
- ▶ Pojęcie prawdopodobieństwa. Różne definicje

## Definicja

$k$  wyrazową **wariacją bez powtórzeń** z  $n$ -elementowego zbioru  $A$  ( $n > k$ ) nazywamy każdy  $k$  wyrazowy ciąg elementów, którego wyrazy są różnymi elementami z tego zbioru. Liczbę wariacji bez powtórzeń oznaczamy symbolem  $V_n^k$ .

$$V_n^k = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!} \quad (1)$$



## Przykład

*Ile jest liczb czterocyfrowych, w których nie powtarza się żadna cyfra ?*

## Przykład

*Ile jest liczb czterocyfrowych, w których nie powtarza się żadna cyfra ?*

## Rozwiązanie

*Ilości liczb zaczynających się cyfrą  $0, 1, 2, \dots, 9$  są równe. Chcąc uzyskać te liczby czterocyfrowe o niepowtarzających się cyfrach, które nie zaczynają się od 0, należy z otrzymanej wariacji  $V_{10}^4$  odrzucić jej dziesiątą część. Rozwiązaniem jest więc:*

$$V_{10}^4 - \frac{1}{10} V_{10}^4 = \frac{9}{10} V_{10}^4 = 4536$$

## Definicja

$k$  wyrazową **wariacją z powtórzeniami** z  $n$ -elementowego zbioru  $A$  ( $n > k$ ) nazywamy każdy  $k$  wyrazowy ciąg elementów z tego zbioru i oznaczamy  $\overline{V}_n^k$

$$\overline{V}_n^k = n^k \quad (2)$$

## Przykład

*Centrala telefoniczna pracuje na połączeniach siedmiocyfrowych, które uzyskuje się z cyfr  $0,1,2,\dots,9$ . Ilu abonentów centrala może zarejestrować, jeśli połączenia siedmiocyfrowe zaczynające się od 0 nie mogą być realizowane oraz połączenia trzycyfrowe zaczynające się od 9 są przewidziane dla straży pożarnej, itp. ?*

## Rozwiązanie

*Tworzymy zbiory siedmioelementowe (siedmiocyfrowe numery telefonów) z elementów zbioru dziesięcioelementowego (cyfry), w których kolejność występowania elementów odgrywa rolę i elementy mogą się powtarzać. Ilość numerów rozpoczynających się od 0,1,...,9 jest taka sama, więc aby otrzymać numery, które nie zaczynają się od 0 należy od otrzymanej wariacji  $\overline{V}_{10}^7$  odjąć jej dziesiątą część. Otrzymujemy*

$$\overline{V}_{10}^7 - \frac{1}{10} \overline{V}_{10}^7 = 10^7 - \frac{1}{10} 10^7 = 10^7 - 10^6 = 9000000$$

*Dodatkowo mamy 1000 numerów trzycyfrowych rozpoczynających się od 9.*

*Razem jest więc 8999000 numerów.*

## Definicja

*Zbiór składający się z  $n$  elementów uporządkowanych i różnych nazywamy **permutacją** (przemianą) bez powtórzeń z  $n$  elementów i oznaczamy symbolem  $P_n$ .*

$$P_n = V_n^n = n * (n - 1) * (n - 2) * ... * 3 * 2 * 1 = n! \quad (3)$$

## Przykład

*Pięć parzystych cyfr 0,2,4,6,8 i pięć nieparzystych 1,3,5,7,9 układamy obok siebie w szereg tak, by cyfra parzysta sąsiadowała z nieparzystą. Iloma sposobami można to uczynić ?*

## Rozwiązanie

*Wszystkie cyfry są układane na dziesięciu miejscach. Cyfry parzyste mogą zajmować miejsca 1,3,5,7,9 - (I) lub 2,4,6,8,10 - (II), a cyfry nieparzyste wypełniają pozostałe miejsca. Przy każdej z tych pozycji cyfry parzyste mogą dowolnie permutować, tworząc  $P_5 = 5! = 120$  permutacji.*

*Każda permutacja cyfr parzystych może tworzyć układ z dowolną permutacją cyfr nieparzystych. Układów takich jest  $(P_5)^2 = 14400$ . Ponieważ wymieniona tu sytuacja może zachodzić bądź w pozycji (I), bądź (II), wszystkich układów jest dwa razy więcej, tj. 28800.*



## Definicja

*Zbiór składający się z  $n$  elementów uporządkowanych, wśród których pewne elementy powtarzają się odpowiednio  $n_1, n_2, \dots, n_k$  razy, nazywamy  $n$ -elementową permutacją z powtórzeniami i oznaczamy symbolem  $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ .*

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_k!} \quad (4)$$

W szczególności

$$P_n^{k, n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad (5)$$

## Przykład

*Ile różnych wyrazów mających sens lub nie, można utworzyć, przedstawiając wszelkimi sposobami litery w wyrazie "telekomunikacja" ?*

## Przykład

*Ile różnych wyrazów mających sens lub nie, można utworzyć, przedstawiając wszelkimi sposobami litery w wyrazie "telekomunikacja" ?*

## Rozwiązanie

*Tworzymy zbiory 15-elementowe ze zbioru 15-elementowego. W tworzonych zbiorach kolejność elementów (liter) odgrywa rolę. Litery w danym wyrazie powtarzają się: e - 2 razy, k - 2 razy, a - 2 razy. Z tego wnioskujemy, że otrzymamy tyle różnych wyrazów, ile jest różnych permutacji z powtórzeniami*

$$P_{15}^{2,2,2} = \frac{15!}{2! * 2! * 2!} =$$

## Definicja

*k* elementową **kombinacją bez powtórzeń** *n*-elementowego zbioru *A* nazywamy każdy *k* elementowy podzbiór zbioru *A*.

$$C_n^k = \binom{n}{k} \quad (6)$$

## Przykład

*Ile nastąpi powitań, gdy jednocześnie spotka się 6 znajomych?*

## Przykład

*Ile nastąpi powitań, gdy jednocześnie spotka się 6 znajomych?*

## Rozwiązanie

*$n = 6$  jest liczbą wszystkich osób,  $k = 2$  jest liczbą osób, które jednocześnie podają sobie ręce. Gdy założymy, że porządek przy witaniu się dwóch osób nie odgrywa roli, to otrzymamy:*

$$C_6^2 = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{4! * 5 * 6}{2 * 4!} = \frac{5 * 6}{2} = 15 \quad (7)$$

## Definicja

*$k$ -elementową **kombinacją z powtórzeniami** ze zbioru  $n$ -elementowego  $A$  nazywamy zbiór złożony z różnych lub nieróżniących się elementów zbioru  $A$ .*

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k} \quad (8)$$

## Przykład

*Kości do gry w domino są zaznaczone dwiema liczbami. Ile różnych kości można utworzyć z liczb  $0,1,2,\dots,n$  ?*



## Przykład

*Kości do gry w domino są zaznaczone dwiema liczbami. Ile różnych kości można utworzyć z liczb  $0, 1, 2, \dots, n$  ?*

## Rozwiązanie

*Kość składa się z dwóch części (liczb), gdzie kość  $(2 \ 1)$  jest taka sama jak kość  $(1 \ 2)$ .*

*Do dyspozycji mamy  $n+1$  różnych liczb. Tworzymy zbiory dwuelementowe, w których kolejność nie odgrywa roli i elementy mogą się powtarzać. Ilość różnych kości równa jest kombinacji z powtórzeniami z  $n+1$  elementów po 2:*

$$\overline{C}_{n+1}^2 = \binom{n+2}{2} = \frac{1}{2}(n+1) * (n+2)$$

*Np. dla  $n=6$  mamy 28 różnych kości do gry w domino.*

## Zdarzenia losowe

**Definicja intuicyjna:** Jeśli zajście lub niezajście pewnego zdarzenia nie można przewidzieć i jeśli powiedzenie, że zachodzi ono lub nie ma sens, to mówimy, że takie zdarzenie jest **zdarzeniem losowym**.

**Przykład:**

- ▶ uderzenie kuli w cel,
- ▶ przejście elektronu z jednej orbity na drugą.

Zdarzenia losowe będziemy oznaczać dużymi literami łacińskimi:  $A$ ,  $B$ ,...

### Własność 1:

Jeżeli zdarzenie  $A$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi zdarzenie  $B$ , to mówimy, że zdarzenie  $A$  jest równoważne (równe) zdarzeniu  $B$ , co zapisujemy

$$A = B \quad (9)$$

### Przykład:

Rzucamy dwiema kostkami. Niech zdarzenie  $A$  polega na otrzymaniu nieparzystej sumy oczek, a zdarzenie  $B$  polega na otrzymaniu nieparzystej liczby oczek na jednej i parzystej liczby na drugiej kostce. Oczywiście jest, że  $A = B$ .

## Własność 2:

Jeżeli zdarzenie B zachodzi wtedy, gdy zachodzi zdarzenie A, to mówimy, że zdarzenie A jest sprzyjającym zdarzeniu B lub inaczej, że zajście zdarzenia A pociąga za sobą (powoduje) zajście zdarzenia B co zapisujemy:

$$A \subset B \quad (10)$$

## Przykład:

Rzucamy kostką do gry. Niech zdarzenie B polega na otrzymaniu na kostce parzystej liczby oczek, a zdarzenie A polega na otrzymaniu dwóch oczek. Wówczas  $A \subset B$ .

### Własność 3:

Jeżeli zdarzenie  $A$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zajdzie co najmniej jedno ze zdarzeń  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , to mówimy, że zdarzenie  $A$  jest sumą (alternatywą) zdarzeń  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , co zapisujemy:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad \text{albo} \quad A = A_1 + A_2 + \dots + A_n \quad (11)$$

Każde ze zdarzeń  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) jest zdarzeniem sprzyjającym zdarzeniu  $A$ , ponieważ zajście dowolnego ze zdarzeń  $A_i$  powoduje zajście zdarzenia  $A$ .

## Przykład:

Oznaczmy przez  $A_1$  zdarzenie polegające na otrzymaniu liczby parzystej przy rzucie kostką, przez  $A_2$  zdarzenie polegające na otrzymaniu orła przy rzucie monetą, a przez  $A_3$  zdarzenie polegające na otrzymaniu karty pik przy losowaniu z talii kart. Zdarzenie  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$  polega na otrzymaniu liczby parzystej lub orła lub pika, tzn. na zajściu co najmniej jednego z wymienionych zdarzeń. Zdarzeniem sprzyjającym zdarzeniu  $A$  będzie np. wyrzuceniu dwóch oczek na kostce, już bez względu na to, co otrzymamy przy rzucie monetą i w wyniku losowania z talii kart.

### Własność 4:

Jeżeli zdarzenia  $A$  nie można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch zdarzeń różnych od  $A$ , to takie zdarzenie nazywamy **elementarnym**.

### Przykład:

Przy rzucie kostką do gry zdarzeniami elementarnymi będą:  $A_1$  - wyrzucenie jednego oczka, ...,  $A_6$  - wyrzucenie sześciu oczek. Tych zdarzeń nie można przedstawić jako sumy co najmniej dwóch zdarzeń. Natomiast zdarzenie  $A$  polegające na wyrzuceniu parzystej liczby oczek nie jest elementarnym gdyż

$$A = A_2 \cup A_4 \cup A_6$$

### Własność 5:

Zbiór wszystkich możliwych (w danych warunkach) zdarzeń elementarnych będziemy nazywać **zbiorem podstawowym lub przestrzenią zdarzeń elementarnych**  $\Omega$ , a same zdarzenia - elementami tego zbioru lub punktami tej przestrzeni.

### Przykład:

Jeżeli rzucamy trzema monetami, to przestrzeń zdarzeń elementarnych jest następująca:

$$A_1(O, O, O), \quad A_2(O, O, R), \quad A_3(O, R, O), \quad A_4(R, O, O)$$

$$A_5(R, R, R), \quad A_6(R, R, O), \quad A_7(R, O, R) \quad A_8(O, R, R)$$



### **Własność 6:**

Zdarzenie nazywamy **pewnym**, jeżeli zbiorem zdarzeń sprzyjających jest przestrzeń zdarzeń elementarnych  $\Omega$ .

### **Przykład:**

Rzucamy kostką. Przestrzeń zdarzeń elementarnych dla jednego rzutu to:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Zdarzenie polegające na wyrzuceniu jakiegokolwiek liczby oczek od 1 do 6 uważamy za pewne, gdyż jedno ze zdarzeń elementarnych zawsze zajdzie.

### **Własność 7:**

Zdarzenie nazywamy niemożliwym, jeżeli zbiorem zdarzeń sprzyjających jest zbiór pusty  $O$ . Zdarzenia niemożliwego nie zaliczamy do zdarzeń elementarnych.

### **Przykład:**

W urnie mamy kule koloru czerwonego i zielonego. Losujemy jedną kulę. Zdarzeniem niemożliwym jest wyciągnięcie kuli koloru np.: białego lub czarnego.

### Własność 8:

Zdarzenie  $A$  polegające na zajściu każdego ze zdarzeń  $A_1, A_2, \dots, A_n$  nazywamy iloczynem (koniunkcją lub łącznym zajściem) zdarzeń  $A_1, A_2, \dots, A_n$  i zapisujemy

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \text{ lub } A = A_1 A_2 \dots A_n \quad (12)$$

### Przykład:

Z talii 52 kart ciągniemy jedną. Niech zdarzenie  $A_1$  polega na wyciągnięciu pika, a zdarzenie  $A_2$  na wyciągnięciu asa. Zdarzenie  $A = A_1 \cap A_2$  polega na wyciągnięciu asa pikowego.

### Własność 9:

Zdarzenia A oraz B nazywamy **wykluczającymi się**, jeżeli koniunkcja tych zdarzeń jest zdarzeniem niemożliwym

$$A \cap B = \emptyset \quad (13)$$

### Przykład:

Rzucamy kostką do gry. Zdarzenie A to wyrzuceniu parzystej liczby oczek, zdarzenie B to wyrzucenie 5 oczek, zdarzenie C to wyrzucenie co najmniej 4 oczek. Zdarzenia A i B nie mają elementów wspólnych. Natomiast zdarzenia A i C mają dwa elementy wspólne  $\{4, 6\}$ .

## Własność 10:

Zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_n$  tworzą **układ zupełny zdarzeń**, jeżeli wyłączają się parami i suma ich jest zdarzeniem pewnym

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega \quad \text{oraz} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \\ \text{dla } i \neq j; i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

## Przykład:

Rzucamy kostką do gry. Zdarzenie A to wyrzucenie parzystej liczby oczek, zdarzenie B to wyrzucenie nieparzystej liczby oczek. Mamy  $A = \{2, 4, 6\}$ ,  $B = \{1, 3, 5\}$ . Wszystkie zdarzenia elementarne zdarzeń A i B tworzą całą przestrzeń zdarzeń elementarnych  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  oraz wykluczają się wzajemnie. Wynika z tego, że zdarzenia A i B tworzą układ zupełny zdarzeń.

### Własność 11:

Zdarzenia  $A$  i  $\bar{A}$  nazywamy **zdarzeniami przeciwnymi** jeśli tworzą układ zupełny zdarzeń, czyli

$$A \cup \bar{A} = \Omega \quad \text{oraz} \quad A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (15)$$

### Przykład:

Rzucamy kostką. Zdarzenie polegające na wyrzuceniu jednego oczka oraz zdarzenie polegające na wyrzuceniu co najmniej dwóch oczek są zdarzeniami przeciwnymi.

### Własność 12:

Zdarzenie  $A$  polegające na tym, że zajdzie zdarzenie  $A_1$  i nie zajdzie zdarzenie  $A_2$  nazywamy różnicą zdarzeń  $A_1$  i  $A_2$  i oznaczamy

$$A = A_1 - A_2 = A_1 \cap \bar{A}_2 \quad (16)$$

### Przykład:

Rzucamy kostką. Niech zdarzenie  $A_1$  polega na wyrzuceniu parzystej liczby oczek, a zdarzenie  $A_2$  na wyrzuceniu liczby oczek podzielnych przez 3. Zdarzenie  $A = A_1 - A_2$  polegać będzie na wyrzuceniu dwóch lub czterech oczek.

## Algebra zdarzeń:

1.  $A + B = B + A$
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$
3.  $A + O = A$
4.  $A + A = A$
5.  $AB = BA$
6.  $A(BC) = (AB)C$
7.  $AO = O$
8.  $A(A + B) = A$
9.  $A(B + C) = AB + AC$
10.  $A\Omega = A$
11.  $A + \bar{A} = \Omega$
12.  $A\bar{A} = O$



## Algebra zdarzeń cd. :

1.  $A + \Omega = \Omega$
2.  $AA = A$  - prawo tautologii dla iloczynu
3.  $A + AB = A$
4.  $A + BC = (A + B)(A + C)$
5.  $A \subseteq B \equiv A + B = B$  - relacja zawierania się (inkluzji)
6.  $A \subseteq B \equiv (AB = A)$
7. Prawa de Morgana:  $\overline{A + B} = \overline{A} \cap \overline{B}$   
 $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$
8.  $A - B = A\overline{B}$
9.  $(A - B) + B = A + B$
10. Iloczyn dwóch różnych zdarzeń elementarnych  $A_1$  i  $A_2$  jest zdarzeniem niemożliwym, czyli  $A_1A_2 = O$

## Algebra borelowska ( $\sigma$ -algebra) zdarzeń

Niech dany będzie zbiór  $\Omega$  dowolnych elementów. Z elementów tych tworzymy zbiory  $A_1, \dots, A_n$ . Zbiór utworzony z tych zbiorów oznaczmy symbolem  $R$ . Zbiór  $R$  będziemy nazywać algebrą i oznaczać  $S$  jeśli w zbiorze tym wykonalne są działania dodawania i dopełnienia spełniające aksjomaty Boole'a, tzn. jeśli założenia  $A_i \in R, A_j \in R$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) pociągają za sobą warunki:

1.  $A_i + A_j \in R$
2.  $\overline{A_i} \in R$
3.  $\Omega \in R$

W algebrze  $S$  określone są wszystkie wcześniej przedstawione działania na zbiorach.

## Algebra borelowska ( $\sigma$ -algebra) zdarzeń cd.

Jeśli uzupełnimy definicję algebry  $S$  o założenie przynależności do  $R$  zbiorów  $A_i (i = 1, 2, \dots)$  oraz

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in R \quad (17)$$

to algebrę  $S$  będziemy nazywać **borelowską ( $\sigma$ -algebra)**.

Jeżeli rozpatrywany zbiór  $\Omega$  jest zbiorem zdarzeń elementarnych to rozpatrywaną algebrę borelowską nazywamy **algebrą borelowską zdarzeń**, a elementy tej algebry zdarzeniami losowymi.

Jeżeli algebra zdarzeń złożona jest z  $n$  zdarzeń elementarnych to można utworzyć  $2^n$  zdarzeń należących do tej algebry.

## Klasyczna definicja prawdopodobieństwa Laplace'a

Określamy:

Zbiór podstawowy  $\Omega$  zdarzeń elementarnych  $A_1, \dots, A_n$  jednakowo możliwych.

Zbiór  $S$  utworzony ze zdarzenia niemożliwego  $O$ , wszystkich zdarzeń  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) oraz wszystkich zdarzeń  $A$ , które mogą być utworzone ze zdarzeń elementarnych  $A_i$  zbioru  $\Omega$  (razem  $2^n$  elementów).

### Przykład:

Jeśli  $\Omega = \{A_1, A_2, A_3\}$  to

$S = \{O, A_1, A_2, A_3, A_1 + A_2, A_1 + A_3, A_2 + A_3, A_1 + A_2 + A_3 = \Omega\}$ .

Tak utworzony zbiór  $S$  jest algebrą zdarzeń.

## Klasyczna definicja prawdopodobieństwa Laplace'a cd.

W rozpatrywanym zbiorze  $S$  każdemu zdarzeniu  $A$  przyporządkowujemy liczbę  $P(A) = p$  zwaną prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia  $A$  następująco:

**Definicja:** Jeżeli zbiór podstawowy składa się z  $n$  zdarzeń elementarnych jednakowo możliwych i jeżeli wśród nich jest  $k$  zdarzeń sprzyjających zajściu zdarzenia  $A$ , to liczbę

$$P(A) = \frac{k}{n} \quad (18)$$

nazywamy prawdopodobieństwem zajścia zdarzenia  $A$ .

## Przykład:

Dokonujemy trzech rzutów monetą. Obliczyć prawdopodobieństwo:

- 1) zdarzenia  $A$ , polegającego na tym, że orzeł pojawi się dwa razy;
- 2) zdarzenia  $B$ , polegającego na tym, że orzeł pojawi się co najmniej dwa razy;
- 3) zdarzenia  $C$ , polegającego na tym, że orzeł pojawi się co najwyżej dwa razy.

Zbiór podstawowy

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ROO, RRR, ORR, ROR, RRO\}.$$

- 1) Zbiór zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $A$ :  $OOR, ORO, ROO$  czyli

$$P(A) = \frac{3}{8}.$$

- 2) Zbiór zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $B$ :

$$OOO, OOR, ORO, ROO \text{ czyli } P(B) = \frac{4}{8}.$$

- 3) Zbiór zdarzeń sprzyjających zdarzeniu  $C$ :

$$OOR, ORO, ROO, RRR, ORR, ROR, RRO \text{ czyli } P(C) = \frac{7}{8}.$$

## Przykład:

Cyfry 1,2,3,4,5 są napisane na pięciu kartkach. Pobieramy losowo trzy kartki. Jakie jest prawdopodobieństwo  $p$  tego, że suma otrzymanych cyfr jest liczbą parzystą ?

## Przykład:

Cyfry 1,2,3,4,5 są napisane na pięciu kartkach. Pobieramy losowo trzy kartki. Jakie jest prawdopodobieństwo  $p$  tego, że suma otrzymanych cyfr jest liczbą parzystą ?

Ilość wszystkich możliwych zbiorów (trójek kartek) jest równa

$$C_5^3 = \binom{5}{3}.$$



**Przykład:**

Cyfry 1,2,3,4,5 są napisane na pięciu kartkach. Pobieramy losowo trzy kartki. Jakie jest prawdopodobieństwo  $p$  tego, że suma otrzymanych cyfr jest liczbą parzystą ?

Ilość wszystkich możliwych zbiorów (trójek kartek) jest równa

$$C_5^3 = \binom{5}{3}.$$

Ilość przypadków sprzyjających to ilość sposobów wylosowania dwóch cyfr spośród cyfr nieparzystych i jednej spośród parzystych,

$$\text{tzn. } C_3^2 * C_2^1 = \binom{3}{2} * \binom{2}{1}.$$

Ostatecznie

$$p = \frac{\binom{3}{2} * \binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{5} \quad (19)$$

## Podstawowe własności prawdopodobieństwa:

1. Prawdopodobieństwo  $P(A)$  zdarzenia pewnego równa się 1:  
$$P(A) = \frac{n}{n} = 1.$$
2. Prawdopodobieństwo  $P(A)$  zdarzenia niemożliwego równa się 0:  $P(A) = \frac{0}{n} = 0.$
3. Prawdopodobieństwo  $P(A)$  każdego zdarzenia spełnia:  
$$0 \leq P(A) \leq 1.$$
4. Jeżeli  $A \subset B$ , tzn. jeśli zajście zdarzenia  $A$  pociąga za sobą zajście zdarzenia  $B$ , to:  $P(A) \leq P(B)$

## Przykład:

W urnie są 3 kule zielone, 4 kule czerwono-zielone, 3 kule czerwono-zielono-niebieskie. Losujemy jedną kulę. Oznaczmy przez  $A_z$  zdarzenie otrzymania koloru zielonego, przez  $A_n$  koloru niebieskiego oraz przez  $A_c$  koloru czerwonego.

Zauważamy, że:

- ▶  $A_c \subset A_z$  ponieważ kula z kolorem czerwonym musi mieć również kolor zielony.
- ▶  $A_n \subset A_c \subset A_z$  ponieważ zajście zdarzenia  $A_n$  pociąga za sobą zajście zdarzeń  $A_c$  i  $A_z$ .
- ▶  $P(A_n) = \frac{3}{10}$ ,  $P(A_c) = \frac{7}{10}$ ,  $P(A_z) = 1$
- ▶  $P(A_c) < P(A_z)$ ,  $P(A_n) < P(A_c)$ ,  $P(A_n) < P(A_z)$

## Podstawowe własności prawdopodobieństwa cd:

1. Jeżeli  $A = B$  to  $P(A) = P(B)$
2. Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  polegającego na zajściu jednego z dwu wykluczających się zdarzeń  $A_1$  lub  $A_2$  równa się sumie prawdopodobieństw tych zdarzeń:  
$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

### Przykład:

Rzucamy kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że liczba otrzymanych oczek będzie mniejsza od 3 ?

Oznaczmy zdarzenie, którego prawdopodobieństwo szukamy przez  $A$ . Polega ono na wyrzuceniu jednego oczka ( $A_1$ ) lub dwóch oczek ( $A_2$ ). Zdarzenia  $A_1$  i  $A_2$  wykluczają się oraz  $P(A_1) = \frac{1}{6}$  i  $P(A_2) = \frac{1}{6}$ . Ostatecznie  $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ .

## Podstawowe własności prawdopodobieństwa cd:

1. Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  polegającego na zajściu przynajmniej jednego ze zdarzeń  $A_1, A_2$  równa się  
$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$$

### Przykład:

Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że z talii 52 kart losując jedną kartę wyciągniemy asa lub pika ?

Niech  $A_1$  oznacza wylosowanie pika, a  $A_2$  asa oraz  $A$  zajście przynajmniej jednego z tych zdarzeń. Zauważamy, że:  $P(A_1) = \frac{13}{52}$ ,  $P(A_2) = \frac{4}{52}$ ,  $P(A_1 A_2) = \frac{1}{52}$ . Stąd  $P(A) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$ .

## Podstawowe własności prawdopodobieństwa cd:

1. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przeciwnego do zdarzenia  $A$  równe jest  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

## Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Założenia:

- ▶ Dany jest niepusty zbiór  $\Omega$  zdarzeń elementarnych skończony lub nieskończony zwany przestrzenią.
- ▶ W przestrzeni  $\Omega$  określona jest borelowska algebra zdarzeń  $S$ .

Aksjomaty podstawowych własności prawdopodobieństwa zdarzenia  $A$ :

1. Prawdopodobieństwo  $P(A)$  jest nieujemne:  $P(A) \geq 0$ .
2. Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego równe jest 1:  
 $P(\Omega) = 1$ .
3. Jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  wykluczają się parami to:  
 $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$

**Definicja:** Borelowską algebrę zdarzeń  $S$  w przestrzeni  $\Omega$ , na której określona jest dla każdego zdarzenia  $A \in S$  funkcja  $P(A)$  spełniająca podane aksjomaty, nazywamy **algebrą prawdopodobieństwa** i oznaczamy  $[\Omega, S, P]$ .



## Własności prawdopodobieństwa

1. Jeśli  $A \subseteq B$  to  $P(A) \leq P(B)$
2.  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3.  $P(O) = 0$
4.  $0 \leq P(A) \leq 1$
5.  $P(B - A) = P(B) - P(AB)$
6. Jeżeli  $A \subset B$  to  $P(B - A) = P(B) - P(A)$
7.  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

## Prawdopodobieństwo geometryczne

**Definicja:** Niech będą dane  $S$  oraz  $\Omega$ . Każdemu zdarzeniu  $A \in S$  przypisujemy nieujemną liczbę  $m(A)$  zwaną **miarą zdarzenia  $A$** , jeśli spełnia ona:

1.  $m(A) \geq 0$
2.  $m(\emptyset) = 0$
3.  $m(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = m(A_1) + m(A_2) + \dots + m(A_n) + \dots$   
jeśli zdarzenia  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  wykluczają się parami.

**Definicja:** Prawdopodobieństwo geometryczne zdarzenia  $A$  określone jest jako

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \quad (20)$$

### Przykład:

Dwie osoby umówiły się w ustalonym miejscu między godziną 16:00 a 17:00. Obie osoby przychodzą w chwilach losowych, czekają  $t$  minut i odchodzą jeśli się nie spotkały. Obliczyć prawdopodobieństwo spotkania tych osób.

Oznaczmy:

$x$ -moment przyjścia osoby pierwszej,

$y$  - moment przyjścia osoby drugiej,

$A$  - zdarzenie polegające na spotkaniu się osób.

Zauważmy, że:

$$16 : 00 \leq x, y \leq 17 : 00,$$

osoby spotkają się gdy  $|x - y| \leq t$  lub inaczej

$$x - t \leq y \leq x + t.$$

Obszar spotkania jest zakreskowany na rysunku. Szukane prawdopodobieństwo równe jest ilorazowi pola zakreskowanego do pola całego kwadratu:  $p(A) = 1 - \frac{(60-t)^2}{60^2}$ .

### **Przykład:**

Strzelec strzela do tarczy. Obliczyć prawdopodobieństwo trafienia w ściśle określony punkt.

Jeśli przyjmiemy jako miarę zdarzenia miarę pola ograniczającego zbiór zdarzeń elementarnych to miarą trafienia w ściśle określony punkt jest 0. W rezultacie szukane prawdopodobieństwo równe jest ZERO, chociaż nie jest niemożliwe trafienie w wybrany punkt :)

## Przykład - Paradoks Bertranda

Na okręgu  $C$  o promieniu  $r$  rysujemy "losowo" cięciwę  $AB$ . Jakie jest prawdopodobieństwo  $p$ , że długość  $l$  tej cięciwy będzie większa niż długość  $r\sqrt{3}$  boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg?

### Rozwiązanie 1:

Środek  $M$  cięciwy  $AB$  jest punktem "losowym". Jeśli leży on w kole  $C_1$  o promieniu  $r/2$  to  $l > r\sqrt{3}$ . Szukane prawdopodobieństwo  $p$  równe jest stosunkowi pola koła  $C_1$  (wyniki sprzyjające) do koła  $C$  (wszystkie możliwe wyniki), czyli  $p = \frac{\pi r^2/4}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$ .

## Rozwiązanie 2:

Ponieważ koniec  $A$  cięciwy  $AB$  jest punktem "losowym", możemy przyjąć, że jest ustalony. Możliwych wyników jest więc mniej, lecz i wyników sprzyjających jest również proporcjonalnie mniej.

Będziemy mieć  $l > r\sqrt{3}$ , jeśli  $B$  leży na łuku  $DBE$ , którego długość jest równa  $2\pi r/3$ . Prawdopodobieństwo  $p$  jest więc równe stosunkowi długości  $2\pi r/3$  łuku  $DBE$  (wyniki sprzyjające) do długości  $2\pi r$  okręgu (wszystkie wyniki):  $p = \frac{2\pi r/3}{2\pi r} = \frac{1}{3}$ .

### Rozwiązanie 3:

Ponieważ kierunek  $AB$  jest "losowy", możemy założyć, że jest ustalony, prostopadły do średnicy  $FK$  (rysunek). Znowu wyniki sprzyjające i możliwe zmieniają się proporcjonalnie. Będziemy mieć  $l > r\sqrt{3}$ , jeśli środek  $M$  cięciwy  $AB$  leży między  $G$  i  $H$ , a zatem  $p$  jest równe stosunkowi długości  $r$  odcinka  $GH$  (wyniki sprzyjające) do długości  $2r$  średnicy  $FK$  (wszystkie wyniki):  $p = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$ .