Równanie różniczkowe liniowe

Pod względem matematycznym szukana odpowiedź układu liniowego o znanych stałych parametrach R_k, L_k, C_k w k-tej gałęzi przy danych wymuszeniach, oznaczona przez x, badana w stanie nieustalonym, spełnia równanie różniczkowe liniowe, zwyczajne, niejednorodne, o współczynnikach stałych, mające postać:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + + a_{n-2}\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

Wyraz wolny *f(t)* jest związany z wymuszeniami , którymi są np. napięcia źródłowe lub prądy źródłowe.

Zależnie od tego, czy wolny wyraz występuje, czy też nie, rozróżniamy dwa przypadki:

- przypadek ogólny, w którym wyraz wolny znajduje się pod działaniem wymuszenia zewnętrznego, nie będącego tożsamościowo równym zeru i układowi temu jest przyporządkowane pełne równanie.
- przypadek szczegółowy, w którym układ jest w stanie swobodnym
  (nie działa na niego wymuszenie zewnętrzne), prawa strona równania jest wówczas równa zeru i mamy równanie różniczkowe zwyczajne.

W każdym z tych przypadków przy rozwiązywaniu równania rzędu *n* występuje w rozwiązaniu *n* stałych całkowania, które wyznaczamy z *n* danych warunków początkowych lub warunków brzegowych.
Rozwiązanie równania różniczkowego, które stanowi odpowiedź x układu w stanie nieustalonym, składa się z dwóch członów (zwanych składowymi) :
X_w - *składowej wymuszonej, która stanowi całkę szczególną równania różniczkowego niejednorodnego*
X_s - *składowej swobodnej, która stanowi całkę ogólną równania różniczkowego jednorodnego*.
Odpowiedź *X* układu w stanie nieustalonym jest sumą algebraiczną obu wyżej wymienionych składowych.

$$X=X_w+X_s$$

Układ *n* równań różniczkowych liniowych

Równanie różniczkowe liniowe rzędu *n* jest równoważne układowi *n* równań różniczkowych liniowych, pierwszego rzędu, o współczynnikach stałych, zawierających *n* zmiennych x_k przy *k=1, 2, ...n*.
Układ ten napiszemy w postaci macierzowej:

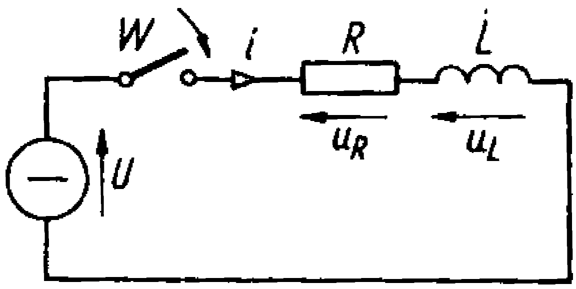
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

czyli krótko: $\dfrac{d\boldsymbol{X}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{F}(t)$

Wektor ***X*** nazywamy wektorem stanu.

Badanie gałęzi szeregowej *RL*.

Odbiornikiem jest gałąź szeregowa *R,L* przy warunku początkowym zerowym, a wymuszeniem - napięcie stałe *U* doprowadzone do odbiornika w chwili *t = 0*:



Zakładamy, że w chwili *t = 0* napięcie doprowadzone wzrasta skokiem od wartości zerowej do wartości *U* (czyli wyłącznik **W** zostaje zamknięty momentalnie i w sposób bezłukowy). Bilans napięć w oczku elementarnym daje równanie różniczkowe liniowe niejednorodne, o współczynnikach stałych:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = U$$

Po rozdzieleniu zmiennych *i* oraz *t* , następnie po całkowaniu równania i po zdelogarytmowaniu, otrzymujemy prąd w stanie nieustalonym, będący funkcją czasu:

$$i = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

Wprowadzamy wielkość fizyczną, zwaną stałą czasu, określoną wzorem: $\tau = L/R$ zależną tylko od parametrów badanej gałęzi: indukcyjności *L* oraz rezystancji *R*.

Wstawiając stałą czasową do wzoru na prąd w stanie nieustalonym otrzymujemy:

$$i = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

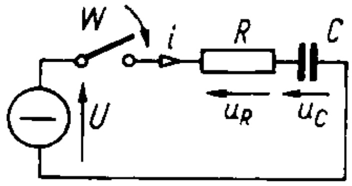
Wartość chwilowa prądu nazywamy prądem nieustalonym, jest ona sumą algebraiczną dwóch członów:

- człon $i_w = U/R = I$, zwany jest prądem wymuszonym lub prądem ustalonym, który ma taki kształt jak wymuszenie U, a więc jest niezależny od czasu.
- człon $i_s = -\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$, zwany prądem swobodnym lub prądem przejściowym, który jest funkcją czasu malejącą wykładniczo i dąży asymptotycznie do zera.

Suma algebraiczna tych składowych , prąd $i = i_w + i_s$ jest funkcją czasu rosnącą *i* dąży asymptotycznie do prądu ustalonego I , gdy czas dąży do nieskończoności.

Badanie gałęzi szeregowej *R,C*.

Odbiornikiem jest gałąź szeregowa *R,C* przy warunku początkowym zerowym, a wymuszeniem - napięcie stałe *U* doprowadzone do odbiornika w chwili początkowej $t = 0$.



W chwili początkowej $t = 0$ napięcie doprowadzone wzrasta skokiem od wartości zerowej do wartości *U*. Odpowiedzią układu jest napięcie na kondensatorze u_C będące funkcją czasu; prąd ładowania kondensatora oznaczamy przez *i* bez wskaźnika. Wielkości te są ze sobą związane zależnością:

$$i = C\frac{dU_C}{dt}$$

Bilans napięć w oczku elementarnym wyrażamy równaniem:

$$u_C + Ri = U$$

Napięcie wymuszone u_{CW}, stanowiące całkę szczególną równania niejednorodnego, ma taki kształt jak wymuszenie i wynosi:

$$u_{CW} = U$$

Napięcie swobodne u_{Cs} na kondensatorze, stanowiące całkę ogólną równania jednorodnego:

$$u_{CS} = -Ue^{\frac{-t}{RC}}$$

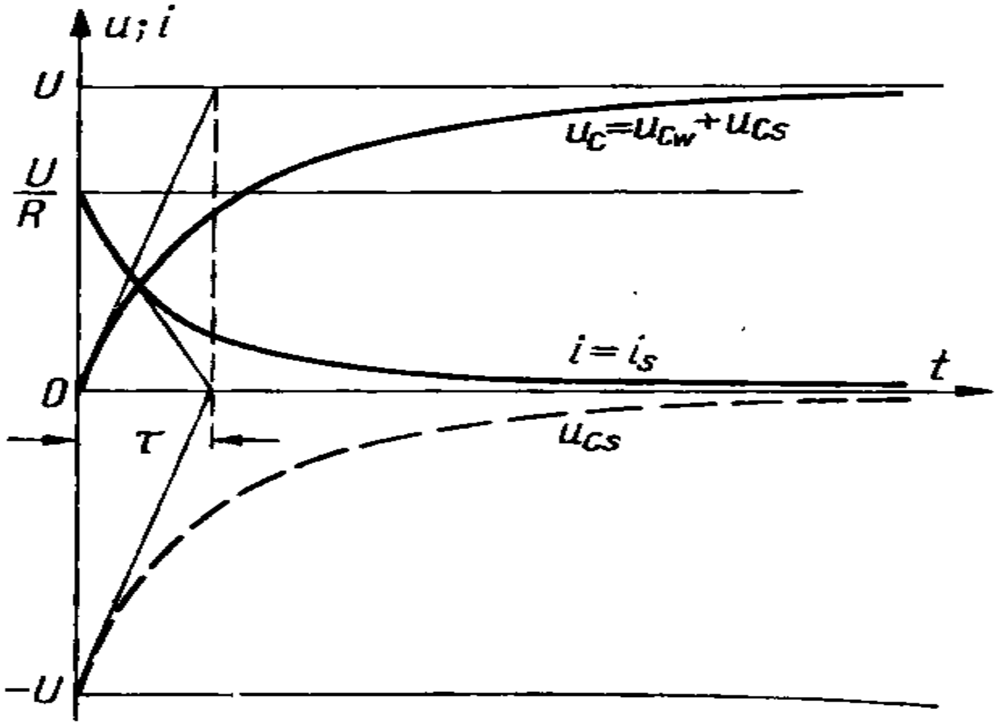
Napięcie nieustalone na kondensatorze wynosi:

$$u_C = u_{CW} + u_{CS} = U(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

a prąd ładowania kondensatora

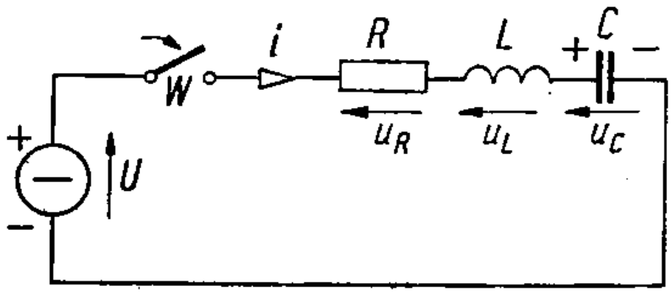
$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Stała czasowa jest w rozpatrywanym obwodzie określona wzorem: $\tau = RC$



Badanie gałęzi szeregowej *RLC*

Przypadek gdy kondensator ładowany jest ze źródła napięcia stałego, poprzez opornik i cewkę.
Mamy dany obwód, w którym odbiornikiem jest gałąź szeregowa o parametrach *R,L,C* różnych od zera przy warunkach początkowych zerowych, a wymuszeniem - napięcie stałe *U* doprowadzone w chwili początkowej *t = 0*.
Zakładamy, że w chwili *t = 0* napięcie doprowadzone wzrasta skokiem od wartości zerowej do wartości *U*, czyli wyłącznik ***W*** zostaje zamknięty momentalnie.



Za odpowiedź obwodu obieramy napięcie u_C na kondensatorze, będące funkcją czasu.
Bilans napięć w oczku daje równanie:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + u_C = U$$

Z równania tego eliminujemy prąd za pomocą zależności:

$i = C\dfrac{dU_C}{dt}$ i dochodzimy do równania różniczkowego

liniowego niejednorodnego, drugiego rzędu, o współczynnikach stałych:

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{1}{LC}U$$

Napięcie wymuszone na kondensatorze u_{CW}, stanowiące całkę szczególną równania różniczkowego niejednorodnego, ma taki kształt jak wymuszenie , jest stałe i wynosi:

$$u_{CW}=U$$

Napięcie swobodne na kondensatorze u_{CS}, stanowi całkę ogólną równania różniczkowego jednorodnego drugiego rzędu:

$$\frac{d^2u_{Cs}}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_{Cs}}{dt}+\frac{1}{LC}u_{Cs}=0$$

Równaniu temu odpowiada równanie charakterystyczne:

$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=0$$

Pierwiastki równania charakterystycznego wynoszą:

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm\beta$$

Przy czym:

$$\alpha=-\frac{R}{2L}\qquad\beta=\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

Zależnie od rezystancji rozróżniamy trzy rodzaje rozwiązania

Przypadki rozwiązań zależne od rezystancji

Przy $R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ wielkość β przedstawia liczbę rzeczywistą oba pierwiastki są rzeczywiste i ujemne. Fizycznie odpowiada temu ładowanie kondensatora ze źródła napięcia stałego poprzez rezystancję R i indukcyjność L, mające charakter aperiodyczny (nieokresowy).

Ładowanie aperiodyczne

Obydwa pierwiastki leżą na ujemnej części osi rzeczywistej.
Przy warunkach początkowych zerowych zachodzi:

$$U_C(0) = 0$$

oraz

$$i(0) = C\frac{du_C(0)}{dt} = 0$$

Napięcie wymuszone na kondensat. jest stałe i wynosi $u_{CW} = U$.

Napięcie na kondensatorze w stanie nieustalonym:

$$u_C = U + \frac{U}{s_1 + s_2}(s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) = U - U e^{\alpha t}(ch\beta t + \frac{\alpha}{\beta} sh\beta t)$$

Prąd płynący w obwodzie:

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U}{L(s_1 + s_2)}(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) = \frac{U}{\beta t} e^{-\alpha t} sh\beta t$$

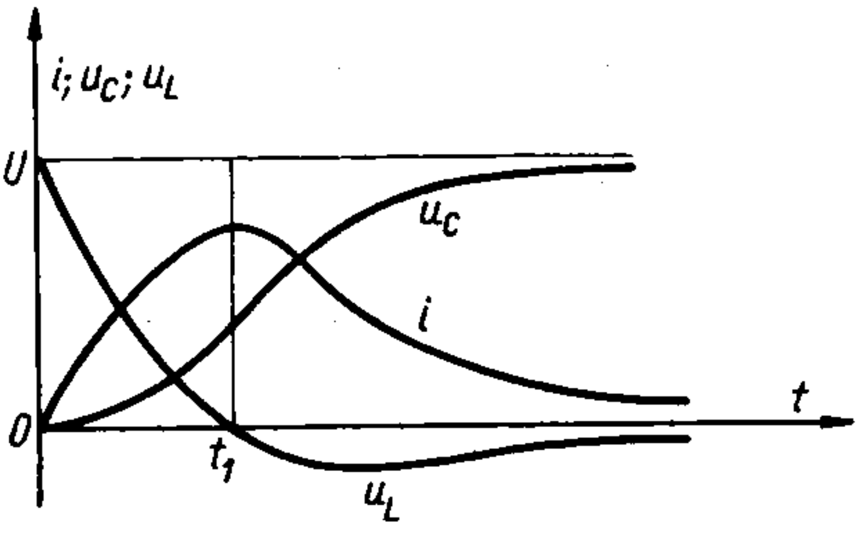
Napięcie na cewce:

$$u_L = L\frac{di}{dt} = U e^{-\alpha t}(ch\beta t - \frac{\alpha}{\beta} sh\beta t)$$

Napięcie na oporniku:

$$u_R = U e^{-\alpha t}\frac{2\alpha}{\beta} sh\beta t$$

Przebiegi w funkcji czasu prądu w obwodzie oraz napięcia na kondensatorze i napięcia na cewce:



Przypadek graniczny

przy $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ wielkość β staje się zerem, pierwiastki równania charakterystycznego są sobie równe i tworzą jeden pierwiastek podwójny, rzeczywisty i ujemny. Fizycznie odpowiada temu ładowanie kondensatora ze źródła napięcia stałego poprzez rezystancję *R* i indukcyjność *L*, mające charakter aperiodyczny krytyczny (nieokresowy krytyczny):

$$i(t) = \frac{U}{L} t e^{\alpha t}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = Ue^{-\alpha t}(1 - \alpha t)$$

$$u_R = Ri = 2U\alpha t e^{-\alpha t}$$

$$u_C = U - u_R - u_L = U - U(1 + \alpha t)e^{-\alpha t}$$

Ładowanie periodyczne

Przy $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ wielkość β przedstawia liczbę urojoną.

Obydwa pierwiastki są zespolone sprzężone. Fizycznie odpowiada temu ładowanie kondensatora ze źródła napięcia stałego poprzez rezystancję R i indukcyjność L takie, że przebiegi napięcia na kondensatorze i prądu w funkcji czasu są oscylacyjne tłumione, w szczególności sinusoidalne tłumione. Rozwiązania można uzyskać na podstawie rozwiązań dla przypadku aperiodycznego podstawiając $\beta = j\omega$:

Prąd płynący w obwodzie:

$$i = \frac{U}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin\omega t$$

Prąd jest zatem funkcją czasu sinusoidalną tłumioną , dążącą do zera przy czasie zmierzającym do zera. Napięcia na poszczególnych elementach:

$$u_L = \frac{U}{\omega\sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \sin(\omega t - \varphi),$$

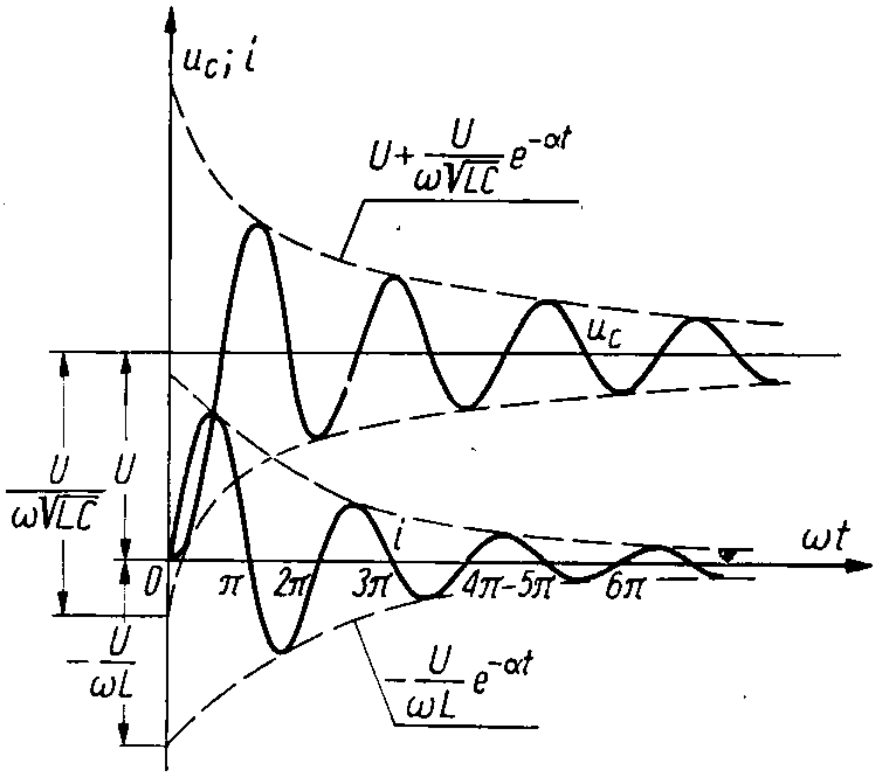
$$u_R = 2\frac{U}{\omega}\alpha e^{-\alpha t} \sin(\omega t),$$

$$u_C = U - u_R - u_L = U - \frac{U}{\omega\sqrt{LC}} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi),$$

przy wprowadzeniu kąta φ takiego, że:

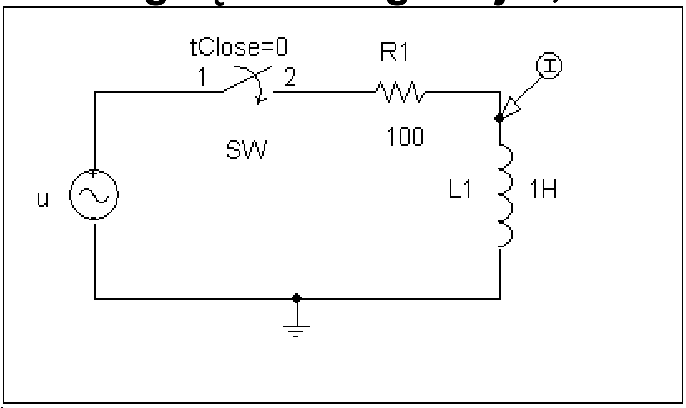
$$\sin\varphi = \omega\sqrt{LC}, \quad \cos\varphi = \alpha\sqrt{LC}, \quad tg\varphi = \frac{\omega}{\alpha}$$

Przebieg napięcia nieustalonego na kondensatorze i prądu nieustalonego w funkcji czasu:



We wszystkich trzech przypadkach pierwiastki równania charakterystycznego leżą w lewej półpłaszczyźnie. W związku z tym składowa swobodna odpowiedzi u_{CS} maleje do zera dla czasu dążącego do nieskończoności.

Włączenie napięcia sinusoidalnie zmiennego do gałęzi szeregowej R, L



Bilans napięć w oczku:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = |U_m|\sin(\omega t + \psi)$$

$$i = i_w + i_s$$

Prąd wymuszony jest całką szczególną równania różniczkowego:

$$i_w = \frac{|U_m|}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\sin(\omega t + \psi - \varphi), \quad \text{gdzie: } \varphi = arctg\frac{\omega L}{R}$$

Prąd swobodny jest całką ogólną równania różniczkowego upr.:

$$Ri_s + L\frac{di_s}{dt} = 0$$

Równanie charakterystyczne R + L s = 0, s_1 = -R/L czyli:

$$i_s = A e^{-\frac{R}{L}t}$$

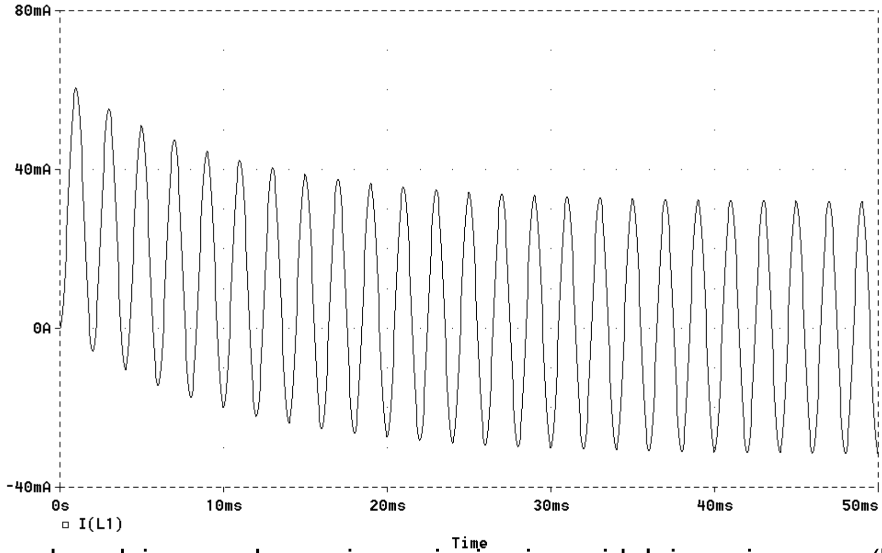
Stałą czasową A wyznaczamy z warunku początkowego:

$i(0) = i_w(0) + i_s(0) = 0$ zatem:

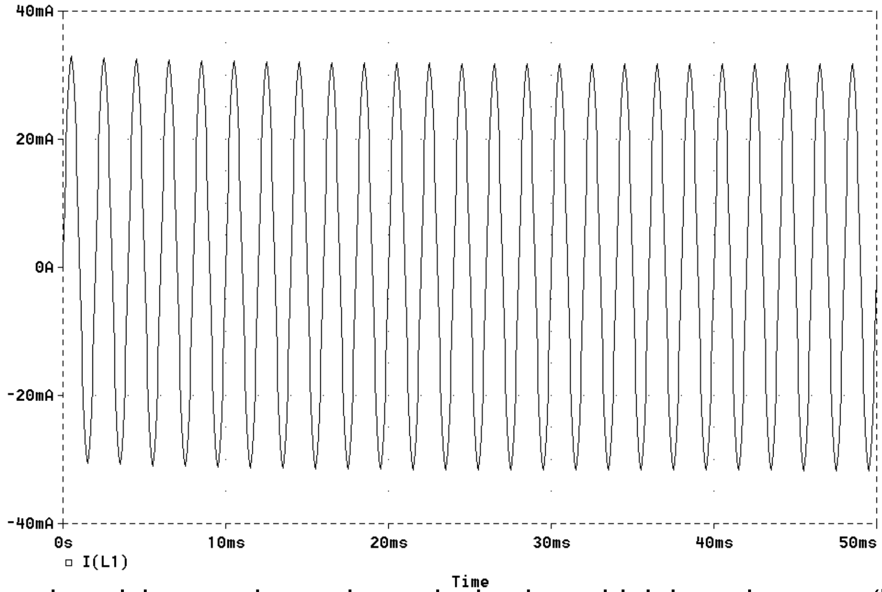
$$A = \frac{|U_m|}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\sin(\psi - \varphi),$$

całkowity prąd nieustalony wynosi :

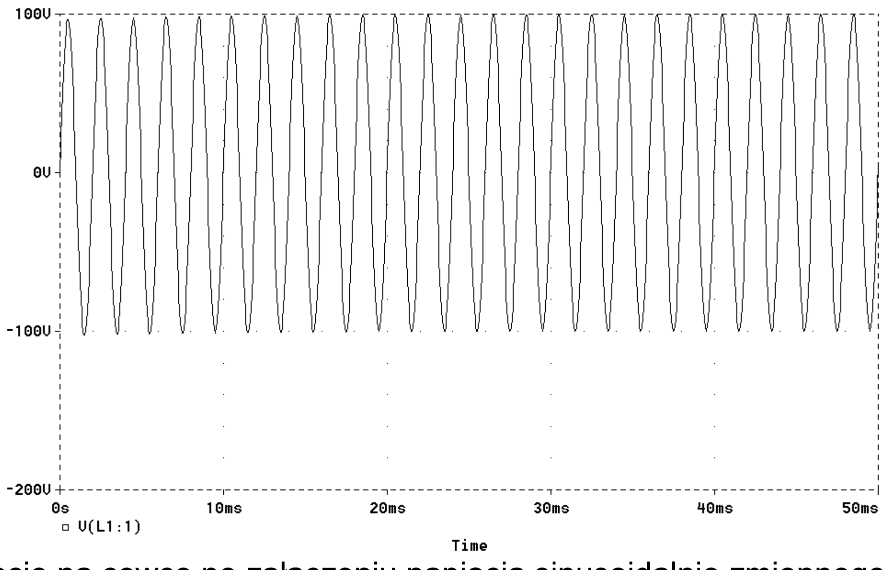
$$i = \frac{|U_m|}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}\left[\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \varphi)e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$



Rys.1. Prąd w obwodzie po załączeniu napięcia sinusoidalnie zmiennego (Ψ=0)



Rys.2. Prąd w obwodzie po załączeniu napięcia sinusoidalnie zmiennego (Ψ=86°)



Rys.3. Napięcie na cewce po załączeniu napięcia sinusoidalnie zmiennego (Ψ=0°)