

## Ćwiczenie 11

Prawa autorskie zastrzeżone:  
Zakład Teorii Obwodów PWr

### UKŁADY O STAŁYCH ROZŁOŻONYCH

Celem ćwiczenia jest:

- zapoznanie się ze zjawiskami zachodzącymi w linii długiej oraz jej wykorzystanie do pomiaru impedancji.

W ćwiczeniu należy:

- zmierzyć rozkład napięcia wzdłuż linii długiej przy różnych jej obciążeniach,
- wyznaczyć krzywą skalowania detektora,
- zmierzyć impedancję wybranych dwójników.

### A. Wprowadzenie

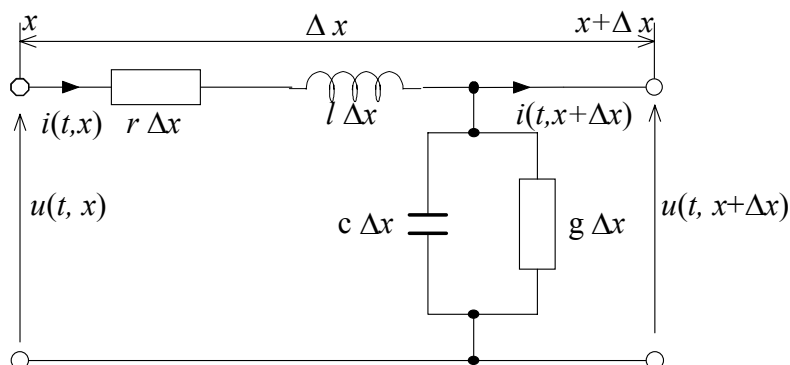
#### 1. Wstęp

W przypadku ogólnym do opisu zjawisk zachodzących w układach o stałych rozłożonych konieczne jest posługiwanie się metodami teorii pola elektromagnetycznego. Jeżeli jednak rozpatrywana struktura ma charakter linii transmisyjnej, tzn. tylko jeden z wymiarów (długość) nie spełnia warunków kwazistacjonarności, wówczas można dla niej zbudować zastępczy model obwodowy i jego analizę przeprowadzić metodami teorii obwodów [1].

Z analizy układu zastępczego elementarnego odcinka linii transmisyjnej, przedstawionego na rys.1, wynika następujący układ równań różniczkowych dla napięć i prądów:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} &= -l \frac{\partial i(t, x)}{\partial t} - r i(t, x), \\ \frac{\partial i(t, x)}{\partial x} &= -c \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - g u(t, x).\end{aligned}\tag{1}$$

w których  $l$ ,  $c$ ,  $r$ ,  $g$  są parametrami jednostkowymi (indukcyjność, pojemność, rezystancja i upływność).



Rys. 1

## 2. Linia szczelinowa

W wyniku analizy równań telegrafistów w stanie ustalonym, przy pobudzeniu sinusoidalnym [1] otrzymuje się następujące równanie opisujące rozkład fali stojącej napięcia wzdłuż linii obciążonej impedancją  $\underline{Z}_k$  (rys. 2):

$$\underline{U} = \frac{1}{2}(\underline{U}_k + \underline{I}_k \underline{Z}_f) e^{\gamma y} (1 + \Gamma_k e^{-2\gamma y}), \quad (2)$$

gdzie:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)} = \alpha + j\beta, \quad (3)$$

$$\underline{Z}_f = \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}}, \quad (4)$$

$$\underline{\Gamma}_k = \frac{\underline{Z}_k - \underline{Z}_f}{\underline{Z}_k + \underline{Z}_f} = \Gamma_k e^{j\theta_k}. \quad (5)$$

Wielkości występujące w powyższych wzorach noszą nazwy:

$y$  - długość linii mierzonej od końca w kierunku generatora,

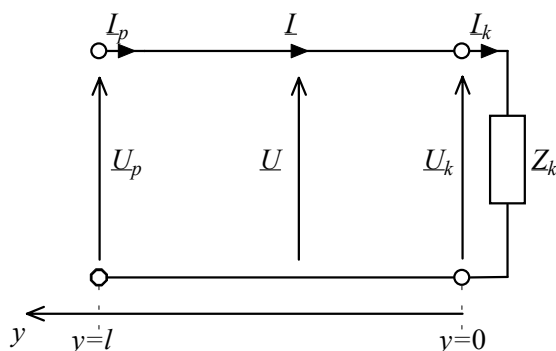
$\underline{\gamma}$  - tłumność jednostkowa,

$\alpha$  - tłumienie jednostkowe,

$\beta$  - przesuwność jednostkowa,

$\underline{\Gamma}_k$  - współczynnik odbicia na końcu linii,

$\underline{Z}_f$  - impedancja falowa.



Rys. 2

Linia szczelinowa wykorzystywana w ćwiczeniu jest linią bezstratną, tzn.  $r = 0$  i  $g = 0$ . Dla tego przypadku

$$\underline{\gamma} = j\beta = j\omega \sqrt{lc}, \quad (6)$$

$$\underline{Z}_f = Z_f = R_f = \sqrt{\frac{l}{c}} \quad (7)$$

i ograniczając się do modułu równanie (2) można zapisać w postaci

$$U = U_{ik} \sqrt{1 + 2\Gamma_k \cos(2\beta y - \theta_k) + \Gamma_k^2}, \quad (8)$$

gdzie

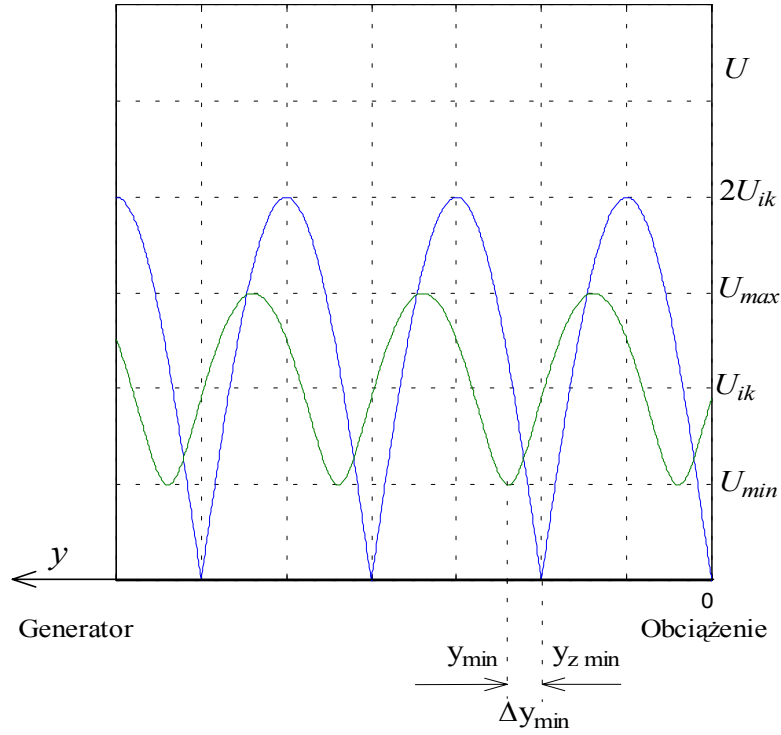
$$U_{ik} = \frac{1}{2} \left| (\underline{U}_k + \underline{I}_k \underline{Z}_f) \right|. \quad (9)$$

Równanie (8) opisuje falę stojącą napięcia w linii bezstratnej. Minimum fali stojącej (rys. 3) występuje w punktach  $y$ , w których

$$\cos(2\beta y - \theta_k) = -1, \quad (10)$$

czyli w punktach odległych od końca toru o

$$y_{\min} = \frac{\theta_k + (2k+1)\pi}{2\beta}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$



Rys. 3

Dla linii zwartej na końcu  $\theta_k = \pm\pi$ ,

czyli

$$y_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi} (\pm\pi + (2k+1)\pi), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Z przesunięcia minimum

$$\Delta y = y_{\min} - y_{z \min} = \frac{\theta_k \mp \pi}{2\beta}, \quad (13)$$

można wyznaczyć argument współczynnika odbicia

$$\theta_k = 2\beta\Delta y \pm \pi = \pi \left( 4 \frac{\Delta y}{\lambda} \pm 1 \right), \quad (14)$$

gdzie  $\lambda$  jest długością fali rozchodzącej się w linii.

Napięcia w strzałkach i węzłach fali stojącej wynoszą odpowiednio:

$$U_{\max} = U_{ik} (1 + \Gamma_k), \quad (15)$$

$$U_{\min} = U_{ik} (1 - \Gamma_k). \quad (16)$$

Za pomocą ilorazu obu tych wartości, zwanego współczynnikiem fali stojącej

$$\text{wfs} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}, \quad (17)$$

wyznacza się moduł współczynnika odbicia

$$\Gamma_k = \frac{\text{wfs} - 1}{\text{wfs} + 1}. \quad (18)$$

Ostatecznie z (5) po podstawieniu (14) i (18) otrzymuje się

$$\underline{Z}_k = \underline{Z}_f \frac{1 + \underline{\Gamma}_k}{1 - \underline{\Gamma}_k}. \quad (19)$$

## B. Część laboratoryjna

Wykaz przyrządów:

- generator mikrofalowy,
- linia szczelinowa z sondą,
- woltomierz.

### 1. Pomiary z wykorzystaniem linii szczelinowej.

- 1.1. Wyznaczyć długość i częstotliwość fali rozchodzącej się w linii poprzez znalezienie położenia dwóch sąsiednich minimów napięcia fali stojącej w linii zwartej na końcu. Jedno z tych minimów będzie punktem odniesienia do dalszych pomiarów.
- 1.2. Zmierzyć rozkład napięcia w linii zwartej na końcu (od pierwszego minimum do pierwszego maksimum, np. co 2 mm) i wyznaczyć krzywą skalowania detektora (patrz Dodatek)
- 1.3. Zmierzyć rozkłady napięcia wzdłuż całej linii (co 1 cm):
  - obciążonej rezystorem mikrofalowym,
  - zwartej na końcu,
  - obciążonej kolejno trzema dwójnikami.

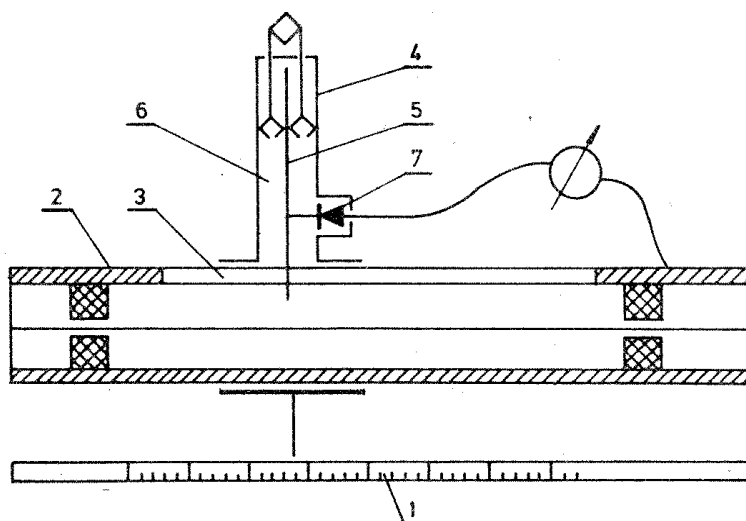
Uwaga. Dla każdego obciążenia zmierzyć położenie i wartość pierwszego minimum.

- 1.4. Uwzględniając krzywą skalowania detektora, sporządzić wykresy rzeczywistych rozkładów napięć wzdłuż linii obciążonej kolejno trzema dwójnikami z p. 1.3.
- 1.5. Wyznaczyć impedancje tych dwójników ( $Z_f = 75 \Omega$ ). Na podstawie znanych rozkładów napięcia wzdłuż linii w przypadku zwarcia linii oraz obciążenia można przedstawić następującą procedurę wyznaczania impedancji obciążenia  $\underline{Z}_k$ :
  - wyznaczyć długość fali  $\lambda$ . Jedno z minimów (należy pamiętać, że minimum odniesienia dla rezystora mikrofalowego jest w innym punkcie, niż dla pozostałych dwójników) wybierać jako punkt odniesienia do dalszych działań,
  - wyznaczyć  $\Delta y$  ze wzoru (13) (wartość jest dodatnia, jeśli mierzy się w kierunku generatora),

- obliczyć  $\theta_k$  w radianach ze wzoru (14),
- wyznaczyć rzeczywisty moduł współczynnika odbicia  $wfs_{rz} = \frac{U_{\max rz}}{U_{\min rz}}$ , gdzie  $U_{\max rz}$  i  $U_{\min rz}$  należy wyznaczyć z krzywej skalowania detektora otrzymanej z (8),
- ze wzoru (18) wyznaczyć moduł współczynnika odbicia  $\Gamma_k$ , a następnie z (19) impedancję  $Z_k$ .

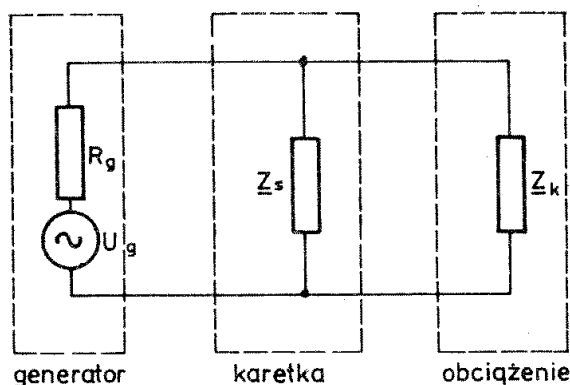
### C. Dodatek

Na rysunku 4 przedstawiono schemat ilustrujący konstrukcję współosiowej pomiarowej linii szczelinowej oraz dodatkowo miernik prądu detektora. Linia zbudowana jest z dwóch zasadniczych części: umieszczonego na podstawie ze skalą 1 odcinka linii współosiowej 2 z wyciętą szczeliną 3 i ruchomej karetki 4 zawierającej sondę 5, przestrajany rezonator 6, detektor (diodę mikrofalową) 7.



Rys. 4

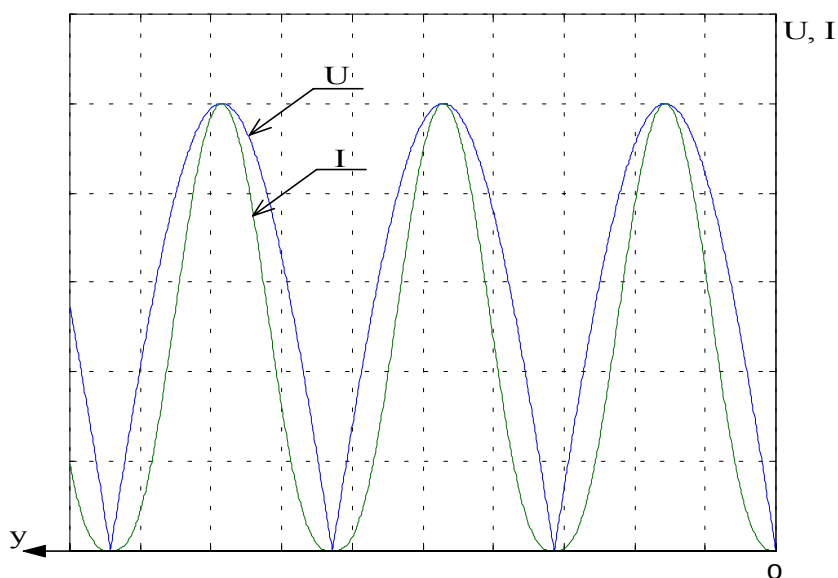
Schemat elektryczny linii obciążonej dwójnikiem  $Z_k$  z dołączonym generatorem wielkiej częstotliwości pokazano na rys. 5



Rys. 5

Impedancja  $\underline{Z}_s = R_s + jX_s$ , reprezentująca impedancję wnoszoną do linii przez układ: sonda, rezonator detektor, powoduje zmianę rozkładu fali stojącej w linii. W celu minimalizacji tego wpływu należy oprócz stosowania małego sprzężenia sondy z linią (konstrukcja mechaniczna) także dostrajać rezonator do częstotliwości pracy generatora. Zapewnia to kompensację składowej reaktancyjnej  $X_s$ , maksymalizację  $R_s$  oraz maksymalny prąd na wyjściu detektora uwarunkowany przepięciem w rezonatorze.

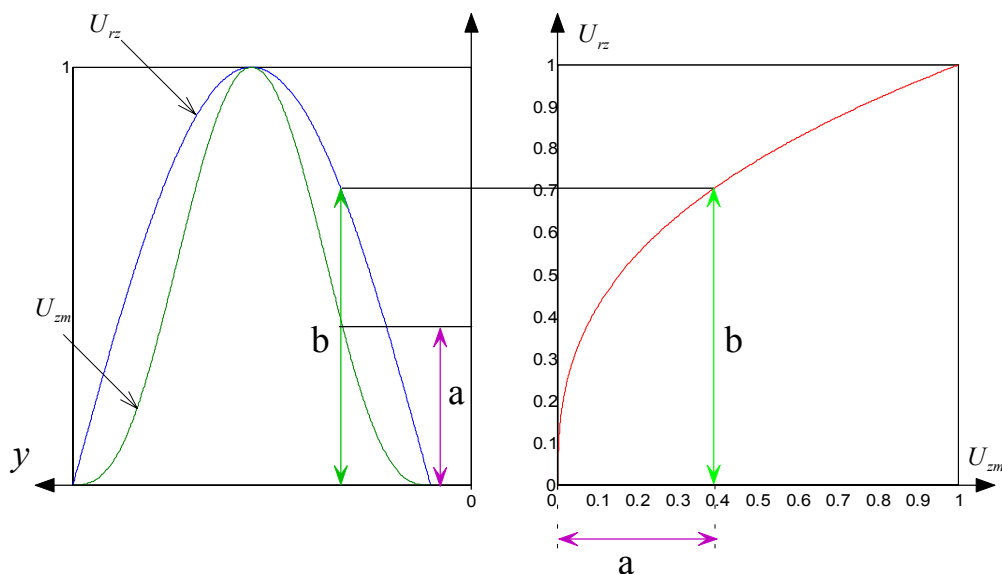
Gdy charakterystyka napięciowo-prądowa detektora jest liniowa, wówczas prąd mierzony przez miernik jest proporcjonalny do wartości skutecznej napięcia w linii. W przypadku nieliniowego detektora, np. diody półprzewodnikowej, prąd płynący przez miernik jest związany nieliniową zależnością z napięciem w linii. Na rysunku 6 linią niebieską przedstawiono rzeczywisty rozkład napięcia w linii, a linią zieloną prąd płynący przez detektor mikrofalowy.



Rys. 6

Nieliniowość detektora musi być uwzględniona przy pomiarach współczynnika fali stojącej. Stosunek napięcia w strzałce i w węźle fali stojącej nie jest bowiem na ogół równy stosunkowi maksimum i minimum prądu płynącego przez miernik  $\frac{U_{\max}}{U_{\min}} \neq \frac{I_{\max}}{I_{\min}}$ .

Najprostszą metodą uwzględniania nieliniowości jest sporządzenie tzw. krzywej skalowania detektora. Sposób konstruowania krzywej skalowania detektora zilustrowano na rys.7



Rys. 7

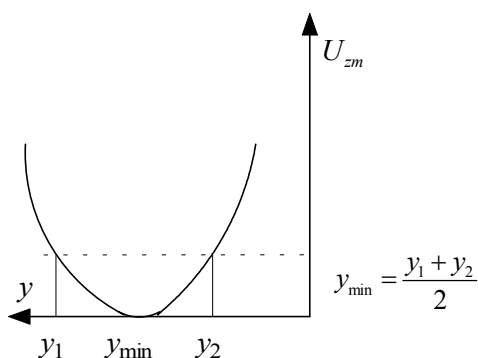
W lewej części rysunku linią zieloną oznaczono  $U_{zm}$  przebieg napięcia (napięcie to jest proporcjonalne do prądu płynącego przez rezystor pomiarowy) wskazywanego przez miernik podczas pomiaru rozkładu napięcia w linii zwartej na końcu. Każdej wartości mierzonej np.  $a$ , odpowiada wartość rzeczywista, tzn. wartość, którą można obliczyć z zależności (8), przyjmując  $\Gamma_k = -1$ , tzn.

$$U = U_{ik} \sqrt{1 + 2 \cos(2\beta y \pm \pi) + 1} = U_{ik} \sqrt{4 - 4 \cos^2(\beta y)} =$$

$$2U_{ik} \sqrt{1 - \cos^2(\beta y)} = 2U_{ik} |\sin(\beta y)|$$

( $U_{ik}$  oraz  $y$  należy tak dobrać, aby  $U_{zm}$  i  $U_{rz}$  dokładnie pokrywały się w trzech punktach). Przyporządkowanie wartościom zmierzonym wartości rzeczywistych pozwala na wyznaczenie krzywej skalowania detektora. Znajomość tej krzywej pozwala wykreślić rzeczywisty rozkład napięcia w linii przy dowolnym obciążeniu, a tym samym na prawidłowe określenie współczynnika fali stojącej.

W celu zwiększenia dokładności wyznaczania położenia minimum  $y_{min}$  fali stojącej celowe jest zastosowanie procedury uśredniającej, jak na rys.8.



Rys. 8

### Pytania kontrolne

1. Wyjaśnić pojęcie kwazistacjonarności. Podać zakres stosowalności modelu obwodowego dla układów o stałych rozłożonych.
2. Wymienić przykłady zastosowania odcinków linii długiej bezstratnej zwartych i rozwartych na końcu.
3. Jak można zrealizować rozwarcie linii?
4. Jak wpływa na rozkład fali stojącej w torze niedopasowanie generatora do linii? Jak się można przed tym niedopasowaniem zabezpieczyć?
5. Wyznaczyć impedancję  $\underline{Z}_k$ , jeśli w linii szczelinowej zmierzono następujące wielkości:  
 $y_{z\min 1} = 15 \text{ cm}$ ,  $y_{z\min 2} = 25 \text{ cm}$ ,  $y_{\min} = 20 \text{ cm}$ ,  $U_{\max} = 300 \text{ mV}$ ,  $U_{\min} = 75 \text{ mV}$ . Przyjąć a) liniową, b) kwadratową charakterystykę detektora.
6. Dla częstotliwości  $f = 100 \text{ kHz}$  prędkość fazowa w bezstratnej linii wynosi  $v_f = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Obliczyć tamowność  $\gamma$  tej linii oraz długość fali  $\lambda$  w linii.
7. Obliczyć najmniejszą częstotliwość  $f_0$  przy której linia o długości  $l = 250 \text{ m}$  i prędkości fazowej  $v_f = 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  jest linią ćwierćfalową.
8. Obliczyć indukcyjność jednostkową  $l$ , pojemność jednostkową  $c$  oraz rezystancję falową  $Z_f = R_f$  bezstratnej linii koncentrycznej o wymiarach  $2a = 2 \text{ cm}$  (średnica przewodu wewnętrznego),  $2d = 10 \text{ cm}$  (średnica zewnętrzna). Linia jest wypełniona dielektrykiem o względnej przenikalności elektrycznej  $\epsilon_r = 2,5$ .
9. Obliczyć impedancję wejściową bezstratnej linii ćwierćfalowej o  $Z_f = 75 \Omega$  i długości  $l = 1 \text{ m}$ , obciążonej pojemnością  $C = 50 \text{ pF}$ . Przyjąć  $v_f = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .
10. Wykazać, że współczynnik odbicia  $\underline{\Gamma}_k$  w bezstratnej linii obciążonej impedancją  $\underline{Z}_k = jX$  (czysta reaktancja) ma moduł równy jeden a współczynnik fali stojącej  $w_{fs} \rightarrow \infty$ .

### Literatura

- [1] Uruski M., Wolski W., Teoria obwodów II, skrypt Pwr., Wrocław 1984.  
[2] Osiowski J., Szabatin J., Podstawy teorii obwodów, tom III, WNT, Warszawa 1995