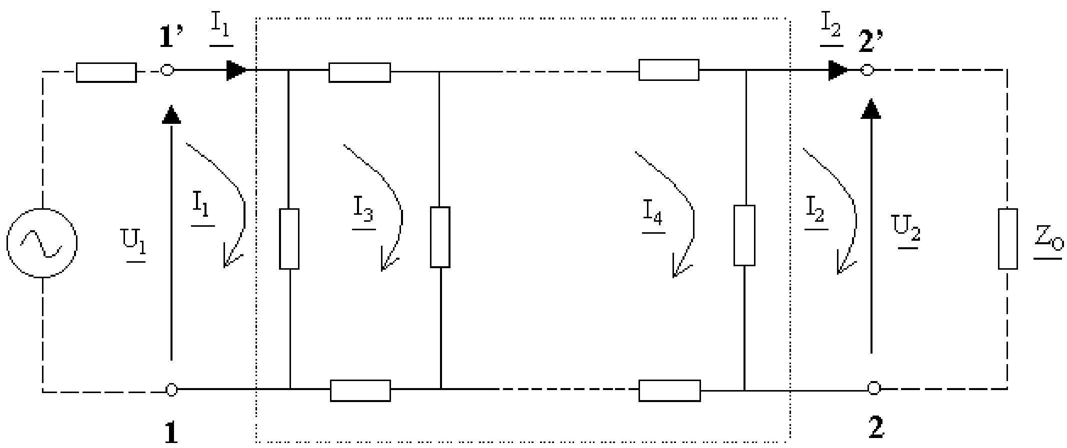
RÓWNANIE ADMITANCYJNE I IMPEDANCYJNE CZWÓRNIKA

Na rysunku przedstawiony jest obwód liniowy z wydzielonymi gałęziami 1' 1 i 2' 2. Przyjęto taką numerację oczek niezależnych, że prąd płynący w pierwszym jest prądem wejściowym, a prąd płynący w drugim prądem wyjściowym. Nie występują zmiany komutacyjne (załączenia, przełączenia, odłączenia i zwarcia) oraz elementy pasywne czwórnika są stałe w czasie (stacjonarność).



Układ równań oczkowych Maxwella ma następującą postać:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ -U_2 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Metodą wyznaczników można obliczyć prądy I_1 , I_2

$$I_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} U_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} U_2$$

$$I_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} U_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} U_2$$

Należy zauważyć, że w symetrii wyznacznika głównego Δ względem głównej przekątnej wynika równość $\Delta_{21} = \Delta_{12}$ (zasada wzajemności).

Powyższe równania nazywa się równaniem admitancyjnym czwórnika i jest zapisywane w następującej postaci:

$$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2$$

$$-I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązując te równania względem napięć U_1 i U_2 otrzymuje się równania impedancyjne czwórnika, które wyglądają następująco:

$$U_1 = Z_{11}I_1 - Z_{12}I_2$$

$$U_2 = Z_{21}I_1 - Z_{22}I_2$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1}$	dla $I_2 = 0$	Impedancja mierzona między zaciskami wejściowymi przy rozwartych zaciskach 2', 2.
$Z_{22} = \frac{U_2}{-I_2}$	dla $I_1 = 0$	Impedancja mierzona między zaciskami wejściowymi przy rozwartych zaciskach 1', 1.
$Z_{12} = \frac{U_1}{-I_2}$	dla $I_1 = 0$	Transmitancja napięciowo-prądowa przy rozwartych zaciskach 1', 1.
$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1}$	dla $I_2 = 0$	Transmitancja napięciowo-prądowa przy rozwartych zaciskach 2', 2.

RÓWNANIA ŁAŃCUCHOWE CZWÓRNIKA. PARAMETRY ABCD.

Przekształcając równania:

$$I_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} U_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} U_2$$

$$I_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} U_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} U_2$$

otrzymujemy następującą zależność wielkości wejściowych od wielkości wyjściowych:

$$U_1 = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} U_2 + \frac{\Delta}{\Delta_{12}} I_2$$

$$I_1 = \frac{\Delta_{22}\Delta_{11} - \Delta_{21}\Delta_{12}}{\Delta_{12}\Delta} U_2 + \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} I_2$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

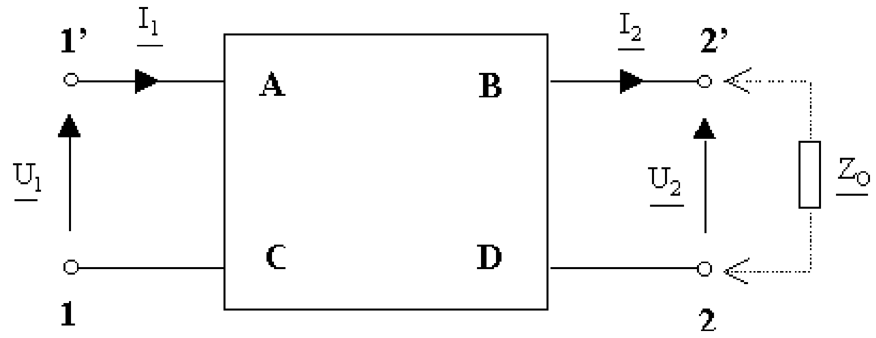
Uwzględniając równość $\Delta_{21} = \Delta_{12}$ otrzymujemy następujący związek dla parametrów łańcuchowych ABCD:

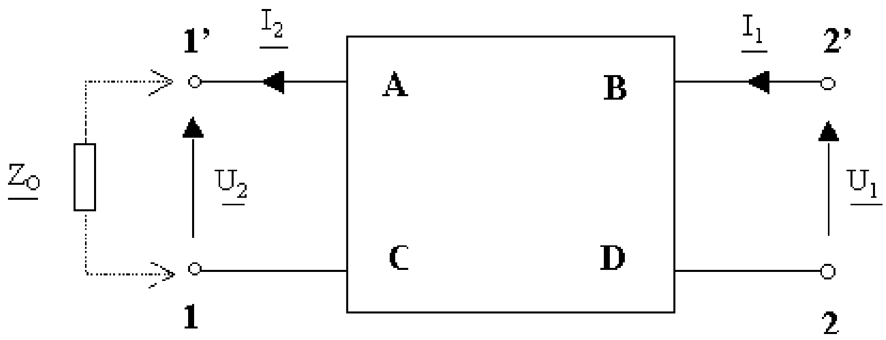
AD - BC = 1

Wynika stąd ważna własność czwórnika liniowego pasywnego: spośród czterech parametrów tylko trzy są niezależne. Dodatkowo spełnienie zależności AD - BC = 1 jest warunkiem odwracalności czwórnika. W przypadku czwórnika symetrycznego zachodzi dodatkowo: A = D.

ZASILANIE CZWÓRNIKA OD STRONY ZACISKÓW WYJŚCIOWYCH.

Rozpatrzmy dwa układy podane na rysunkach:





Dla układu zasilanego od strony zacisków 1', 1 otrzymuje się następujące równania łańcuchowe (**AD - BC = 1**):

$$U_1 = AU_2 + BI_2$$

$$I_1 = CU_2 + DI_2$$

Przenosząc zasilanie do zacisków 2', 2 i podłączając obciążenie do zacisków 1', 1 otrzymuje się po zmianie oznaczeń:

$$U_2 = AU_1 - BI_1 \rightarrow U_1 = DU_2 + BI_2$$

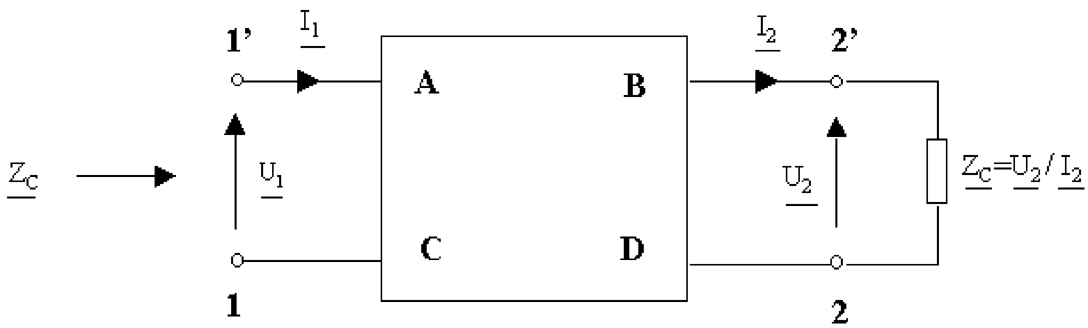
$$-I_2 = CU_2 - DI_1 \rightarrow I_1 = CU_2 + AI_2$$

Oznacza to zmianę w równaniach stałych A i D miejscami. W czwórnikach symetrycznych A = D i równania nie ulegną zmianie. Przy powyższych przekształceniach wykorzystany został warunek odwracalności czwórnika tzn.

AD - BC = 1.

IMPEDANCJA FALOWA I STAŁA PRZENOSZENIA CZWÓRNIKA SYMETRYCZNEGO.

Jeśli impedancja odbiornika załączonego do zacisków wyjściowych czwórnika symetrycznego ma tę własność, że równa impedancji wyjściowej czwórnika, to impedancję taką nazywamy **impedancją falową.**



$$\begin{cases} U_1 = AU_2 + BI_2 \\ I_1 = CU_2 + AI_2 \end{cases}$$

$$Z_C = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_1} = \frac{AU_2 + BI_2}{CU_2 + AI_2} = \frac{AZ_C + B}{CZ_C + A}$$

Impedancja falowa (charakterystyczna) określona jest wzorem:

$$Z_C = \sqrt{\frac{B}{C}} = Z_C \cdot e^{j\varphi}$$

Przy obciążeniu czwórnika symetrycznego impedancją falową stosunek napięć na wejściu i wyjściu jest równy stosunkowi prądów na wejściu i wyjściu.

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = A + \sqrt{BC} = e^{\gamma}$$

Stałą przenoszenia określa się równaniem:

$$e^{\gamma} = A + \sqrt{BC}; \gamma = \alpha + j\beta$$

α - współczynnik tłumienia amplitud przebiegów sinusoidalnych napięć lub prądów przy przejściu ich przez czwórnik.

β - zmiana kąta przesunięcia fazowego tych przebiegów.

W stanie dopasowania falowego moce czynne doprowadzane do wejścia czwórnika i pobrane z wyjścia wynoszą:

$P_1 = |U_1|\,|I_1| \cos \varphi$ $\qquad$ $P_2 = |U_2|\,|I_2| \cos \varphi$ $\qquad$ $\underline{Z_c} = Z_c\, e^{i\varphi}$

Stosunek mocy wynosi:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{|U_1||I_1|}{|U_2||I_2|} = e^{\alpha}\, e^{\alpha} = e^{2\alpha}$$

Jeśli w czwórniku występują straty energii, współczynnik tłumienia jest dodatni.

Impedancja wejściowa czwórnika wynosi dla różnych impedancji obciążenia:

$$Z_{we} = \frac{AZ_2 + B}{CZ_2 + A}, \quad U_2 = Z_2\, I_2$$

W stanie zwarcia $Z_2 = 0$, a w stanie biegu jałowego $Z_2 = \infty$

$$Z_0 = A/C\, ;\ Z_Z = B/A$$

Otrzymuje się następujące zależności:

$$Z_c = \sqrt{\frac{B}{C}} = \sqrt{Z_0 Z_Z}$$

$$e^{\gamma} = A + \sqrt{BC} \qquad ch\gamma = A = \sqrt{Z_0 / (Z_0 - Z_Z)}$$

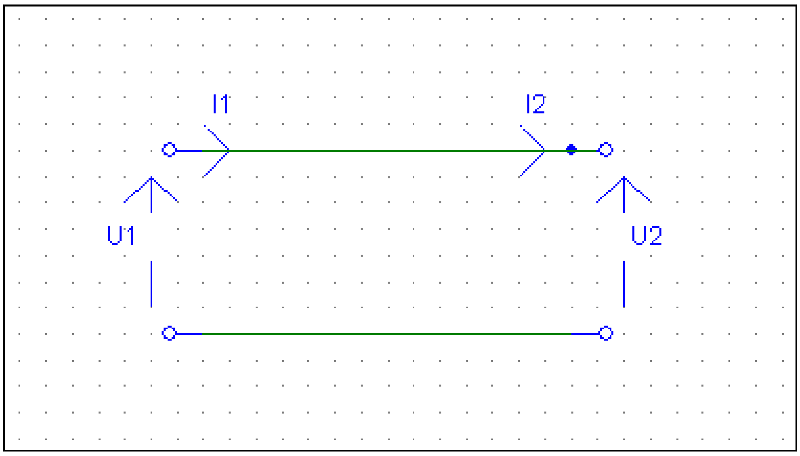
$$e^{-\gamma} = A - \sqrt{BC} \qquad sh\gamma = \sqrt{BC} = \frac{B}{Z_C} = CZ_C$$

Stąd a równania łańcuchowe czwórnika w postaci hiperbolicznej :

$$U_1 = ch\gamma\, U_2 + Z_C\, sh\gamma\, I_2$$

$$I_1 = \frac{sh\gamma}{Z_C} U_2 + ch\gamma\, I_2$$

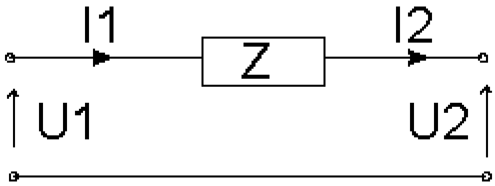
CZWÓRNIKI ELEMENTARNE



Równania łańcuchowe i macierz łańcuchowa takiego czwórnika:

CZWÓRNIKI JEDNOELEMENTOWE ORAZ TRANSFORMATOR IDEALNY

Czwórnik jednoelementowy z impedancją włączoną szeregowo :



$U_1 = U_2 + ZI_2$

$I_1 = I_2$

macierz łańcuchowa takiego czwórnika :

$$A' := \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jeśli Z=0 otrzymujemy dla połączenia nieskrzyżowanego dwóch przewodów macierz łańcuchową :

$$A' := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zaś dla połączenia skrzyżowanego dwóch przewodów :

$$A' := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

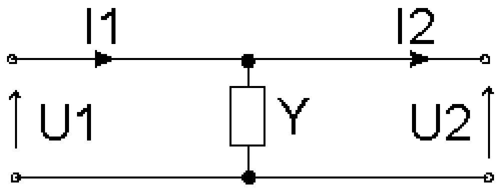
Czwórnik jednoelementowy z impedancją (admitancją) włączoną równolegle :

$U_1 = U_2$

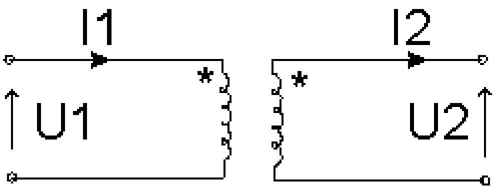
$I_1 = YU_2 + I_2$

macierz łańcuchowa :

$$A' := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$$



Transformator idealny :



macierz łańcuchowa :

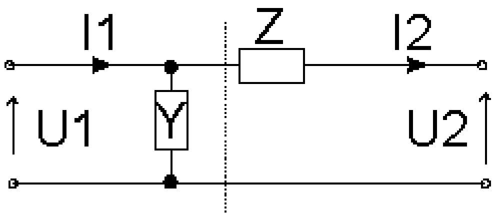
$$A' := \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

CZWÓRNIKI TYPU : Γ , ˥ , T oraz Π .

Czwórnik typu Γ :

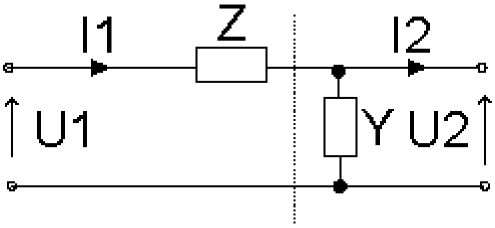
macierz łańcuchowa :

$$A' := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$A' := \begin{bmatrix} 1 & Z \\ Y & 1 + Z \cdot Y \end{bmatrix}$$

Czwórnik typu Γ:



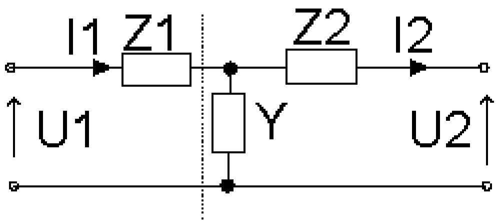
macierz łańcuchowa :

$$A' := \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' := \begin{bmatrix} 1 + Z \cdot Y & Z \\ Y & 1 \end{bmatrix}$$

Czwórnik typu T :

macierz łańcuchowa :

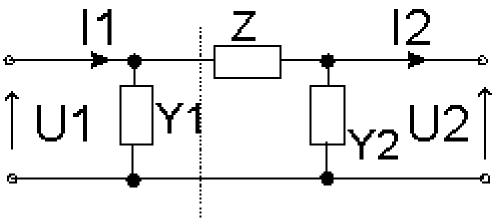


$$A' := \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z_2 \\ Y & 1 + Z_2 \cdot Y \end{bmatrix}$$

$$A' := \begin{bmatrix} 1 + Y \cdot Z_1 & Z_1 + Z_2 + Z_1 \cdot Z_2 \cdot Y \\ Y & 1 + Z_2 \cdot Y \end{bmatrix}$$

$Y = C$; $Z_1 = (A-1)/C$; $Z_2 = (D-1)/C$

Czwórnik typu Π



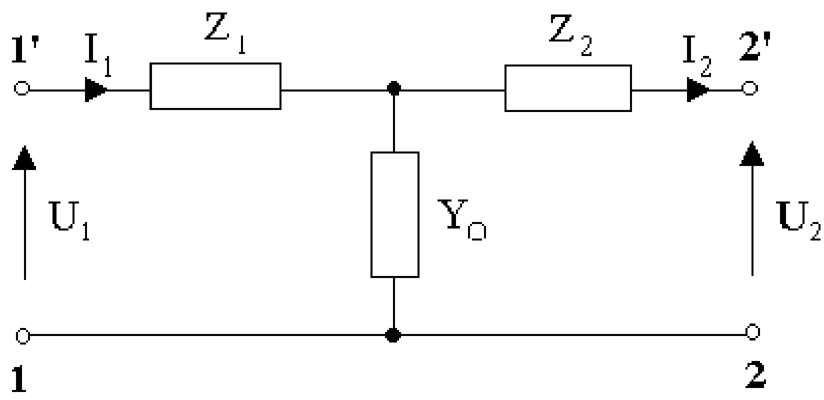
macierz łańcuchowa :

$$A' := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + Z \cdot Y_2 & Z \\ Y_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' := \begin{bmatrix} 1 + Z \cdot Y_2 & Z \\ Y_1 + Y_2 + Y_1 \cdot Y_2 \cdot Z & 1 + Z \cdot Y_1 \end{bmatrix}$$

$Z = B$; $Y_1 = (D-1)/B$; $Y_2 = (A-1)/B$

CZWÓRNIKI TYPU T i Π .



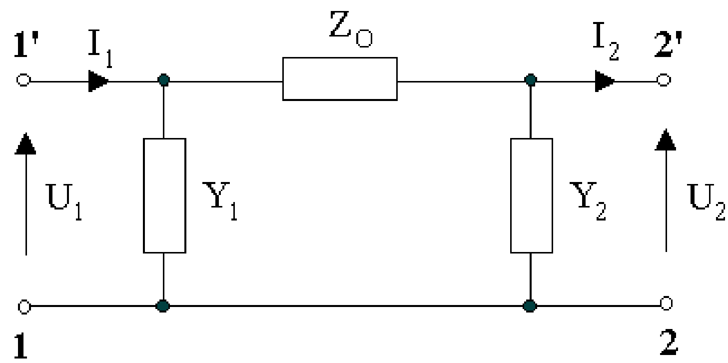
Dla podanego na rysunku czwórnika typu T otrzymuje się:

$$I_1 = I_2 + Y_0(ZI_2 + U_2) \quad ; \quad U_1 = Z_1 I_1 + Z_2 I_2 + U_2$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Z_1 Y_0 & Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0 \\ Y_0 & 1 + Z_2 Y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Dla czwórnika symetrycznego $Z_1 = Z_2 \rightarrow A = D = 1 + ZY_0$. Dodatkowo wyznacznik macierzy łańcuchowej jest równy jedności.

$$AD - BC = (1 + Z_1 Y_0)(1 + Z_2 Y_0) - Y_0(Z_1 + Z_2 + Z_1 Z_2 Y_0) = 1$$



Dla podanego na rysunku czwórnika typu Π obliczenia przeprowadza się mnożąc macierze połączonych łańcuchowo czwórników elementarnych.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & Z_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Y_2 Z_0 & Z_0 \\ Y_1 + Y_2 + Y_1 Y_2 Z_0 & 1 + Y_1 Z_0 \end{bmatrix}$$

ŁAŃCUCH CZWÓRNIKÓW SYMETRYCZNYCH.

Dla czwórnika symetrycznego można parametry łańcuchowe uzależnić od funkcji hiperbolicznych współczynnika przenoszenia i od impedancji falowej.

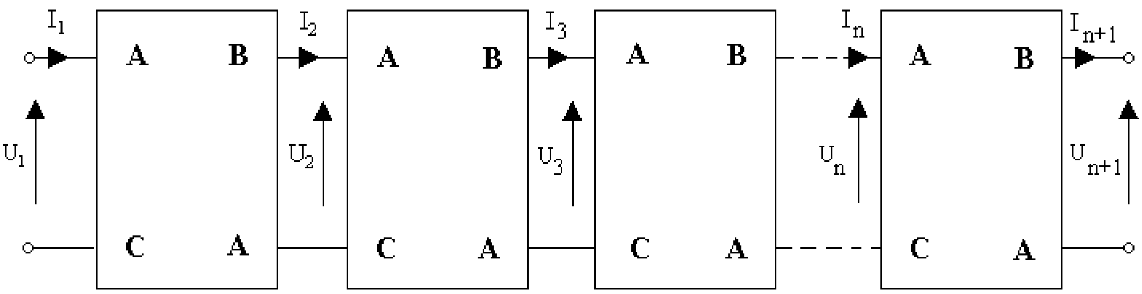
$$e^{\gamma} = A + \sqrt{BC} \qquad \rightarrow \qquad ch\,\gamma = A$$

$$e^{-\gamma} = \frac{1}{A + \sqrt{BC}} = A - \sqrt{BC} \qquad \rightarrow \qquad sh\,\gamma = \sqrt{BC} \quad ; \quad Z_c = \sqrt{\frac{B}{C}}$$

Przekształcając powyższe równania otrzymujemy:

$$A = ch\,\gamma \quad ; \quad B = Z_C \cdot sh\,\gamma \quad ; \quad C = Z_C^{-1} \cdot sh\,\gamma$$

Łańcuchem czwórników nazywamy kaskadowy układ czwórników, w którym zaciski wyjściowe pierwszego czwórnika są połączone z zaciskami wejściowymi drugiego itd. Rozważmy łańcuch złożony z *n* jednakowych czwórników symetrycznych o parametrach łańcuchowych A,B,C, impedancji falowej Z_C i stałej przenoszenia γ.



Można wykazać, że parametry łańcuchowe całego połączenia określone są zależnością:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch\,\gamma & Z_C \cdot sh\,\gamma \\ Z_C^{-1} \cdot sh\,\gamma & ch\,\gamma \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} U_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} chn\,\gamma & Z_C \cdot sc\,\gamma \\ Z_C^{-1} \cdot shn\,\gamma & chn\,\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix}$$

Jeśli na wyjściu ostatniego czwórnika załączymy impedancję falową, to zachodzi:

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U_3}{I_3} = \ldots = \frac{U_n}{I_n} = \frac{U_{n+1}}{I_{n+1}} = Z_C$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{U_2}{U_3} = \frac{U_3}{U_4} = \ldots = \frac{U_n}{U_{n+1}} = e^{\gamma} \rightarrow \frac{U_1}{U_{n+1}} = e^{n\gamma}$$

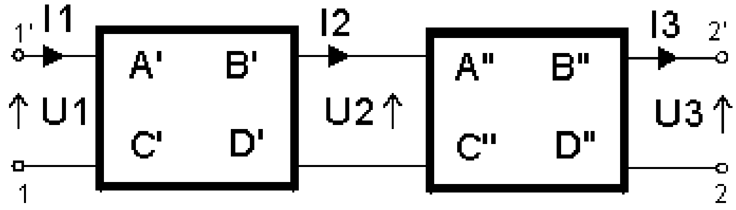
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_3} = \frac{I_3}{I_4} = \ldots = \frac{I_n}{I_{n+1}} = e^{\gamma} \rightarrow \frac{I_1}{I_{n+1}} = e^{n\gamma}$$

Oznacza to, że wypadkowy czwórnik określony jest przez impedancję falową Z_C i stałą przenoszenia równą $n\gamma$ zgodnie z równaniem zapisanym macierzowo powyżej.

METODY ŁĄCZENIA CZWÓRNIKÓW

Metoda kaskadowego łączenia czwórników

(łączenie łańcuchowe) :



czwórnik taki opisujemy łańcuchowo, a jego macierz łańcuchową otrzymujemy przez pomnożenie przez siebie macierzy łańcuchowych poszczególnych czwórników :

jeśli

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

oraz

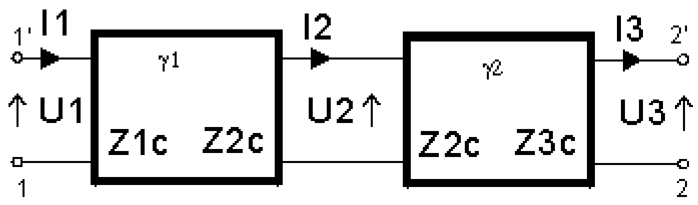
$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

to :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C' & D'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

Kaskadowe łączenie czwórników opisanych parametrami charakterystycznymi

(impedancja falowa, współczynnik przenoszenia) :



równania łańcuchowe z parametrami charakterystycznymi :

$$U_1 := \sqrt{\frac{Z_{1\,c}}{Z_{2\,c}}} \cdot U_2 \cdot e^{\gamma_1}$$

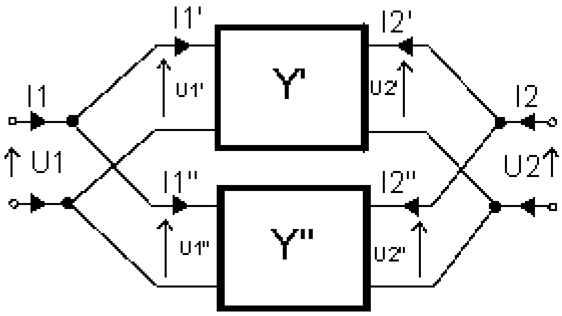
oraz

$$U_2 := \sqrt{\frac{Z_{2\,c}}{Z_{3\,c}}} \cdot U_3 \cdot e^{\gamma_2}$$

to otrzymujemy :

$$U_1 := \sqrt{\frac{Z_{1\,c}}{Z_{3\,c}}} \cdot U_3 \cdot e^{\gamma_1 + \gamma_2}$$

Równoległe łączenie czwórników



$$U_1 = U_1' = U_1'' \; ; \; U_2 = U_2' = U_2''$$

$$I_1 = I_1' + I_1'' \; ; \; I_2 = I_2' + I_2''$$

Czwórnik opisujemy za pomocą macierzy admitancyjnych :

$$\begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Y_{11}' & Y_{12}' \\ Y_{21}' & Y_{22}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

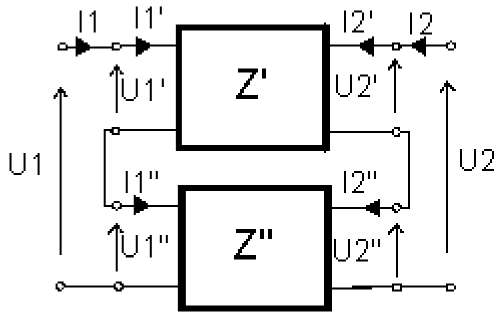
oraz

$$\begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Y_{11}'' & Y_{12}'' \\ Y_{21}'' & Y_{22}'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

to otrzymujemy :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Y_{11}' + Y_{11}'' & Y_{12}' + Y_{12}'' \\ Y_{21}' + Y_{21}'' & Y_{22}' + Y_{22}'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Łączenie czwórników szeregowe



$$I_1 = I_1' = I_1'' \; ; \; I_2 = I_2' = I_2''$$

$$U_1 = U_1' + U_1'' \; ; \; U_2 = U_2' + U_2''$$

Czwórnik opisujemy za pomocą macierzy impedancyjnych :

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Z_{11}' & Z_{12}' \\ Z_{21}' & Z_{22}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

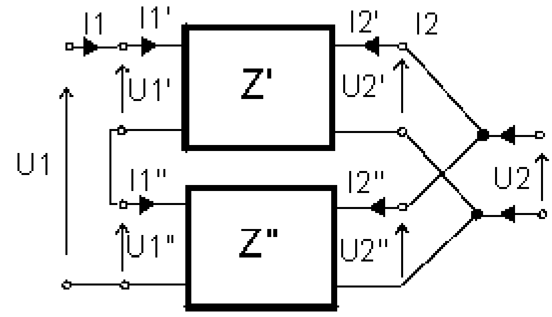
oraz

$$\begin{bmatrix} U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Z_{11}'' & Z_{12}'' \\ Z_{21}'' & Z_{22}'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

to otrzymujemy :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} Z_{11}' + Z_{11}'' & Z_{12}' + Z_{12}'' \\ Z_{21}' + Z_{21}'' & Z_{22}' + Z_{22}'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Łączenie czwórników szeregowo - równoległe



$U_1 = U_1' + U_1''$; $U_2 = U_2' = U_2''$

$I_1 = I_1' = I_1''$; $I_2 = I_2' + I_2''$

Czwórnik opisujemy za pomocą macierzy hybrydowych :

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ I_2' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} h_{11}' & h_{12}' \\ h_{21}' & h_{22}' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} U_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} h_{11}'' & h_{12}'' \\ h_{21}'' & h_{22}'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

to otrzymujemy :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} h_{11}' + h_{11}'' & h_{12}' + h_{12}'' \\ h_{21}' + h_{21}'' & h_{22}' + h_{22}'' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

INWERTERY IMPEDANCYJNE

Zależności ogólne

Idealny inwerter impedancyjny jest czwórnikiem aktywnym, w którym po dołączeniu do jednej pary zacisków impedancji Z_0 impedancja widziana z drugiej strony zacisków jest odwrotna do Z_0 dla wszystkich pulsacji. Zachodzi więc równość:

$$Z_{we} = (AZ_0(s) + B)/(CZ_0(s) + D) = K_i(s)/Z_0(s)$$

aby powyższe równanie było prawdziwe musi być spełniony warunek :

$$A = D = 0$$

Współczynnik inwersji jest funkcją wymierną rzeczywistą określoną zależnością :

$$K_i(s) = B(s)/C(s)$$

Jeśli w inwerterze zamienimy wejście z wyjściem, to zachodzi :

$$Z_{we}' = (DZ_0(s) + B)/(CZ_0(s) + A) = B/CZ_0(s) = K_i(s)/Z_0(s) = Z_{we}$$

zatem idealny inwerter odwraca impedancję w obydwu kierunkach z tym samym współczynnikiem inwersji .

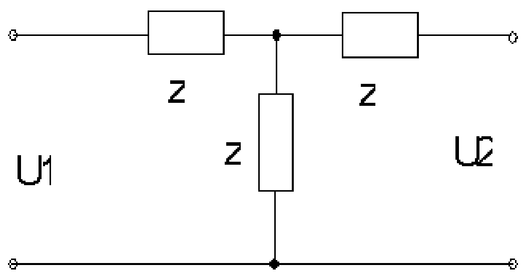
Inwerter ujemnoimpedancyjny

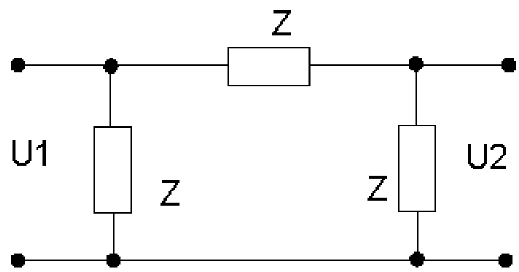
(Negative Impedance inVerter -NIV)

Jest to taki inwerter , w którym współczynnik inwersji jest liczbą ujemną . Zatem impedancja wejściowa takiego inwertera :

Z_{we} = - $K_i(s)/Z_0(s)$; gdzie $K_i > 0$;

Element NIV może być zrealizowany za pomocą dodatnich i ujemnych impedancji połączonych w czwórniki kształtu T lub Π :





Macierz łańcuchowa przyjmuje postać :

$$A := \begin{bmatrix} 0 & Z \\ Y & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie: Y = 1/Z

Zatem impedancja wejściowa wyraża się wzorem :

$$Z_{we} = - Z^2/Z_0 = - 1/Y^2\ Z_0$$

Element NIV można także zrealizować przez łańcuchowe połączenie idealnego żyratora i elementu NIC odpowiedniego typu .

Inwerter impedancji dodatniej

(Positive Impedance inVerter - PIV)

Jest to taki inwerter, w którym współczynnik inwersji jest liczbą dodatnią.

Jeśli we wzorze na współczynnik inwersji $K_i(s) = B(s)/C(s)$ przyjmiemy, że:

$$B = R \quad \text{oraz} \quad C = 1/R = G$$

to otrzymujemy <u>żyrator idealny</u>, którego współczynnik inwersji wynosi:

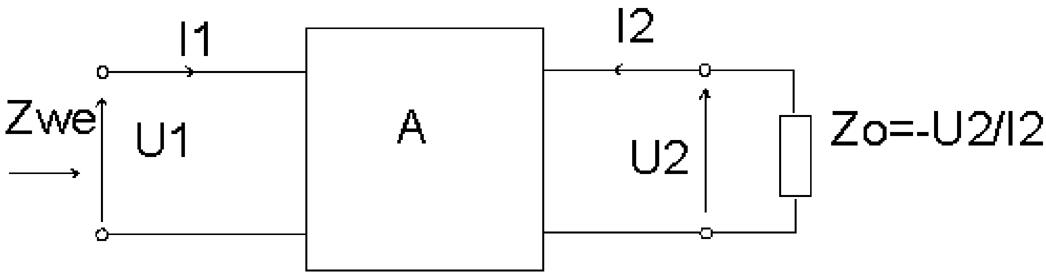
$$K_i = B/C = R^2 = 1/G^2$$

Gdzie: R - rezystancja żyracji ; G - konduktancja żyracji

KONWERTERY IMPEDANCYJNE

Idealny konwerter impedancyjny to taki `czwórnik , który przekształca impedancję $Z_0(s)$ dołączoną do wyjścia w inną impedancję proporcjonalną do $Z_0(s)$ dla wszystkich pulsacji ; tzn. impedancja wejściowa takiego czwórnika jest proporcjonalna do impedancji obciążenia .

Dla czwórnika o kierunkach prądów określonych jak na rysunku równania łańcuchowe mają postać :



$$U_1 = AU_2 - BI_2$$

$$I_1 = CU_2 - DI_2$$

Stąd:

$$Z_{we} = U_1/I_1 = (AU_2 - BI_2)/(CU_2 - DI_2) = (A(-Z_0(s)I_2) - BI_2)/(C(-Z_0(s)I_2) - DI_2) = (AZ_0(s) + B)/(CZ_0(s) + D)$$

Dla idealnego konwertera impedancji :

$Z_{we} = K(s)Z_0(s)$; gdzie $K(s)$ jest współczynnikiem konwersji

Z tych wzorów wynika, że dla idealnego konwertera impedancji :

$$B = C = 0$$

zaś współczynnik konwersji wynosi :

$$K(s) = A/D$$

Jeśli w konwerterze impedancji zamienimy miejscami wejście i wyjście to impedancja wejściowa wynosi:

$$Z_{we} = (DZ_0(s) + B)/(CZ_0(s)+A) = (D/A)Z_0(s) = Z_0(s)/K(s)$$

W analizie układów aktywnych często korzysta się z postaci hybrydowej .Wychodząc z równań konwertera w postaci łańcuchowej :

$U_1 = AU_2$;

$I_1 = DI_2$

dostajemy : $U_1 = AU_2$;

$I_2 = - I_1/D$

stąd w postaci macierzowej : $$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & h_{12} \\ h_{21} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$h_{12} = A$; $h_{21} = -1/D$

skąd współczynnik konwersji $K(s) = - h_{12}h_{21}$

Uogólniony konwerter impedancji

(Generalized Impedance Converter)

Współczynnik konwersji definiowany jest zależnością :

$$K(s) = - Z_\alpha(s)/Z_\beta(s)$$

gdzie: $Z_\alpha(s)$, $Z_\beta(s)$ - impedancje operatorowe

Wyróżnia się dwie klasy GIC :

1. GIC z inwersją napięcia , tzw. VGIC , opisany układem równań :

$$U_1 = - (Z_\alpha(s)/Z_\beta(s))\ U_2$$

$$I_2 = - I_1$$

2. GIC z inwersją prądów , tzw. CGIC , opisany układem równań :

$$U_1 = U_2$$

$$I_2 = (Z_\alpha(s)/Z_\beta(s))\ I_1$$

Konwerter ujemnoimpedancyjny

(Negative Impedance Converter) .

Jest to szczególny przypadek GIC w którym współczynnik konwersji jest ujemny, tzn :

$Z_{we} = - K\ Z_0$; gdzie $K\ Z_0 > 0$

Dla NIC z inwersją prądów stosujemy oznaczenie CNIC i opisujemy łańcuchowym układem równań:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

lub hybrydowym :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

NIC z inwersją napięcia oznaczamy przez VNIC i opisujemy łańcuchowym układem równań:

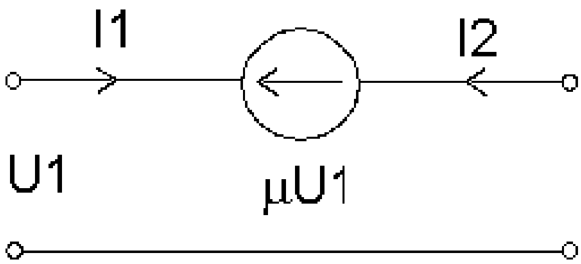
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

lub hybrydowym :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & -K \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Realizację NIC najwygodniej jest przeprowadzić na bazie źródeł sterowanych .

VNIC można zrealizować wykorzystując źródło napięcia sterowane napięciem wejściowym (VVT) :



Dla tego przypadku zachodzą równania :

$$I_1 + I_2 = 0$$

$$U_2\,(1\text{-}\mu) - U_2 = 0$$

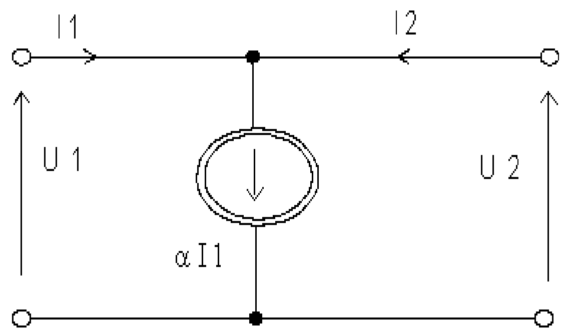
Układ ten można zapisać w postaci łańcuchowej :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_2 \\ -\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

gdzie: $K = 1/(\mu-1)$

Warunek realizowalności VNIC $K > 0$ oznacza $\mu > 1$

CNIC można zrealizować na bazie źródła prądu sterowanego prądem wejściowym :



Dla tego przypadku zachodzą równania :

$$U_1 = U_2$$

$$I_1 + I_2 - \alpha I_1 = 0$$

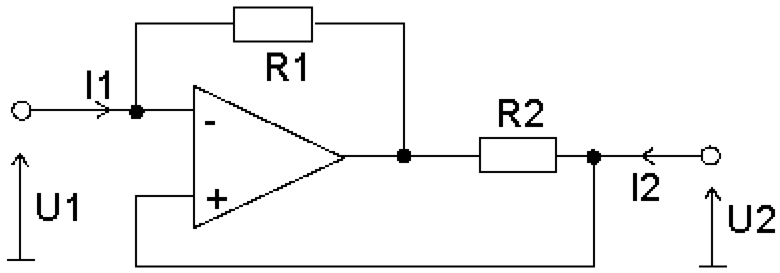
lub postaci łańcuchowej :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{-1}{K} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

gdzie: $K = \alpha - 1$

Warunek realizowalności : $\alpha > 1$

Praktyczna realizacja elementu CNIC ze wzmacniaczem operacyjnym:



Dla idealnych własności wzmacniacza zachodzą równości :

$U_1 = U^- = U^+ = U_2$; $i^- = i^+ = 0$

Dokonujemy bilansu napięć :

$U_1 = -I_1R_1 + I_2R_2 - U_2 = 0$

Stąd :

$I_1 = I_2(R_2/R_1)$

oraz :

$U_1 = U_2$

W postaci łańcuchowej :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{-R_2}{R_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Zatem współczynnik konwersji wynosi :

$K = R_1/R_2$

Konwerter dodatnioimpedancyjny

(Positive Impedance Converter)

Jest to taki przypadek GIC w którym współczynnik konwersji jest dodatni .

Równania opisujące PIC :

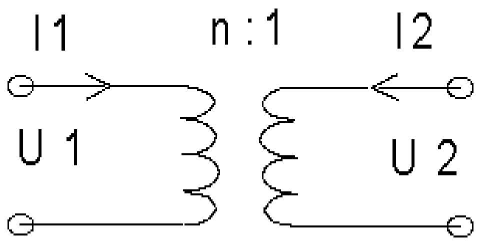
$$U_1 = k_1 U_2$$

$$I_1 = -\,(1/k_2)\, I_2$$

gdzie : $k_1 k_2 > 0$

Współczynnik konwersji wynosi $K = k_1 k_2 > 0$

W szczególnym przypadku gdy $k_1 = k_2 = n$; PIC jest transformatorem idealnym o przekładni n :



Układ równań dla tego konwertera :

$$U_1 = n\, U_2$$

$$I_1 = -(1/n)\, I_2$$

Współczynnik konwersji wynosi :

$$K = n^2$$

ŻYRATOR

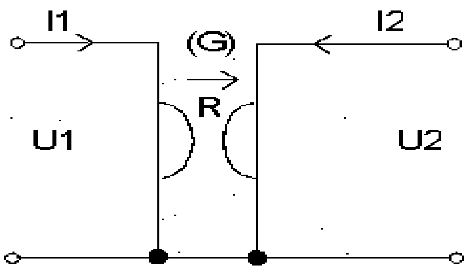
Własności żyratora idealnego

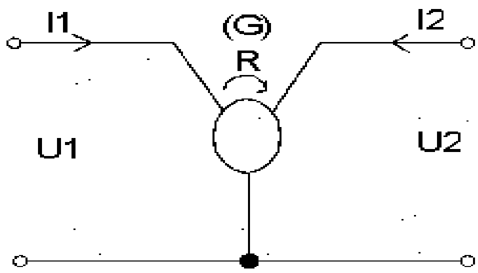
Żyratorem jest element PIV , którego współczynnik inwersji wynosi :

$K_i = B/C = R^2 = 1/G^2$

gdzie R - rezystancja żyracji , G - konduktancja żyracji

Oznaczenia żyratora:





Opis żyratora idealnego przy pomocy macierzy:

łańcuchowej $A := \begin{bmatrix} 0 & R \\ G & 0 \end{bmatrix}$

admitancyjnej : $Y := \begin{bmatrix} 0 & G \\ -G & 0 \end{bmatrix}$

impedancyjnej : $Z := \begin{bmatrix} 0 & -R \\ R & 0 \end{bmatrix}$

Własności żyratora :

$U_1 = -RI_2 ; \quad U_2 = RI_1$

$I_1 = GU_2 ; \quad I_2 = -GU_1$

$U_1I_1 + U_2I_2 = 0$

co oznacza , że żyrator przekształca idealne źródła prądu na źródła napięcia i odwrotnie oraz, że żyrator jest elementem bezstratnym .

Przykłady zastosowań żyratora

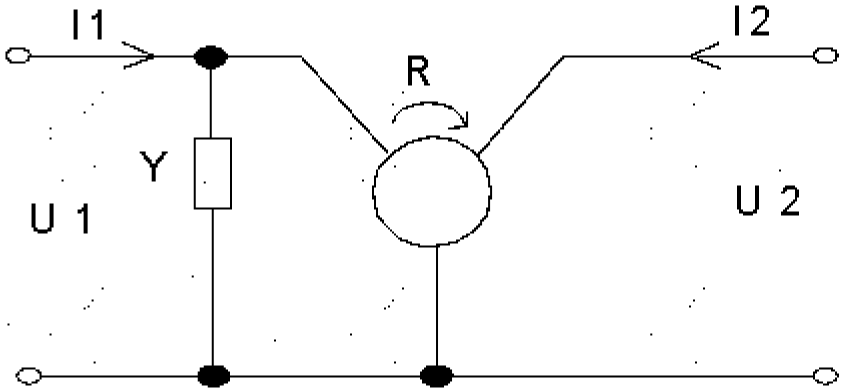
impedancja wejściowa : $Z_{we}(s) = R^2/Z_0(s)$

przyjmując $Z_0(s) = 1/sC$ otrzymujemy : $Z_{we}(s) = sCR^2 = sL$; gdzie $L = CR^2$

Zatem żyrator obciążony pojemnością C można traktować od strony zacisków wejściowych jako indukcyjność o wartości

$L = CR^2$, przy czym jeden koniec indukcyjności jest uziemiony.

Dla układu przedstawionego niżej obowiązuje układ równań:

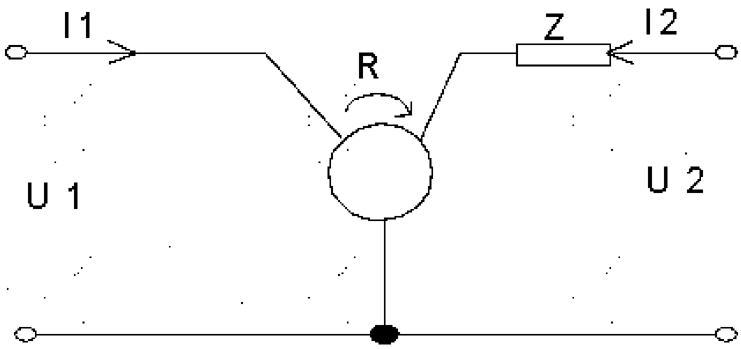


$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 - YU_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & R \\ G & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

czyli :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & R \\ G & YR \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Natomiast dla układu :



układ równań wygląda następująco :

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & R \\ G & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 - I_2 Z \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

czyli : $$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & R \\ G & GZ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

Porównując te równania ze sobą można stwierdzić, że:

$$Y = Z/R^2 = ZG^2$$

Wynika stąd, że szeregowo dołączona indukcyjność L na wyjściu żyratora można zamienić na równolegle dołączoną pojemność C na wejściu żyratora: $C = LG^2$.

Łańcuchowe połączenie dwóch żyratorów pozwala zrealizować idealny transformator:

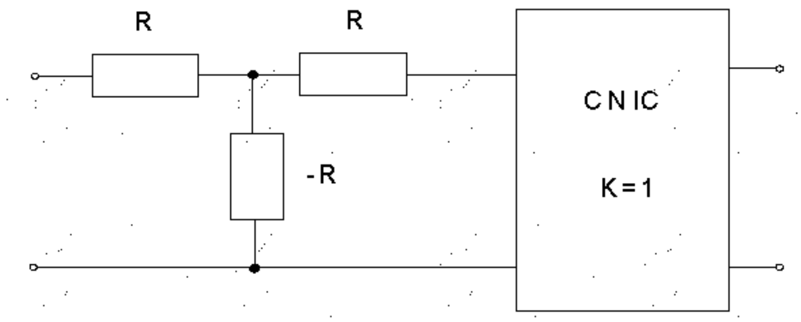
$$\begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ G_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & R_2 \\ G_2 & 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} R_1 G_2 & 0 \\ 0 & R_2 G_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

gdzie: $n = R_1/R_2$ jest przekładnią transformatora .

Realizacja żyratora

Istnieją dwa podstawowe sposoby realizacji żyratora.

Pierwszy z nich bazuje na łańcuchowym połączeniu NIV i CNIC . Dla z elementu NIV w kształcie T oraz elementu CNIC o współczynniku K=1 macierz łańcuchowa układu wynosi :

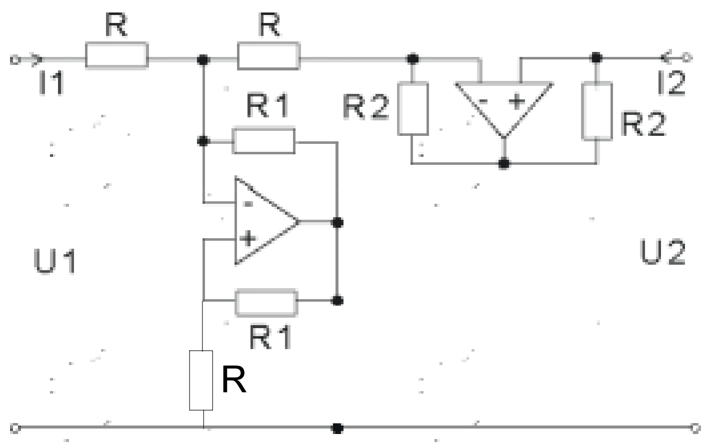


$$A = A_{NIV}A_{CNIC} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ -G & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & -R \\ -G & 0 \end{bmatrix}$$

Zatem układ ten przedstawia żyrator o współczynniku inwersji:

$$K_i = B/C = -R/-G = R^2$$

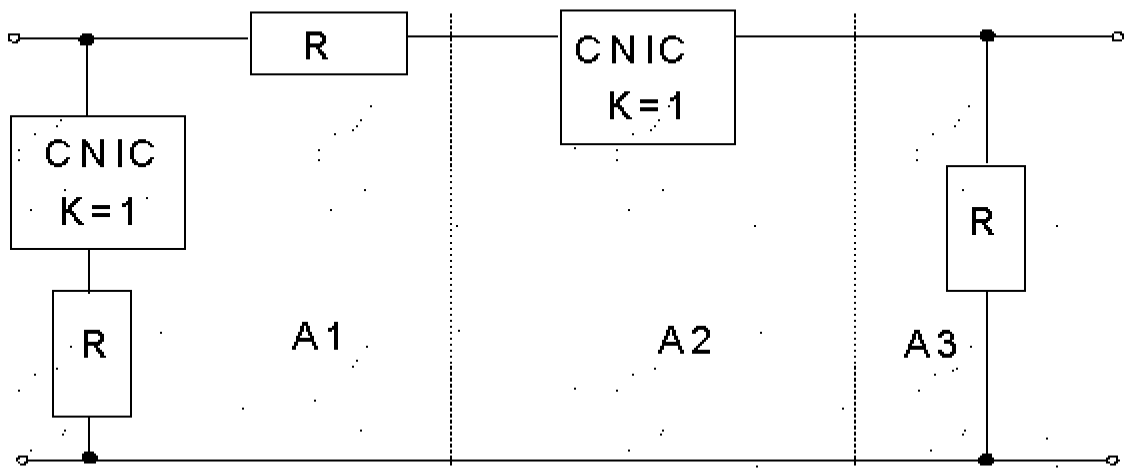
Przykładowy układ praktyczny żyratora otrzymanego przez połączenie elementu CNIC i NIV w kształcie T:



Układ ten zawiera dwa elementy CNIC oraz element NIV w kształcie T. W gałęzi pionowej element CNIC służy do uzyskania ujemnej rezystancji:

$$Z_{we} = K_i z_0 = -R$$

Ze względu na stabilność lepsze własności ma układ wykorzystujący element NIV w kształcie Π :

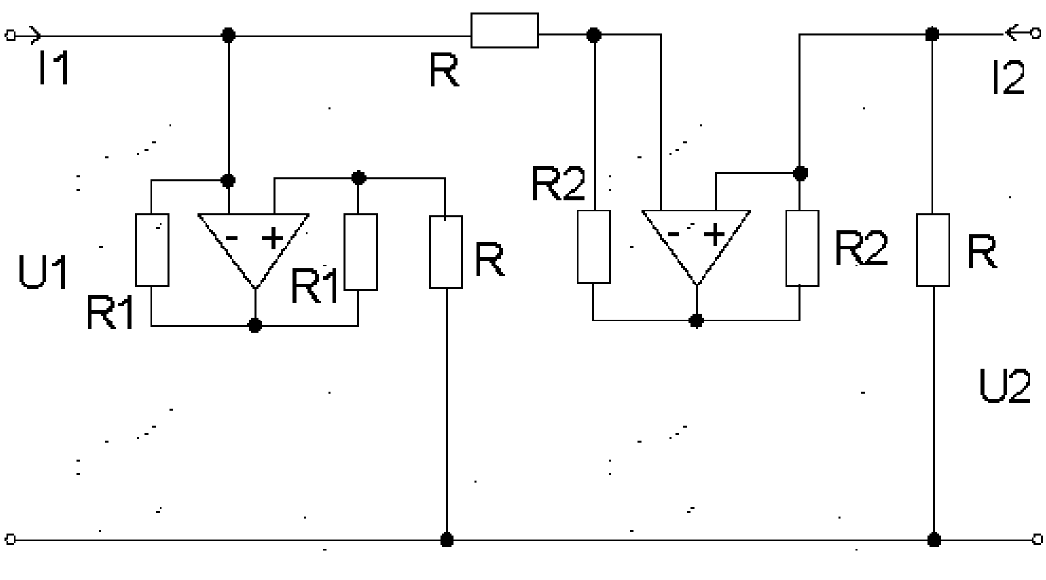


Element CNIC , występujący w gałęzi poziomej , pełni podwójną funkcję :

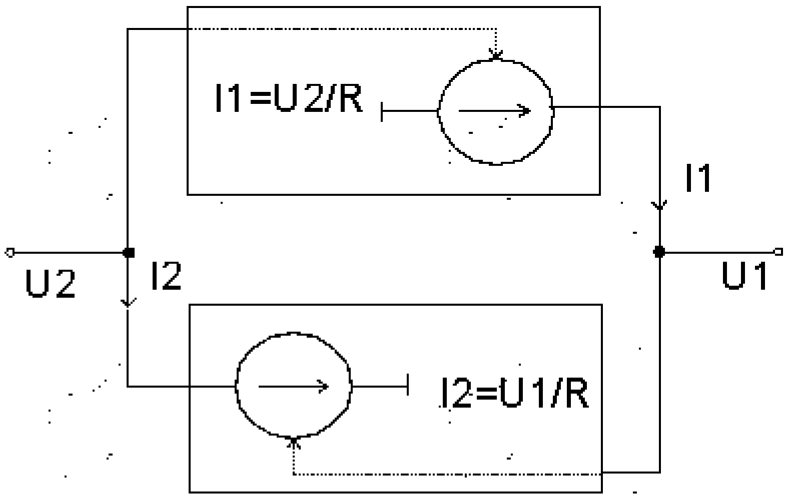
służy do zmiany znaku rezystancji w gałęzi pionowej oraz występuje w połączeniu łańcuchowym NIV i CNIC . Macierz łańcuchowa całego układu otrzymujemy mnożąc kolejno macierze czwórników A1 , A2 , A3 :

$$A=A1\ A2\ A3=\begin{bmatrix}1 & R\\ -G & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ G & 1\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}1 & R\\ -G & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ -G & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -R\\ -G & 0\end{bmatrix}$$

Przykładowy układ praktyczny żyratora otrzymanego przez połączenie elementu CNIC i NIV w kształcie Π :

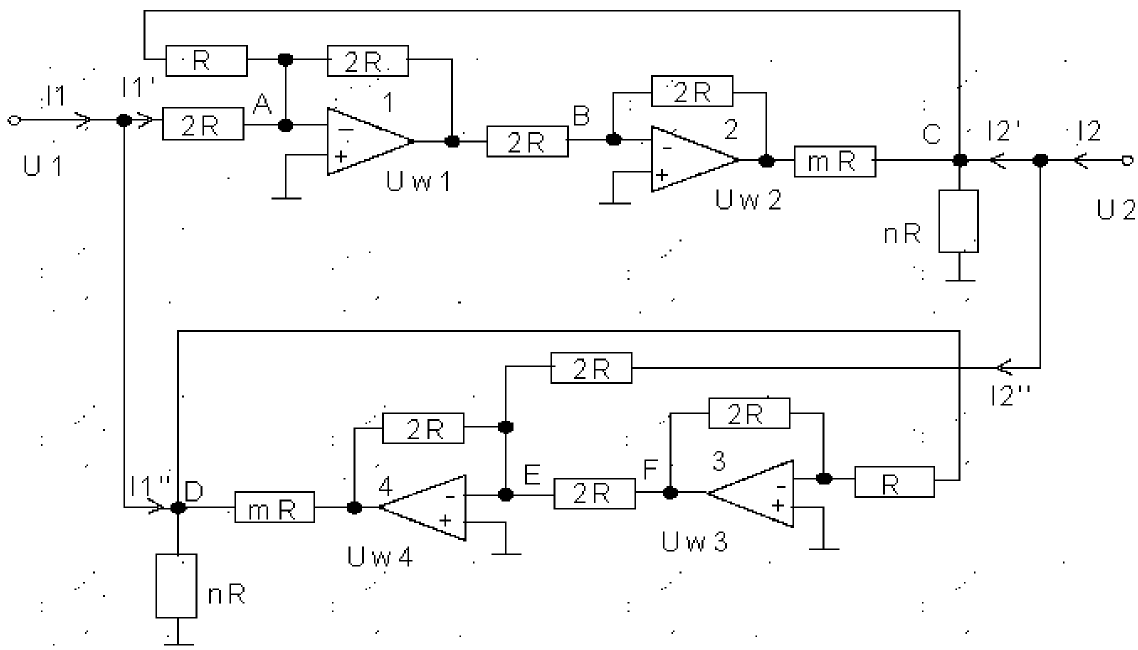


Drugi sposób realizacji żyratora bazuje na wykorzystaniu wzmacniaczy operacyjnych jako źródeł sterowanych o nieskończenie wysokim wzmocnieniu.



Praktyczna realizacja zostanie rozpatrzona na poniższym przykładzie.

Wyznaczyć warunki, jakie musi spełnić układ przedstawiony poniżej, aby stanowił on realizację żyratora.



Układ ten wygodnie jest rozpatrzyć jako połączenie równoległe dwóch czwórników

Z I prawa Kirchhoffa dla węzła A : $U_1/2R + U_2/R + U_{W1}/2R = 0$

Stąd $U_{W1} = -(U_1 + 2U_2)$

Dla węzła B : $U_{W1}/2R + U_{W2}/2R = 0$

Stąd: $U_{W2} = -U_{W1} = U_1 + 2U_2$

Z prawa Ohma: $I_1' = U_1/2R$

Bilans prądów dla węzła C :

$I_2' = U_2/nR + (U_2 - U_{W2})/mR + U_2/R = (U_2 + nU_2)/n_R + (U_2 - U_1 - 2U_2)/mR = -U_1/mR + (mn + m - n)U_2/mnR$

Zależności te zapisane w postaci równań admitancyjnych:

$$\begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\,R} & 0 \\ \dfrac{-1}{mR} & \dfrac{mn + m - n}{mnR} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Wzmacniacz operacyjny 4 dokonuje inwersji sygnału U_1 w postaci: $U_{W3} = - 2U_1$

Z bilansu prądów dla oczka E : $U_{W4} = 2U_1 - U_2$

I prawo Kirchhoffa dla węzła D przyjmuje postać:

$$I_1'' = U_1/nR + (U_1 - U_{W4})/mR + U_1/R = (U_1 + nU_1)/nR + (U_1 - 2U_1 + U_2)/mR =$$

$$= (mn + m - n)U_1/mnR + U_2/mR$$

Z prawa Ohma otrzymujemy: $I_2'' = U_2/2R$

Zapisując powyższe zależności w postaci równań admitancyjnych:

$$\begin{bmatrix} I''_1 \\ I''_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \dfrac{mn + m - n}{mnR} & \dfrac{1}{mR} \\ 0 & \dfrac{1}{2\ R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Ponieważ czwórniki są połączone równolegle, zatem macierz Y całego układu jest sumą macierzy składowych czwórników:

$$Y = Y' + Y'' = \begin{bmatrix} \dfrac{3\ mn + 2\ m - 2\ n}{2\ mnR} & \dfrac{1}{mR} \\ \dfrac{-1}{mR} & \dfrac{3\ mn + 2\ m - 2\ n}{2\ mnR} \end{bmatrix}$$

Aby układ stanowił realizację żyratora musi być spełniony warunek:

$$(3mn + 2m - 2n)/mnR = 0$$

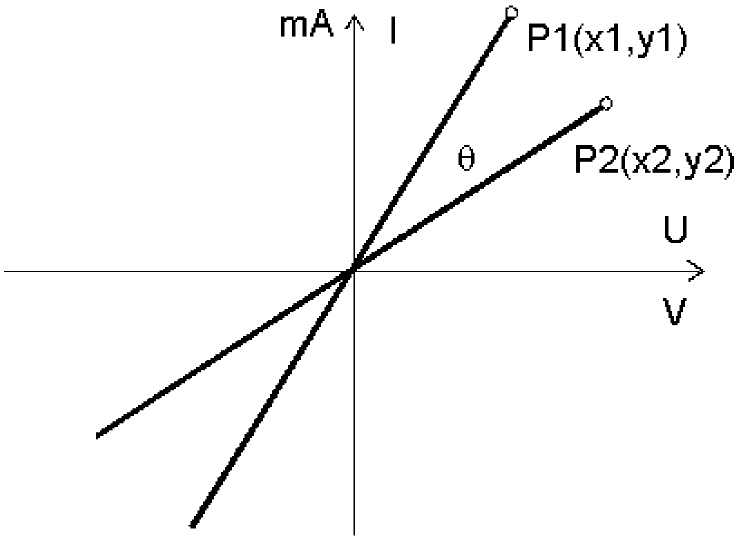
wówczas układ ten staje się żyratorem o wartości konduktancji $G = 1/mR$

np. $m = 0.5$ oraz $n=2$

ROTATOR

Jeśli zachodzi potrzeba obrócenia charakterystyki lub pola charakterystyk układu o określony kąt, funkcje tą może spełnić rotator.

Kąt obrotu θ tylko wtedy będzie określony jednoznacznie, kiedy znane są skale na osiach współrzędnych.



$$x = aU\ ,\ [a] = [cm/V]$$

$$y = bI\ ,\ [b] = [cm/A]$$

Wielkość b/a ma wymiar rezystancji i jest nazywana współczynnikiem skali R_S .

Rozpatrując obrót krzywej widać, że punkt P1 o współrzędnych (x1,y1) przechodzi w punkt P2 o współrzędnych (x2,y2) . Zależności między starymi i nowymi współrzędnymi zgodnie z zasadami geometrii:

$$x_2 = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta \qquad y_2 = -x_1\sin\theta + y_1\cos\theta$$

uwzględniając skale:

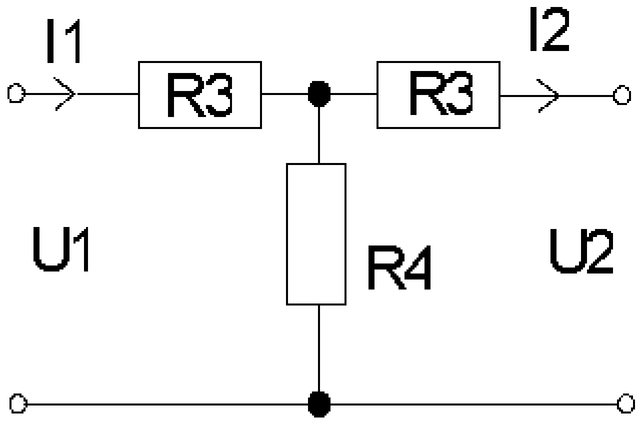
$$aU_2 = aU_1\cos\theta + bI_1\sin\theta \qquad bI_2 = -aU_1\sin\theta + bI_1\cos\theta$$

dzieląc równanie 1 przez *a* oraz drugie przez *b* otrzymujemy :

$$U_2 = U_1\cos\theta + I_1R_S\sin\theta \qquad I_2 = -(U_1/R_S)\sin\theta + I_1\cos\theta$$

Układ, który dla danego współczynnika skali R_S powoduje obrót charakterystyki o kąt θ musi spełniać powyższe równania.

Układ podstawowy rotatora:



Zgodnie z zasadą superpozycji:

$$U_2 = AU_1 + BI_1$$

$$I_2 = CU_1 + DI_1$$

Dla $I_1 = 0$ mamy: $U_1 = R_4/(R_3 + R_4)\ U_2$ ----> $A = 1 + R_3/R_4$

$$I_2 = U_1/R_4 \text{ --> } C = 1/R_4$$

Dla $U_1 = 0$: $I_1 = ((R_3||R_4)U_2)/[(R_3 + (R_3||R_4))R_3]$ ----> $B = R^2{}_3/R_4 + 2R_3$

$$I_2 = I_1 + (I_1R_3)/R_4 \text{ --> } D = 1 + R_3/R_4$$

Równania przenoszenia zapisujemy więc następująco:

$$U_2 = (1 + R_3/R_4)\ U_1 + (R^2{}_3/R_4 + 2R_3)\ I_1$$

$$I_2 = (1/R_4)\ U_1 + (1 + R_3/R_4)\ I_1$$

Przez porównanie z wyprowadzonymi wcześniej równaniami dla współrzędnych otrzymujemy :

$$\cos\theta = 1 + R_3/R_4$$

$$-(\sin\theta / R_S) = 1/R_4$$

$$R_S \sin\theta = R^2{}_3/R_4 + 2R_3$$

następnie otrzymujemy :

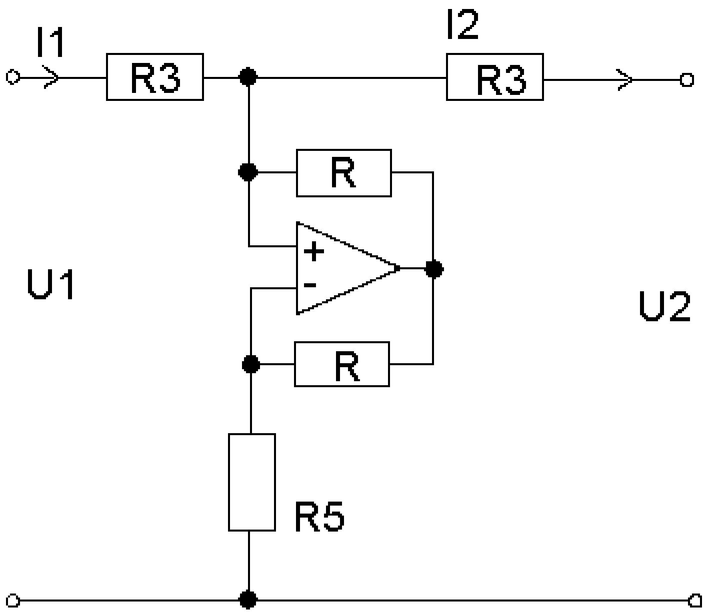
$$R_4 = -R_S/\sin\theta$$

$$R_3 = R_S\,(1 - \cos\theta) / \sin\theta \;=\; R_S\,\mathrm{tg}\,(\theta/2)$$

Po przyjęciu wartości R_S oraz θ można więc obliczyć parametry układu.

Wartość R_S zależy od przyjętych podziałek osi współrzędnych i jest zawsze dodatnia ($R_S = b/a$). Dla kątów $0^o < \theta < 180^o$ rezystancja R_4 przyjmuje wartości ujemne, natomiast dla $\theta > 180^o$ wartości ujemne przyjmuje rezystancja R_3. Rezystancje ujemne otrzymuje się przez zastosowanie elementu NIC.

Przykładowa realizacja praktyczna układu rotatora dla kątów obrotu $0^o < \theta < 180^o$:



parametry układu : $R_3 = R_S\,\mathrm{tg}(\theta/2)$; $R_5 = -R_4 = R_S/\sin\theta$

W celu dokonania obrotu charakterystyki dwójnika dołącza się go do wejścia rotatora i mierzy się parametry zmienne obróconej charakterystyki na dwóch pozostałych końcówkach.