Szeregi Fouriera
(6 rozwiązanych zadań +dodatek)

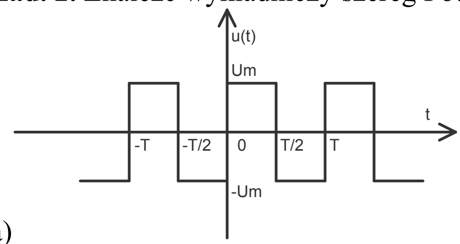
Opracował
Dr Czesław Michalik

Zad. 1. Znaleźć okres następujących sygnałów:

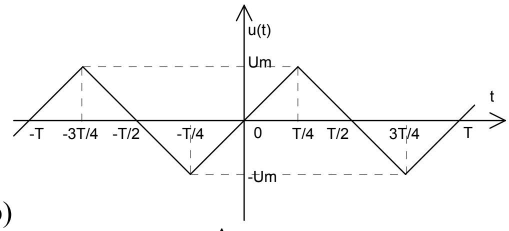
a) $y = 3\cos(2\omega_0 t) + 5\cos(7\omega_0 t) + 4\cos(12.5\omega_0 t)$,

b) $y = 10\cos(\omega_0 t) + 5\cos(1.41\omega_0 t)$.

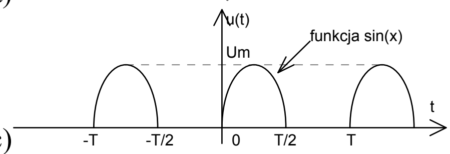
Zad. 2. Znaleźć wykładniczy szereg Fouriera sygnałów pokazanych na rysunku a, b, c, d.



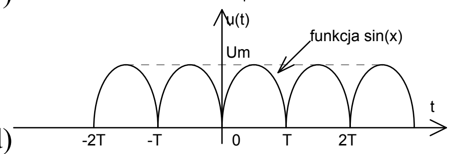
a)



b)



c)



d)

Zad. 3. Zapisać w postaci wykładniczego szeregu Fouriera następujący przebieg okresowy

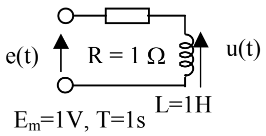
$$f(t) = 4\sin(4t) - 2\cos(3t).$$

Zad. 4. Dany jest następujący wykładniczy szereg Fouriera

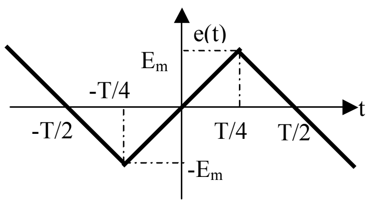
$$f(t) = (1-\mathrm{j})e^{-\mathrm{j}2t} + (2+\mathrm{j})e^{-\mathrm{j}t} - 2 + (2-\mathrm{j})e^{\mathrm{j}t} + (1+\mathrm{j})e^{\mathrm{j}2t}.$$

Wyznaczyć wartość skuteczną tego sygnału.

Zad. 5. Wyznaczyć zależności analityczne pozwalające znaleźć przebieg napięcia ustalonego na induktorze w układzie zastępczym pokazanym na rys. a pobudzanym SEM e(t) o przebiegu trójkątnym (rys. b).

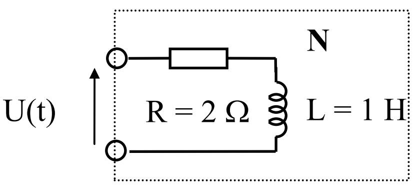


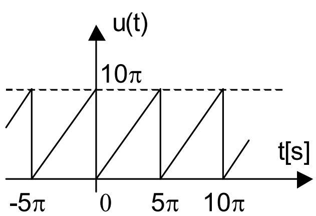
Rys. a



Rys. b

Zad. 6. Oblicz moc czynną wydzieloną w dwójniku N przez 5-tą harmoniczną sygnału u(t) przyłożonego do zacisków tego dwójnika. Sygnał u(t) ma postać podaną na rysunku poniżej.





Rozwiązania zadań

Ad. 1

Załóżmy, że w obwodzie działa n okresowych pobudzeń o okresach kolejno $T_1, T_2, ..., T_n$, przy czym dla każdego $i, j = 1, ..., n$ stosunek T_i/T_j jest liczbą wymierną. Oznacza to, że istnieje taka liczba rzeczywista $T \in R$ i takie liczby naturalne $q_i \in N$, że $T = q_i T_i$ ($i = 1, ..., n$). Jeśli przez T_0 oznaczymy najmniejszą z liczb T spełniających powyższe równości, to w ogólnym przypadku wszystkie prądy i napięcia w układzie będą okresowe o okresie równym T_0 (okres podstawowy). Jeśli w obwodzie działa n okresowych pobudzeń o okresach kolejno $T_1, T_2, ..., T_n$, przy czym istnieje co najmniej para liczb i, j taka, że stosunek T_i/T_j jest liczbą niewymierną. W tym przypadku prądy i napięcia nie będą okresowe.

a) $T_1 = \frac{2\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{\omega_0}$, $\quad T_2 = \frac{2\pi}{7\omega_0}$, $\quad T_3 = \frac{2\pi}{12{,}5\omega_0} = \frac{4\pi}{25\omega_0}$,

Należy teraz znaleźć takie $q_i \in N$, aby

$$T = q_1 T_1, \qquad T = q_2 T_2, \qquad T = q_3 T_3.$$

Zatem $T = q_1 \frac{\pi}{\omega_0} = 4\frac{\pi}{\omega_0}$, $\quad T = q_2 \frac{2\pi}{7\omega_0} = 14\frac{2\pi}{7\omega_0}$, $\quad T = q_3 \frac{4\pi}{25\omega_0} = 25\frac{4\pi}{25\omega_0}$.

Tak więc $T = \frac{4\pi}{\omega_0}$, czyli $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2}\omega_0$. Inaczej można stwierdzić, że ω jest największym wspólnym podzielnikiem liczb $2\omega_0, 7\omega_0, 12\frac{1}{2}\omega_0$. W programie DERIVE jest to funkcja **GCD – G**reatest **C**ommon **D**ivisor, wykonanie rozkazu GCD(2,7,12,5) = 0,5.

b) $T = \frac{200\pi}{\omega_0}$, $\qquad \omega = \frac{1}{100}\omega_0$.

Ad. 2

a) Jednokrotne różniczkowanie (dwa ciągi delt Derica) daje jeśli $u(t) \leftrightarrow \underline{U}_k$, to

$u'(t) \leftrightarrow j\omega_0 k \underline{U}_k = \frac{2U_m}{T} - \frac{2U_m}{T} e^{j\omega_0 k \frac{T}{2}} = \frac{2U_m}{T}\left(1-(-1)^k\right)$. Zatem

$\underline{U}_k = j\frac{U_m}{\pi k}\left[(-1)^k - 1\right]$, $k \neq 0$, $U_0 = 0$. Wstępują tylko nieparzyste harmoniczne.

b) Należy dwukrotnie różniczkować. Jeśli $u(t) \leftrightarrow \underline{U}_k$, to $u'(t) \leftrightarrow j\omega_0 k \underline{U}_k$, druga pochodna

$$u''(t) \leftrightarrow -\omega_0^2 k^2 \underline{U}_k = \frac{8U_m}{T^2}\left[e^{j\omega_0 k\frac{T}{4}} - e^{-j\omega_0 k\frac{T}{4}}\right] = \frac{16jU_m}{T^2}\frac{e^{j\omega_0 k\frac{T}{4}} - e^{-j\omega_0 k\frac{T}{4}}}{2j} = \frac{16jU_m}{T^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right).$$

Stąd $\underline{U}_k = -j\frac{4U_m \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi^2 k^2}$, $k \neq 0$. Występują tylko nieparzyste harmoniczne.

c) Należy dwukrotnie różniczkować. Wynik jest następujący:

$\underline{U}_k = \frac{U_m\left(1+(-1)^k\right)}{2\pi\left(k^2-1\right)}$, $k \neq 1$, $\underline{U}_1 = -j\frac{1}{4}U_m$.

Występują parzyste harmoniczne oraz pierwsza harmoniczna.

d) Należy dwukrotnie różniczkować. Wynik jest następujący: $\underline{U}_k = -\frac{2U_m}{\pi\left(4k^2-1\right)}$

Ad. 3

Najpierw należy znaleźć okres funkcji $f(t)$ (jeśli nie istnieje, to również nie istnieje szereg Fouriera). GCD(4,3) = 1. Zatem $\omega_0 = 1$. Stosując znany wzór Eulera, można zapisać

$$f(t) = 4\frac{e^{j4t} - e^{-j4t}}{2j} - 2\frac{e^{j3t} + e^{-j3t}}{2} = j2e^{-j4t} - e^{-j3t} - j2e^{j4t} - e^{j3t}.$$

Zatem $\underline{F}_{-4} = j2,\ \underline{F}_{-3} = -1,\ \underline{F}_4 = -j2,\ \underline{F}_3 = -1.$

Ad. 4

Zgodnie z pkt.3 podpunktem 4 (dodatek) $F_{sk} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\underline{F}_k|^2}$. Zatem

$F_{sk}^2 = |1-j|^2 + |2+j|^2 + 2^2 + |2-j|^2 + |1+j|^2 = 2+5+4+5+2 = 18$. Tak więc $F_{sk} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Ad. 5

Funkcja transmitancji tego układu wynosi (dzielnik napięcia)

$$H(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega}{1 + j\omega}.$$

Rozkładając nieparzystą funkcję $e(t)$ w szereg wykładniczy Fouriera ze współczynnikami $\underline{E}_k$ (np. poprzez dwukrotne różniczkowanie e(t), patrz Ad. 2b) otrzymuje się:

$$\underline{E}_k = -j\frac{4E_m \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi^2 k^2}$$

oraz $\omega_0 = 2\pi$. Jeżeli $u(t) \leftrightarrow \underline{U}_k$, wówczas $\underline{U}_k = H(jk\omega_0)\,\underline{E}_k$ wyznacza się ze wzoru:

$$\underline{U}_k = -j\frac{4E_m \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi^2 k^2}\frac{j\omega_0 kL}{R + j\omega_0 kL} = -j\frac{4\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi^2 k^2}\frac{j2\pi k}{1 + j2\pi k} =$$

$$= \frac{8\pi k \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi^2 k^2 (1 + j2\pi k)} = \frac{8\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi k (4\pi^2 k^2 + 1)} - j\frac{16\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{4\pi^2 k^2 + 1}$$

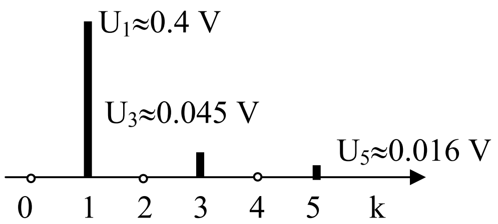
Dla k = 1, 3 i 5 otrzymamy początkowe współczynniki wykładniczego szeregu Fouriera napięcia na wejściu

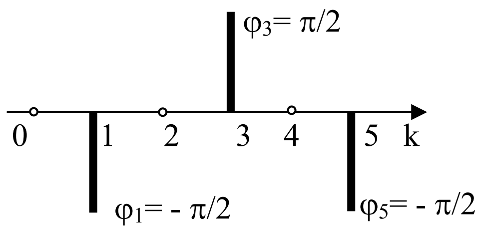
$$\underline{E}_1 \approx 0{,}4e^{-j\frac{\pi}{2}},\ \underline{E}_3 \approx 0{,}045e^{j\frac{\pi}{2}},\ \underline{E}_5 \approx 0{,}016e^{-j\frac{\pi}{2}},\ .$$

Dla k = 1, 3 i 5 otrzymamy początkowe współczynniki wykładniczego szeregu Fouriera napięcia na wyjściu $\underline{U}_1$ = 0.06290955131 - 0.3952723685·j, $\underline{U}_3$ = -0.002382297627 + 0.04490525235·j, $\underline{U}_5$ = 0.0005155022379 - 0.01619498043·j.

$$\underline{U}_1 \approx 0{,}4e^{-j1.4129 rad},\ \underline{U}_3 \approx 0{,}045e^{j1.623 rad},\ \underline{U}_5 \approx 0{,}016e^{-j1.5389 rad}.$$

Na rysunku poniżej pokazano początkowe prążki widma amplitudowego i fazowego napięcia wejściowego dla k ≥ 0. Początkowe prążki widma amplitudowego pokrywają się z prążkami widma amplitudowego na wejściu, natomiast prążkowe widmo fazowe jest podobne ciąg $\{-1{,}4129,\ 1{,}623,\ -1{,}5389\}\ rad$.





Ad. 6

Rozkładając napięcie $u(t)$ w zespolony szereg Fouriera otrzymamy: $u(t)=\sum_{k=-\infty,\,k\neq 0}^{k=\infty} j\frac{5}{k}e^{j\omega_0 kt}$, $U_0=5\pi$, przy czym $\omega_0=\frac{2}{5}$. Współczynnik $\underline{U}_5=j$. Aby wyznaczyć moc czynną wydzieloną w dwójniku N przez 5-tą harmoniczną sygnału, należy do wejścia dwójnika N podłączyć źródło napięcia o wartości skutecznej równej wartości skutecznej 5-tej harmonicznej, tzn. $\underline{E}_5=\sqrt{2}\underline{U}_5=\sqrt{2}j$. Wówczas moc czynną wydzieloną w dwójniku N można wyznaczyć z zależności

$$P_{5h}=\mathrm{Re}\left\{\underline{E}_5\underline{I}_5^*\right\}=\mathrm{Re}\left\{\underline{E}_5\left(\frac{\underline{E}_5}{R+j5\omega_0 L}\right)^*\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{\left|\underline{E}_5\right|^2}{R-j5\omega_0 L}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{2}{2-j2}\right\}=\frac{1}{2}\,W\,.$$

DODATEK
1. Wykładniczy szereg Fouriera

Sygnał f(t) nazywa się okresowym (periodycznym), jeżeli istnieje taka najmniejsza liczba $T>0$ (zwana okresem), że dla dowolnego t:

$$f(t)=f(t+kT),\ \ k=0,\pm1,\pm2,\ldots\ . \tag{1}$$

Sygnał okresowy $f(t)$, spełniający warunki Dirichleta , czyli:
- mający w okresie skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju,
- mający skończoną liczbę ekstremów (przedziałami monotoniczny)

może być zapisany w postaci wykładniczego szeregu Fouriera :

$$f(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underline{F}_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}\,, \tag{2}$$

gdzie

$$\underline{F}_k=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\ \ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_0 t}\mathrm{d}t=\left|\underline{F}_k\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k} \tag{3}$$

przy czym

$F_0=\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T}f(t)\mathrm{d}t$ jest składową stałą (wartością średnią) , a $\omega_0=2\pi/T$ – pulsacją podstawową, zaś t_0 może być wybrane dowolnie (wartość całki nie zależy od wyboru t_0).

Bazą rozwinięcia w wykładniczy szereg jest zbiór funkcji ortogonalnych typu $e^{jk\omega_0 t}$, dla k = 0, ±1, ±2, ... oraz dowolnego przedziału o długości równej okresowi. W skrócie operację rozwinięcia (2) można zapisać $f(t) \leftrightarrow \underline{F}_k$.

Szereg (2) jest zbieżny prawie wszędzie do $f(t)$, tzn. dla każdego t, z wyjątkiem punktów nieciągłości pierwszego rodzaju sygnału $f(t)$. W tych punktach nieciągłości szereg jest zbieżny do średniej:

$$\tfrac{1}{2}\left[f(t_{i-}) + f(t_{i+})\right].$$

Rozwinięcie (2) można zapisać w równoważnej postaci:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left|\underline{F}_k\right| \cos(k\omega_o t + \arg\{\underline{F}_k\}). \tag{4}$$

Do powyższego wzoru można dojść korzystając z zależności:

$$\underline{F}_k e^{jk\omega_0 t} + \underline{F}_{-k} e^{-jk\omega_0 t} = 2\left|\underline{F}_k\right| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k). \tag{5}$$

Zależność (4) ma prostą interpretację fizyczną. Wskazuje ona na to, że funkcję okresową o okresie T można traktować jako sumę składowej stałej F_0 i nieskończenie wielu przebiegów sinusoidalnych o pulsacjach będących wielokrotnościami pulsacji podstawowej ω_0 (**harmonicznych**). Współczynniki $2\left|\underline{F}_k\right| = F_{m,k}$ (k = 1, 2, 3,...) są amplitudami tych składowych, współczynniki φ_k ich fazami początkowymi.

2. Podstawowe właściwości wykładniczego szeregu Fouriera.

Niech funkcje $f(t)$ i $g(t)$ mają tę sam okres T i niech $f(t) \leftrightarrow \underline{F}_k$, $g(t) \leftrightarrow \underline{G}_k$. Zbiory współczynników szeregów Fouriera mają następujące właściwości:

1. liniowość: $\alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha \underline{F}_k + \beta \underline{G}_k$,
2. przesunięcie w dziedzinie czasu: $f(t - t_0) \leftrightarrow \underline{F}_k e^{-jk\omega_0 t_0}$,
3. różniczkowanie w dziedzinie czasu: $\dfrac{d^n}{dt^n}\{f(t)\} \leftrightarrow (jk\omega_0)^n \underline{F}_k$,
4. $\underline{F}_k^* = \underline{F}_{-k}$, gdzie $(.)^*$ oznacza operację sprzężenia; z tej własności wynika, że
   $\left|\underline{F}_k\right| = \left|\underline{F}_{-k}\right|$ - dyskretne widmo amplitudowe jest parzystą funkcją k,
   $\varphi_k = -\varphi_{-k}$ - dyskretne widmo fazowe jest nieparzystą funkcją k,
5. **5.** Współczynniki okresowego ciągu delt Diraca: $A\delta_T(t) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ są równe

$$\underline{F}_k = \frac{A}{T}.$$

Definicje:

1. Zbiór współczynników $\{\underline{F}_k\}$ nazywany jest dyskretnym widmem częstotliwościowym sygnału okresowego $f(t)$.
2. Zbiór współczynników $\{\left|\underline{F}_k\right|\}$ nazywany jest dyskretnym (prążkowym) widmem amplitudowym sygnału okresowego $f(t)$.

3. Zbiór współczynników $\left\{ \varphi_k = \arg \underline{F}_k = \dfrac{\pi \operatorname{sign}\left(\operatorname{Im}\{\underline{F}_k\}\right)}{2} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{Re}\{\underline{F}_k\}}{\operatorname{Im}\{\underline{F}_k\}}\right)\right\}$ nazywany jest dyskretnym widmem fazowym sygnału okresowego $f(t)$.

3. Wartość średnia i skuteczna funkcji okresowej. Twierdzenie Parsevala.

Dla sygnałów okresowych można podać następujące stwierdzenia:

1. Wartość średnia (składowa stała) sygnału okresowego $f(t)$ jest równa:

$$F_{sr} = F_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\mathrm{d}t\,.$$

2. Wartość średnia sumy sygnałów okresowych o tym samym okresie T jest równa sumie wartości średnich tych sygnałów.

3. Twierdzenie Parsevala dla szeregów Fouriera

$$\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} f(t)g(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{F}_k \underline{G}_k^*.$$

Z twierdzenia Parsevala wynika, że $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_o+T} f^2(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\underline{F}_k\right|^2$.

4. Wartość skuteczna sygnału okresowego $f(t)$ jest równa:

$$F_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)dt} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\underline{F}_k\right|^2} = \sqrt{F_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{k,sk}^2}\,,$$

F_{sk} jest wartością skuteczną sygnału, $F_{k,sk} = \dfrac{2\left|\underline{F}_k\right|}{\sqrt{2}}$ jest wartością skuteczną k – tej harmonicznej sygnału.

4. Reakcja układu na pobudzenie okresowe

Reakcję układu na pobudzenie okresowe można wyznaczyć:

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{R}_n e^{\mathrm{j}k\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\mathrm{j}k\omega_0)\underline{P}_k e^{\mathrm{j}k\omega_0 t}\,, \tag{6}$$

gdzie

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{P}_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}\,,$$

$H\left(jk\omega_0\right)$ - wartość transmitancji układu stabilnego w sensie **BIBO** dla $\omega = k\omega_0$.

Moc czynna wydzielona w rezystancji 1 Ω przy pobudzeniu prądem lub napięciem okresowym jest równa

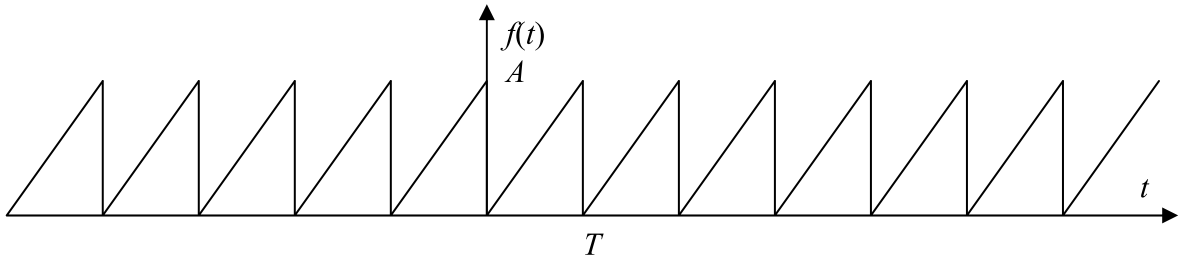
$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)\mathrm{d}t = F_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{k,sk}^2\,,$$

gdzie $u(t)$ lub $i(t) \leftrightarrow \underline{F}_k$

Przykłady

Przykład 1.

Oblicz wykładniczy szereg Fouriera sygnału okresowego $f(t)$ podanego poniżej na rysunku:



Pulsacja podstawowa jest równa $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Współczynniki $\underline{F}_n$ wykładniczego szeregu Fouriera dla przykładu wyznaczymy bezpośrednio z definicji (całkowanie przez części):

$$\underline{F}_k = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T} t e^{jk\omega_0 t} dt = \frac{A}{T^2}\int_0^T t e^{jk\omega_0 t} dt = \frac{A}{T^2}\left[\frac{1}{(jk\omega_0)^2}\left(1-(1+jk\omega_0 t)e^{jk\omega_0 t}\right)\right]\Bigg|_0^T$$

$$= \frac{A}{T^2}\frac{jT^2}{2\pi k} = j\frac{A}{2\pi k}, \qquad\qquad k \neq 0$$

gdy $k = 0$ (wartość średnia) $F_0 = \frac{A}{2}$.

Najszybciej zadanie to rozwiążemy wykorzystując właściwości szeregu Fouriera. Załóżmy, że funkcja okresowa pokazana na rysunku ma $f(t) \leftrightarrow \underline{F}_k$. Różniczkując funkcję $f(t)$ otrzymujemy $f'(t) = \frac{A}{T} - A\delta_T(t) = g(t) - A\delta_T(t)$ ($g(t) = \frac{A}{T}$ - wartość stała,

(funkcja g(t) ma współczynniki $\underline{G}_k = 0$ dla $k \neq 0$, gdyż

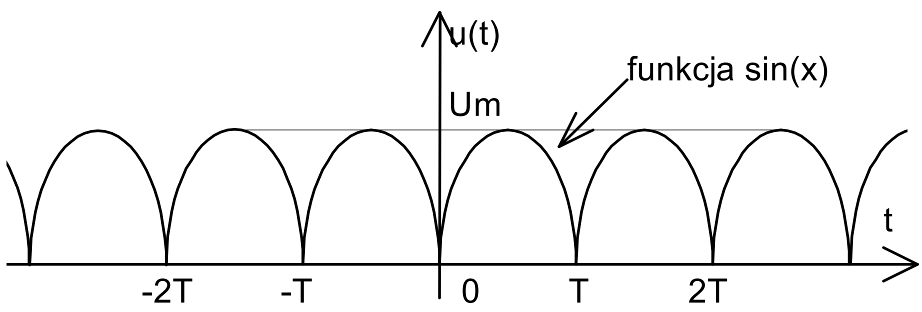
$$\underline{G}_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} g(t)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_o t}\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{A}{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_o t}\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & dla\ k \neq 0 \\ \frac{A}{T} & dla\ k = 0 \end{cases}).$$

Stosując zależność 5 (podpunkt 2 dodatek) dla k $\neq$ 0 można zapisać: $f'(t) \leftrightarrow jk\omega_0 \underline{F}_n = -\frac{A}{T}$, stąd

$$\underline{F}_n = j\frac{A}{2\pi k}.$$

Przykład 2

Wyznacz wykładniczy szereg Fouriera sygnału okresowego $u(t)$ podanego poniżej na rysunku:



Pulsacja podstawowa jest równa $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.

Okres funkcji $u(t)$ w przedziale od 0 do T można zapisać analitycznie:

$$u_T(t) = U_m \sin\left(\frac{2\pi}{2T}t\right)\left[1(t) - 1(t-T)\right] = U_m \sin\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)\left[1(t) - 1(t-T)\right].$$

Obliczmy pierwszą i drugą pochodną $u_T(t)$:

$$u_T^{'}(t) = U_m \frac{\omega_0}{2}\cos\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)\left[1(t) - 1(t-T)\right] + U_m \sin\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)\left[\delta(t) - \delta(t-T)\right]$$

$$= U_m \frac{\omega_0}{2}\cos\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)\left[1(t) - 1(t-T)\right]$$

$$u_T^{''}(t) = -U_m \frac{\omega_0^2}{4}\sin\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)\left[1(t) - 1(t-T)\right] + U_m \frac{\omega_0}{2}\cos\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)\left[\delta(t) - \delta(t-T)\right]$$

$$= -U_m \frac{\omega_0^2}{4}\sin\left(\frac{\omega_0}{2}t\right)\left[1(t) - 1(t-T)\right] + U_m \frac{\omega_0}{2}\delta(t) + U_m \frac{\omega_0}{2}\delta(t-T)$$

$$= -\frac{\omega_0^2}{4}u_T(t) + U_m \frac{\omega_0}{2}\delta(t) + U_m \frac{\omega_0}{2}\delta(t-T)$$

Zatem druga pochodna funkcji $u(t)$ wynosi (dla jednego okresu występują dwie delty Diraca - $U_m \frac{\omega_0}{2}\delta(t) + U_m \frac{\omega_0}{2}\delta(t-T)$, które jeśli okresowo 'powielimy' utworzą jeden ciąg delt Diraca $U_m \omega_0 \delta_T(t)$)

$$u^{''}(t) = -\frac{\omega_0^2}{4}u(t) + U_m \omega_0 \delta_T(t),$$

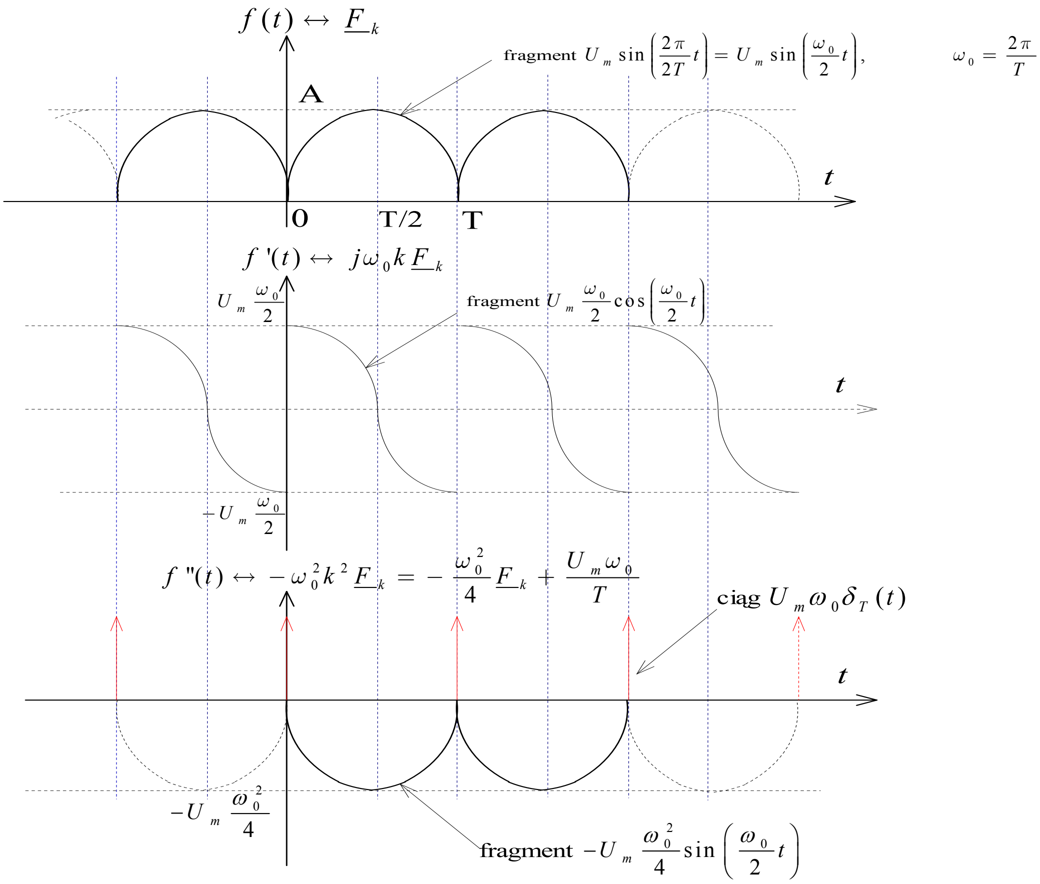
jeśli $u(t) \leftrightarrow \underline{F}_k$, więc $u^{''}(t) \leftrightarrow (j\omega_0 k)^2 \underline{F}_k = -\frac{\omega_0^2}{4}\underline{F}_k + \frac{U_m \omega_0}{T}$. Z tego wyrażenia wyznaczamy

$$\underline{F}_k = \frac{\dfrac{U_m \omega_0}{T}}{\dfrac{\omega_0^2}{4} - \omega_0^2 k^2} = -U_m \frac{2}{\pi\left(4k^2 - 1\right)}.$$

Ostatecznie :

$$u(t) = \frac{-2U_m}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4k^2 - 1}e^{j\omega_0 kt}.$$

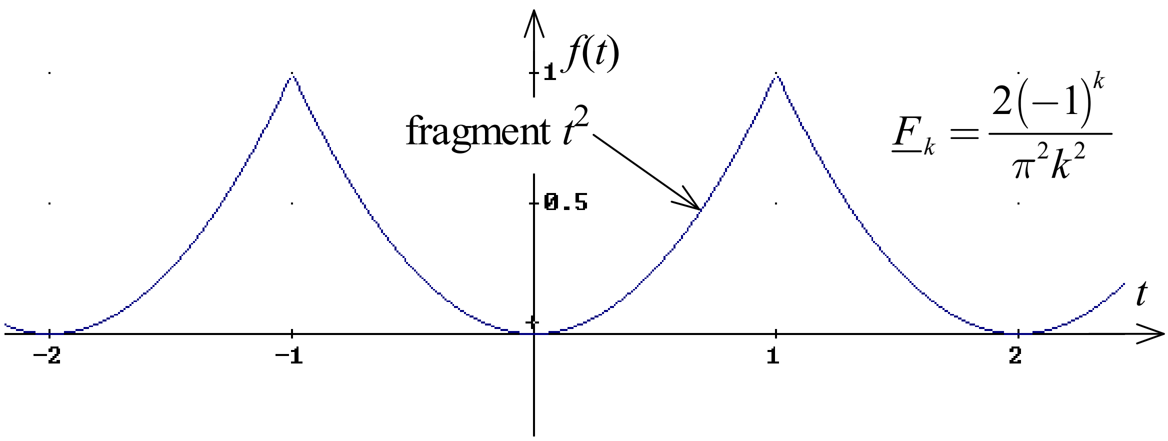
Powyższe zależności staną się jaśniejsze, jeśli posłużymy się interpretacją graficzną podaną poniżej



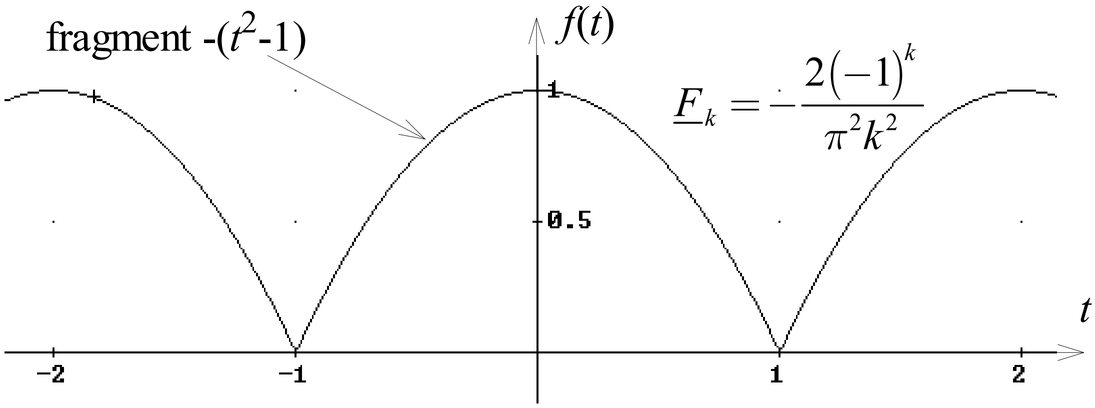
UZUPEŁNIENIA

Do samodzielnych obliczeń, poniżej podano funkcje okresowe i ich współczynniki $\underline{F}_k$.

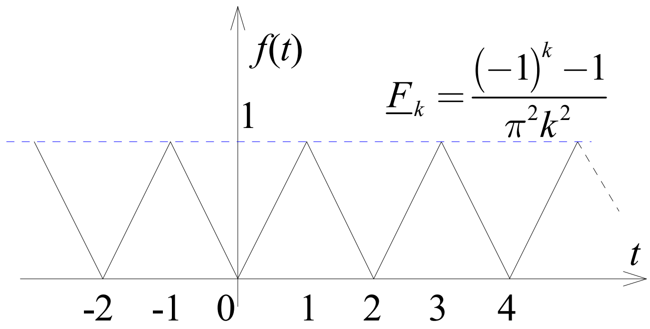
1. Parabola 1



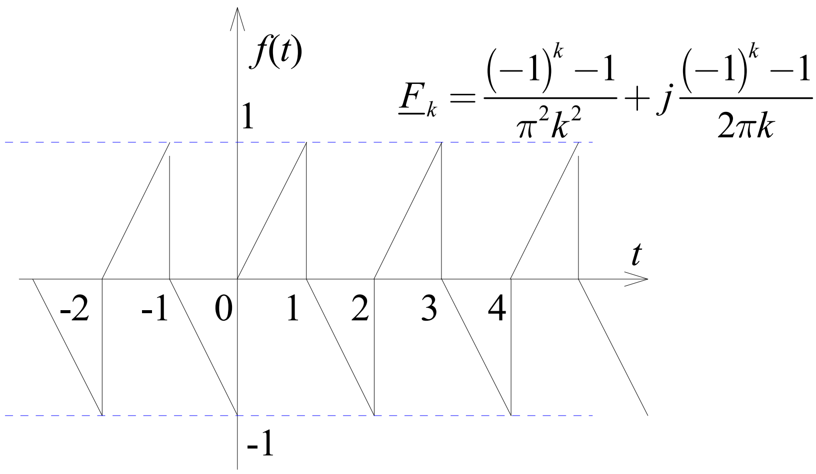
2. Parabola 2



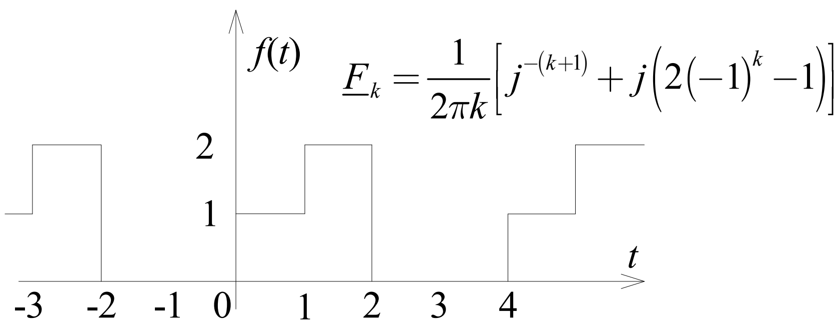
3. Funkcja trójkątna 1



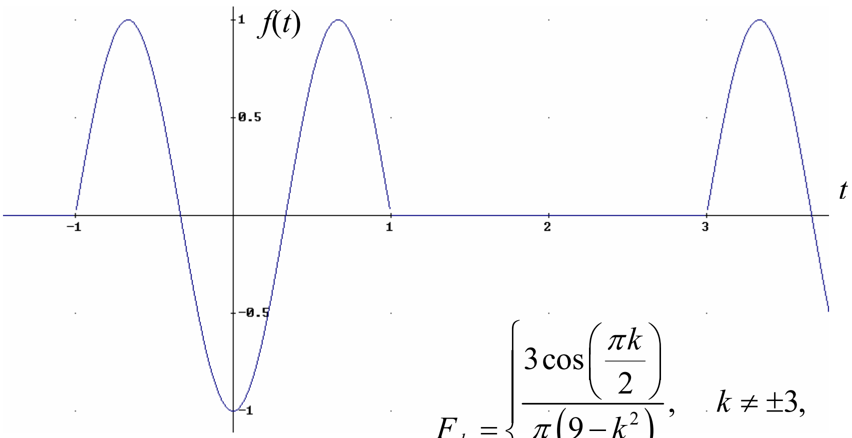
4. Funkcja trójkątna 2



5. Funkcja schodkowa

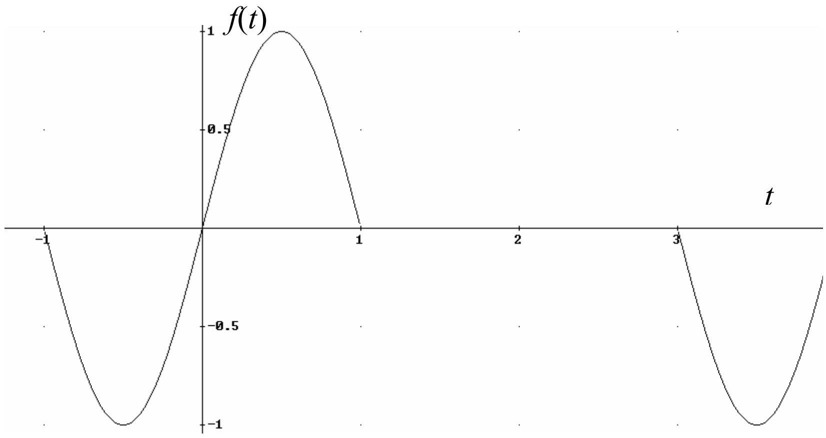


5. Funkcja sinus-A



$$\underline{F}_k = \begin{cases} \dfrac{3\cos\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)}{\pi\left(9-k^2\right)}, & k \neq \pm 3, \\ \mp\dfrac{1}{4}, & k = \pm 3 \end{cases}$$

6. Funkcja sinus-B



$$\underline{F}_k = \begin{cases} 2\mathrm{j}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)}{\pi\left(k^2-4\right)}, & k \neq \pm 2, \\ \mp\dfrac{1}{4}\mathrm{j}, & k = \pm 2 \end{cases}$$