Ćwiczenie 8

WŁAŚCIWOŚCI FUNKCJI TRANSMITANCJI

Celem ćwiczenia jest zbadanie wpływu zmian położenia biegunów funkcji transmitancji układu na jego charakterystykę impulsową oraz na jego charakterystykę częstotliwościową.
W ćwiczeniu należy wyznaczyć odpowiedź impulsową układu realizującego:
- pojedynczy biegun na osi rzeczywistej w lewej półpłaszczyźnie zmiennej s,
- parę biegunów na osi rzeczywistej w lewej półpłaszczyźnie zmiennej s,
- parę biegunów zespolonych sprzężonych w lewej półpłaszczyźnie zmiennej s.

A. Wprowadzenie

1. Wstęp

Funkcja transmitancji $H(s)$ jest ilorazem transformaty Laplace'a $R(s)$ odpowiedzi i transformaty $P(s)$ pobudzenia przy zerowych warunkach początkowych. Dla układu SLS $H(s)=\dfrac{L(s)}{M(s)}$ jest wymierną funkcją zmiennej zespolonej s z wielomianami $L(s)$ i $M(s)$ o rzeczywistych współczynnikach [1]. Pierwiastki $L(s)$ są zerami, a pierwiastki $M(s)$ biegunami transmitancji.

2. Układ pierwszego rzędu

Funkcja transmitancji opisująca układ pierwszego rzędu ma ogólną postać:

$$H(s)=\frac{A_1 s + A_0}{B_1 s + B_0}. \tag{1}$$

Dla uproszczenia dalszych rozważań przyjęto $H(s)$ o postaci

$$H(s)=\frac{H_0}{s-s_0}=\frac{H_0}{s+a}, \tag{1a}$$

gdzie $s_0 = -a$ ($a > 0$) jest biegunem tej funkcji.

Charakterystyka impulsowa układu opisanego (1a) jest odwrotną transformatą Laplace'a funkcji transmitancji $H(s)$

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=H_0 e^{s_0 t}1(t)=H_0 e^{-at}1(t). \tag{2}$$

Dla układu stabilnego biegun musi leżeć na ujemnej półosi rzeczywistej płaszczyzny $s=\sigma+j\omega$, charakterystyka impulsowa jest funkcją eksponencjalnie malejącą.

3. Układ drugiego rzędu

Funkcja transmitancji układu drugiego rzędu ma postać:

$$H(s) = \frac{A_2 s^2 + A_1 s + A_0}{B_2 s^2 + B_1 s + B_0}. \tag{3}$$

Do dalszych rozważań przyjęto ($A_2 = A_1 = 0 \cap B_2 = 1$, $A_0 = H_0$)

$$H(s) = \frac{H_0}{s^2 + B_1 s + B_0}. \tag{3a}$$

Bieguny funkcji transmitancji $H(s)$ (3a) opisującej układ stabilny w sensie BIBO muszą leżeć w lewej półpłaszczyźnie s i mogą być rzeczywiste lub zespolone sprzężone.

3.1. Rzeczywiste bieguny *H*(*s*)

Funkcję $H(s)$ można rozłożyć w następujący sposób:

$$H(s) = \frac{H_0}{s^2 + B_1 s + B_0} = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} = \frac{C_1}{s + a} + \frac{C_2}{s + b} = \frac{C}{s + a} - \frac{C}{s + b}, \tag{4}$$

gdzie:

$$s_1 = -a,\ s_2 = -b,\ C_1 = -C_2 = C = \frac{H_0}{b - a}. \tag{5}$$

Charakterystyka impulsowa $h(t)$ jest sumą dwóch przebiegów **eksponencjalnych**

$$h(t) = C\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)1(t). \tag{6}$$

Dla $s_1 = s_2 = s_0 = -a$ funkcja $H(s)$ przyjmuje postać

$$H(s) = \frac{H_0}{(s + a)^2}, \tag{7}$$

a charakterystyka impulsowa:

$$h(t) = H_0 t e^{-at} 1(t). \tag{8}$$

3.2 Zespolone sprzężone bieguny *H*(*s*)

Funkcję $H(s)$ można rozłożyć następująco:

$$H(s) = \frac{H_0}{s^2 + B_1 s + B_0} = \frac{C}{s - s_0} + \frac{C^*}{s - s_0^*} = \frac{C}{s + \sigma_0 + j\omega_0} + \frac{C^*}{s + \sigma_0 - j\omega_0}, \tag{9}$$

gdzie:

$$s_0 = -\sigma_0 - j\omega_0,\ C = -\frac{H_0}{j2\omega_0},\ \sigma_0 > 0. \tag{10}$$

W omawianym przypadku $C = -C^*$, tj. stała C jest liczbą urojoną.

Funkcję $H(s)$ można również rozłożyć w inny sposób:

$$H(s) = \frac{H_0}{s^2 + B_1 s + B_0} = \frac{H_0}{\omega_0} \frac{\omega_0}{(s+\sigma_0)^2 + \omega_0^2}. \tag{11}$$

gdzie:

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} B_1,\ \omega_0^2 = B_0 - \frac{1}{4} B_1^2. \tag{12}$$

Charakterystykę impulsową $h(t)$ można, zatem przedstawić w postaci:

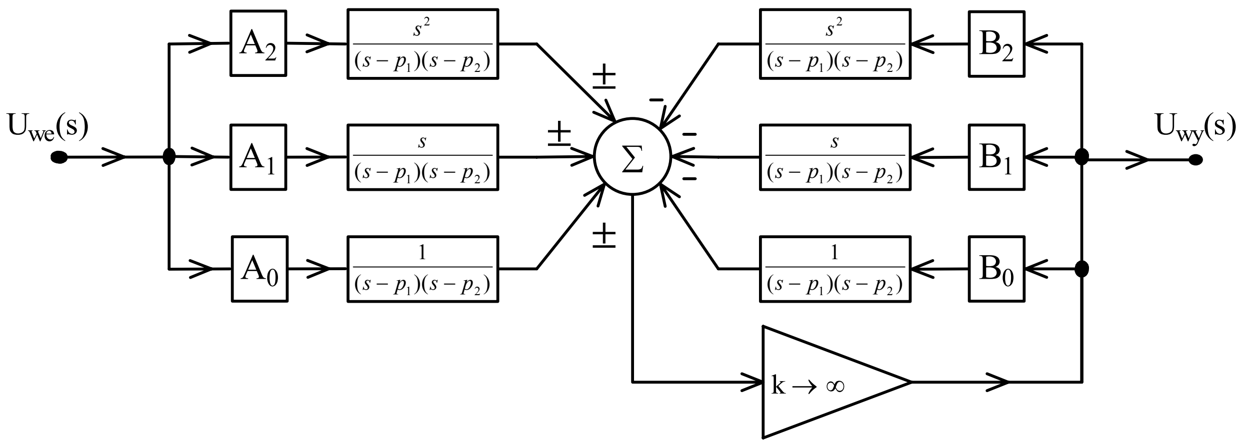
$$h(t) = \frac{H_0}{\omega_0} e^{-\sigma t} \sin(\omega_0 t) 1(t). \tag{13}$$

Charakterystyka impulsowa ma charakter drgań gasnących o częstotliwości i szybkości zaniku uzależnionych od położenia biegunów $H(s)$.

4. Zestaw laboratoryjny

4. 1. Opis układu

Schemat blokowy układu laboratoryjnego [2] przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1

Układ ten można opisać następującym równaniem

$$U_{wy}(s) = k \left\{ \frac{\pm A_2 s^2 \pm A_1 s \pm A_0}{(s-p_1)(s-p_2)} U_{we}(s) - \frac{B_2 s^2 + B_1 s + B_0}{(s-p_1)(s-p_2)} U_{wy}(s) \right\}, \tag{14}$$

gdzie:

$p_1 \neq p_2,\ p_1 < 0,\ p_2 < 0$ - rzeczywiste bieguny funkcji transmitancji każdego z sześciu podukładów wchodzących w skład zestawu laboratoryjnego.

Obliczając $U_{wy}(s)$, gdy $k \to \infty$, otrzymuje się

$$U_{wy}(s) = \frac{\pm A_2 s^2 \pm A_1 s \pm A_0}{B_2 s^2 + B_1 s + B_0} U_{we}(s)\,. \tag{15}$$

Zatem

$$H(s) = \frac{\pm A_2 s^2 \pm A_1 s \pm A_0}{B_2 s^2 + B_1 s + B_0}\,. \tag{16}$$

Zakresy regulacji poszczególnych współczynników A_i i B_i są następujące:

$$\begin{aligned} &0 \le A_i \le 1, \qquad i = 0,1,2, \\ &0{,}18 \le B_0 \le 1,\ \ 0 \le B_1 \le 1,\ \ 0{,}18 \le B_2 \le 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Ponieważ w przypadku realizacji transmitancji $H(s)$ nie są istotne bezwzględne wartości B_i oraz A_i, lecz ich stosunki, ograniczenia (17) nie są zbyt ostre. W przypadku, gdy $|A_i| > 1$ lub $|B_i| > 1$, należy odpowiednio licznik lub mianownik podzielić przez ten współczynnik, tak, aby największy ze współczynników licznika lub mianownika nie przekraczał jedności. Ze względu na poprawną pracę układu wskazane jest, by największy ze współczynników B_i (również A_i) był możliwie bliski jedności. W tym celu należy zmodyfikować transmitancję (16), dzieląc odpowiednio licznik i mianownik przez stałe współczynniki. Po zmodyfikowaniu nowa funkcja $H'(s)$ będzie różnić się od $H(s)$ stałym współczynnikiem, tzn.

$$H(s) = C \cdot H'(s)\,. \tag{18}$$

Współczynnik C nie ma wpływu na kształt charakterystyki częstotliwościowej ani odpowiedzi impulsowej (zmienia tylko amplitudę).

Ponieważ w układzie laboratoryjnym nie można ustawić $B_2 = 0$, zatem nie można w sposób bezpośredni zrealizować transmitancji pierwszego rzędu (1). Aby tę transmitancję zrealizować, należy tak zmodyfikować transmitancję $H(s)$ układu drugiego rzędu, aby doprowadzić ją do postaci:

$$H(s) = \frac{H_0 (s - s_p)}{(s - s_0)(s - s_p)} = \frac{H_0}{s - s_0}\,. \tag{19}$$

Transmitancja $H(s)$ dana zależnością (16) jest znormalizowaną transmitancją układu, przy czym częstotliwość normalizująca jest równa

$$f_N = 1\ kHz\,. \tag{20}$$

Transmitancję rzeczywistego układu można uzyskać, podstawiając do zależności (16)

$$s := \frac{s}{2\pi f_N}\,, \tag{21}$$

to znaczy $H_r(s) = H(s)\big|_{s := \frac{s}{2\pi f_N}}$. Rzeczywistą, czyli zdenormalizowaną charakterystykę impulsową można otrzymać wykonując odwrotną transformację Laplace'a $h_r(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_r(s)\}$ lub wykorzystując właściwości transformacji Laplace'a (zmiana skali czasu)

$$f(at)1(t) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right),$$

można zapisać $h_r(t) = 2\pi f_N h(2\pi f_N t)$.

Odpowiedniej modyfikacji ulegną też zależności (2), (6), (8) i (13) przedstawiające odpowiedzi impulsowe układu. Opisany proces nazywa się denormalizacją.

Badany układ nie może być oczywiście pobudzany $\delta(t)$. W ćwiczeniu pobudzeniem jest ciąg wąskich impulsów o dostatecznie długim czasie powtarzania dobranym tak, aby odpowiedź układu na pojedynczy impuls osiągała w przybliżeniu stan ustalony. W celu porównania odpowiedzi układu otrzymanej na oscyloskopie $r_o(t)$ ze zdenormalizowaną charakterystyką impulsową $h_r(t)$ należy $h_r(t)$ pomnożyć przez stałą $c = A\tau$, gdzie A – jest amplitudą impulsu pobudzenia [V], a τ - szerokością impulsu [s]. Można zatem, w ćwiczeniu laboratoryjnym porównywać charakterystykę impulsową $c \cdot h_r(t)$ z odpowiedzią impulsową otrzymaną na ekranie oscyloskopu $r_o(t)$. W celu porównania $r_o(t)$ z $h_r(t)$ wystarczy wyznaczyć z oscylogramu $r_o(t)$ charakterystyczne parametry tej odpowiedzi $(\omega_0,\ \sigma)$ i porównać je z odpowiednimi parametrami przebiegu $h_r(t)$.

4.2 Sposób posługiwania się układem

1. Dołączyć do układu zasilanie ±20V.
2. Do wejścia układu dołączyć generator przebiegu sinusoidalnego małej częstotliwości, do wyjścia zaś woltomierz i oscyloskop.
3. Wcisnąć klawisz oznaczony „*A*, *B* skalowanie" i regulując pokrętłem napięcia wyjściowego generatora ustalić na woltomierzu napięcie U_0 (najwygodniej 1 V). Częstotliwość generatora wybrać z przedziału 100 Hz – 10 KHz. Zalecana częstotliwość to f_N = 1 kHz.
4. Wciskając kolejno klawisze A_i, B_i (i = 1, 2, 3) ustalić pokrętłami napięcie $A_i \cdot U_0$ lub $B_i \cdot U_0$, odczytując wskazania woltomierza. Przełączniki $A_i \geq 0$, $A_i \leq 0$ ustawić w odpowiedniej pozycji.
5. Po ustawieniu wszystkich współczynników A_i i B_i odłączyć generator przebiegu sinusoidalnego i podłączyć generator impulsowy. Ustawić odpowiednią częstotliwość powtarzania impulsów oraz amplitudę *A* nie większą niż 1.5V. Następnie wcisnąć klawisz „WY". Od tej chwili zaciski „WEJŚCIE" stanowią wejście układu realizującego transmitancję $H(s)$, a zaciski „WYJŚCIE" – jego wyjście.

5. Część laboratoryjna

Wykaz przyrządów:

- zasilacz laboratoryjny (± 20 V),
- generator przebiegu sinusoidalnego,
- generator impulsów prostokątnych,
- oscyloskop,
- woltomierz,
- komputer z programem symulującym przebieg ćwiczenia.

W ćwiczeniu odpowiedź impulsowa $r_0(t)$ badanego układu jest rejestrowana na ekranie oscyloskopu jako reakcja układu na pobudzenie rzeczywistym impulsem o skończonej wartości amplitudy i skończonym czasie trwania, nie zaś jako reakcja na pobudzenie impulsem $\delta(t)$. Ze względu na sposób rejestracji stosuje się pobudzenie układu okresowym sygnałem impulsowym. Czas trwania impulsu powinien być dostatecznie krótki, natomiast czas powtarzania musi być dłuższy od czasu ustalania się odpowiedzi układu.

1. Zaobserwować na ekranie oscyloskopu odpowiedź impulsową $r_0(t)$ układu pierwszego rzędu. Odpowiedź wydrukować.
2. Zaobserwować na ekranie oscyloskopu odpowiedź impulsową $r_0(t)$ układu drugiego rzędu o biegunach rzeczywistych (dwa różne i jeden o podwójnej krotności). Odpowiedzi wydrukować.
3. Zaobserwować na ekranie oscyloskopu odpowiedź impulsową $r_0(t)$ układu drugiego rzędu o biegunach zespolonych sprzężonych. Odpowiedź wydrukować.
4. Powtórzyć punkt 3. zmieniając część urojoną biegunów bez zmiany części rzeczywistej.
5. Powtórzyć punkt 3. zmieniając część rzeczywistą biegunów bez zmiany części urojonej.
6. Zmierzyć amplitudową charakterystykę częstotliwościową jednego z badanych układów z pkt 4, 5 lub 3 oraz jednego z pkt. 2.
7. Dokonać porównania obliczonych i zmierzonych odpowiedzi impulsowych i charakterystyk częstotliwościowych. Porównanie może być uznane za wystarczające, jeśli np. z odpowiedzi impulsowej $r_0(t)$ wyznaczy się charakterystyczne parametry $(\omega_0,\ \sigma)$ i porówna się je z odpowiednimi parametrami charakterystyki impulsowej $h_r(t)$.

Uwagi:

1. Przy obserwacji odpowiedzi impulsowych $r_0(t)$ układu wskazana jest synchronizacja oscyloskopu bezpośrednio impulsami z wyjścia „trigger output" generatora impulsowego, podanymi na gniazdo synchronizacji zewnętrznej oscyloskopu (odpowiednio też przełączyć oscyloskop). Amplituda impulsów z generatora nie powinna być większa niż 1,5V.
2. Maksymalna amplituda napięcia wyjściowego badanego układu wynosi ok. 10V. Uwaga ta jest szczególnie ważna przy pomiarze amplitudowej charakterystyki częstotliwościowej.
3. Program komputerowy do tego ćwiczenia pozwala zasymulować reakcję na pobudzenie wąskim impulsem prostokątnym, oraz wyznaczyć współczynniki zdenormalizowanej funkcji $H_r(s)$ i przebieg charakterystyki amplitudowej układu. Należy pamiętać przy tym, aby dobierać parametry impulsu (amplitudę i czas trwania impulsu) do parametrów czasowych przewidywanej reakcji impulsowej. W szczególności należy zapewnić liniową pracę zestawu przy pracy z takim pobudzeniem. Nie można stosować tego samego impulsu w każdym badanym przypadku. Jest to wygodne dla „wykonywujących ćwiczenie", ale nie wskazane ze względu na rezultaty badań. Generalnie; należy tak dobrać parametry impulsu i nastawy oscyloskopu, aby powierzchnia pod kreśloną krzywa stanowiła znaczącą część powierzchni ekranu.
4. Przy symulowaniu funkcji z pojedynczym biegunem rzeczywistym współczynniki A; i B; powinny być tak wybrane, aby jeden z dwóch rzeczywistych biegunów $H(s)$ został zredukowany przez jedno z zer tej funkcji. Znormalizowana funkcja transmitancji może mieć, np. taką postać: $H(s)=\dfrac{(s+a)}{(s+a)(s+b)}$. Jeśli przyjąć, np., a = 0.5, b = 0.4, otrzymuje się funkcję z pojedynczym biegunem w s = -0.4. i współczynnikami, które są realizowalne w badanym zestawie. Znormalizowana charakterystyka impulsowa $h(t)=e^{-\sigma_z t}1(t)=e^{-0.4t}1(t)$, natomiast rzeczywista charakterystyka impulsowa $h_r(t)=\omega_N e^{-\sigma_{rz} t}1(t)=\omega_N e^{-0.4\omega_N t}1(t)$, gdzie $\omega_N=2\pi f_N$.

Pytania kontrolne

1. Omówić wpływ położenia na płaszczyźnie s biegunów funkcji transmitancji na charakterystykę impulsową układu. Przedyskutować możliwe przypadki.
2. Wyznaczyć charakterystykę impulsową $h(t)$ układu o funkcji transmitancji
$$H(s) = \frac{s+2}{4s^2+2s+1}.$$
3. Wyznaczyć charakterystykę jednostkową $k(t)$ układu o funkcji transmitancji $H(s) = \frac{s+2}{4s^2+2s+1}$. Jaki jest związek między $h(t)$ a $k(t)$?
4. Układ, który realizuje w dziedzinie czasu operację całkowania, nazywany jest idealnym układem całkującym, tj. $p(t) = \frac{d}{dt}\left[r(t)\right]$. Jaką funkcję transmitancji $H(s)$ ma ten układ? Jak wygląda charakterystyka impulsowa tego układu? Jaką funkcję transmitancji ma rzeczywisty „stratny" układ całkujący?
5. Podaj przykłady układów zbudowanych z elementów RLC za pomocą, których realizuje się funkcje transmitancji pierwszego i drugiego rzędu (różne przypadki).
6. Układ, który realizuje w dziedzinie czasu operację różniczkowania, nazywany jest idealnym układem różniczkującym, tj. $r(t) = \frac{d}{dt}\left[p(t)\right]$. Jaką funkcję transmitancji $H(s)$ ma ten układ? Jak wygląda charakterystyka impulsowa tego układu? Jaką funkcję transmitancji ma rzeczywisty „stratny" układ różniczkujący?
7. Jak ustawić w zestawie laboratoryjnym funkcję transmitancji pierwszego rzędu z biegunem w s = -0,8 lub s = -0,2 ? Należy pamiętać o ograniczeniach na współczynniki A_i i B_i.
8. Narysować odpowiedź impulsową układu drugiego rzędu, którego funkcja transmitancji ma bieguny
   a) zespolone sprzężone, b) rzeczywiste o krotności dwa, c) rzeczywiste o pojedynczej krotności? Jak nazywają się te poszczególne odpowiedzi?
9. Zdefiniować pojęcie i podać interpretację charakterystyki amplitudowej. Podać jej podstawowe właściwości.
10. Wyznaczyć rzeczywistą charakterystykę amplitudową układu o znormalizowanej funkcji transmitancji $H(s) = \frac{s+2}{4s^2+2s+1}$, ($f_N = 1000\ Hz$).

Literatura

[1] Uruski M., Wolski W., Teoria obwodów I, skrypt PWr., Wrocław 1984.
[2] Pielichowski A., Filtr aktywny z użyciem źródeł sterowanych o jednostkowym wzmocnieniu, praca dyplomowa, Wrocław 1982.
[3] J. Osiowski, J. Szabatin, Podstawy teorii obwodów, tom II, Podręczniki akademickie, NT, Warszawa 1995 (Materiał na temat rachunku operatorowego).
[4] J. Osiowski, J. Szabatin, Podstawy teorii obwodów, tom III, Podręczniki akademickie, NT, Warszawa 1995 (Materiał odpowiedzi impulsowej i jednostkowej).