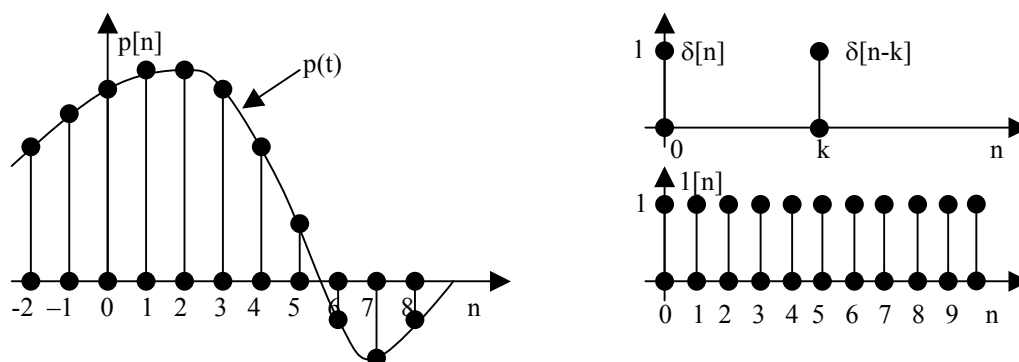


Układy i sygnały dyskretne

W odróżnieniu od sygnałów ciągłych, które są określone dla dowolnej chwili czasu, sygnały dyskretne są określone dla dyskretnych wartości czasu. Sygnały te mogą być reprezentowane przez ciągi liczb. Jeśli zbiór wartości sygnałów jest także dyskretny, wówczas taki sygnał z czasem dyskretnym nazywamy sygnałem cyfrowym. Sygnały, których obydwie zmienne są ciągłe noszą nazwę sygnałów analogowych. Stosownie do tego układy przetwarzające sygnały analogowe noszą nazwę układów analogowych, Układy przetwarzające sygnały z czasem dyskretnym nazywamy układami dyskretnymi. Układy cyfrowe wykonują operacje na sygnałach z czasem dyskretnym o skwantowanych poziomach.

Na ogół, chociaż nie zawsze, sygnały dyskretne otrzymuje się przez próbkowanie sygnałów analogowych. Jeżeli sygnał dyskretny $p[n]$ otrzymuje się w wyniku równomiernego próbkowania sygnału analogowego $p(t)$ z okresem próbkowania T wówczas: $p[n] = p(nT)$. Ciąg próbek $\{p[n]\}$ stanowi dyskretną reprezentację $p(t)$. Na rys. 1 pokazano trzy przykłady sygnałów dyskretnych.



Rys. 1 Przykłady sygnałów dyskretnych: $p[n] = p(nT)$, $\delta[n]$, $\delta[n-k]$ oraz $1[n]$.

Sygnał impulsowy $\delta[n]$, będący odpowiednikiem dyskretnym delty Diraca, jest ciągiem próbek:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ciąg ten nosi nazwę delty Kroneckera. Ciąg skokowy $1[n] = 1(nT)$ jest powiązany z ciągiem $\delta[n]$ zależnością:

$$1[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k], \quad (2)$$

przy czym $\delta[n] = 1[n] - 1[n-1]$. Podobnie można zdefiniować ciąg wykładniczy a^n , czy ciąg sinusoidalny $\text{Asin}(\Omega n + \Phi)$. Ten ostatni, otrzymany w wyniku próbkowania przebiegu $\text{Asin}(\omega t + \Phi)$ ($\Omega = \omega T$), nie musi być dyskretnym przebiegiem periodycznym.

Sygnał $f[n]$ nazwiemy dyskretnym sygnałem periodycznym, jeżeli będzie istniała taka liczba naturalna N , że $f[n] = f[n+N]$. Aby w wyniku próbkowania sygnału analogowego $f(t)$ o okresie T_a , otrzymać dyskretny przebieg periodyczny o okresie N trzeba, aby $f[n] = f[n+N]$, czyli by $f(nT) = f(nT + mT_a)$, gdzie m – liczba naturalna. Tak więc okres próbkowania T sygnału periodycznego $f(t)$ o okresie T_a powinien wyrażać się wzorem:

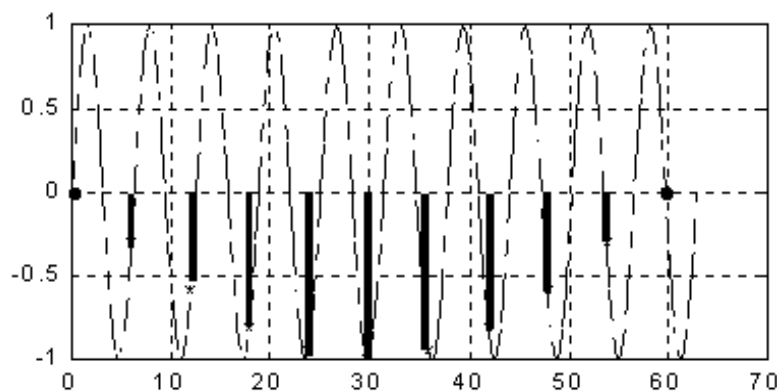
$$T = \frac{m}{N} T_a. \quad (3)$$

Przy próbkowaniu przebiegu sinusoidalnego $f(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$, o okresie $T_a = 2\pi/\omega_0$ powinno się próbkować z okresem:

$$T = \frac{2\pi m}{\omega_0 N}, \quad (4)$$

gdzie m i N – liczby naturalne. Zauważmy, że okres sygnału spróbkowanego w dziedzinie czasu, równy NT , może być większy od okresu sygnału analogowego T_a , jeżeli $m > 1$. Wówczas będziemy utożsamiać sygnał dyskretny z sygnałem analogowym o mniejszej częstotliwości powtarzania niż sygnału oryginalnego.

W interesujący sposób wyjaśnia to tzw. efekt stroboskopowy, powstający przy okresowym, impulsowym oświetlaniu lub fotografowaniu obracających się kół, np. dyliżansu na filmach z „dzikiego Zachodu”. Przy pewnych prędkościach obserwuje się pozorny ich obrót do tyłu. Zjawisko to można wyjaśnić badając zachowanie dyskretnego wersora czasowego $f[n] = e^{jn\Omega}$ lub $\text{Im}\{f[n]\} = \sin(n\Omega)$ (rys.2), gdzie Ω - dyskretna pulsacja w radianach.



Rys. 2. Ilustracja problemu próbkowania z niewłaściwą częstotliwością

Na to, aby $f[n]$ był sygnałem periodycznym o okresie N musi zachodzić równość $e^{jn\Omega} = e^{j(n+N)\Omega}$, czyli $N\Omega = 2\pi m$. Stąd wniosek, że

$$\Omega = \frac{m}{N} 2\pi. \quad (5)$$

Ponieważ $f[n] = e^{j\omega t} \big|_{t=nT} = e^{jn\omega T}$, to $\Omega = \omega T$. Aby $f[n] = f[n+N]$ należy próbkować z okresem

$$T = \frac{m}{N} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{m}{Nf}, \quad (6)$$

gdzie m i N – liczby naturalne nie mające wspólnych dzielników, $f = 2\pi/\omega$. Jeśli więc będziemy próbkować napięcie sieci o częstotliwości $f = 50$ Hz, a przebieg spróbkowany ma mieć okres $N = 10$, należy próbkować z okresem $T = 2$ ms (przyjeliśmy $m=1$ aby uniknąć aliasingu). Większa liczba próbek w okresie T_a pozwala dokładniej odtworzyć przebieg analogowy. Do tego celu używa się ekstrapolatorów, który zamieniają przebieg dyskretny na przebieg analogowy.

Próbkowanie z okresem większym od okresu przebiegu analogowego pozwala zamienić przebiegi w.c.z. na przebiegi o mniejszej częstotliwości. Dzięki temu możemy obserwować przebiegi, których częstotliwości leżą poza pasmem przenoszenia takich przyrządów pomiarowych jak oscyloskopy.

Na sygnale dyskretnym możemy wykonywać wiele operacji. Oto niektóre z nich.

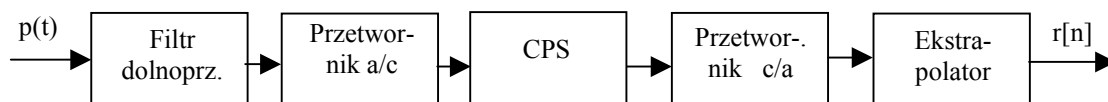
1. Dodawanie/odejmowanie: $r[n] = p_1[n] \pm p_2[n]$.
2. Mnożenie przez stałą: $r[n] = C p[n]$.
3. Opóźnianie o m próbek: $r[n] = p[n-m]$

4. Sumowanie: $r[n] = \sum_{k=0}^n p[k]$.
5. Kompresja sygnału: $r[n] = p[2n]$.
6. Odwrócenie kolejności próbek: $r[n] = p[M-n]$, M – liczba próbek $p[n]$.
7. Modulacja: $r[n] = p[n] \cos(\Omega n)$.
8. Eliminacja próbek o ujemnych wartościach: $r[n] = 0.5 (1 + \text{sign}(p[n])) p[n]$.
9. Uśrednianie: $r[n] = (p[n] + p[n-1] + p[n-2] + \dots + p[n-m+1]) / m$.
10. Rotacja dwóch sygnałów:
$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n-1] \\ x_2[n-1] \end{bmatrix}.$$
11. Różnica dyskretna: $r[n] = \Delta^1(p[n]) = p[n] - p[n-1]$.
12. Szybka transformata Fouriera (FFT): $\{P[n]\} = \text{FFT}\{p[n]\}$.
13. Splot dyskretny: $r[n] = h[n] * p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] p[n-k]$.
14. Równanie różnicowe:
$$\sum_{k=0}^N a_{n-k} r[n-k] = \sum_{k=0}^M b_{n-k} p[n-k], \quad \text{dla zadanych warunków}$$

początkowych

Niektóre z wymienionych operacji można wykonać jedynie na próbkach zapisanych w pamięci. Do wykonywania operacji dyskretyzacji sygnałów i ich przetwarzania używa się układów próbkująco-pamiętających, przetworników a/c i c/a, procesorów sygnałowych i specjalizowanych układów wykonujących wybrane operacje na sygnale – np. cyfrowe układy logiczne, kodery i konwertory, translatory, rotatory i wiele innych. Ich różnorodność dorównuje, a nawet przewyższa ilościowo układy do przetwarzania sygnałów analogowych.

Poniżej, na rys.3, pokazano schemat typowego układu stosowanego do cyfrowego przetwarzania sygnałów (CPS). Zadaniem filtra dolnoprzepustowego dołączonego do wejścia tego układu jest wyeliminowanie składowych o częstotliwościach wyższych od częstotliwości Nyquista. Ekstrapolator dołączony do jego wyjścia ma eliminować składowe wysokoczęstotliwościowe, powstałe po przejściu sygnału na postać cyfrową.



Rys. 3 Schemat blokowy układu cyfrowego przetwarzania sygnałów.

Klasyfikacja układów dyskretnych

Układem dyskretnym będziemy nazywali układ przetwarzający sygnały dyskretne. Jeżeli $p[n]$ jest dyskretnym pobudzeniem, a $r[n]$ – dyskretną reakcją, to zapiszemy $r[n] = T\{p[n]\}$, gdzie T jest operatorem reprezentującym operacje wykonywane nad zbiorem pobudzeń w celu otrzymania reakcji $r[n]$.

Układy dyskretny, podobnie jak układy analogowe, można podzielić na podane niżej klasy układów.

1. Układy liniowe, dla których operator T jest liniowy, tj. spełniający:
 - a. zasadę podobieństwa (homogeniczność): $T\{a p[n]\} = a T\{p[n]\}$, a – stała,
 - b. zasadę superpozycji (addytywność): $T\{p_1[n] + p_2[n]\} = T\{p_1[n]\} + T\{p_2[n]\}$,

tj. taki, że $T\{a_1 p_1[n] + a_2 p_2[n]\} = a_1 T\{p_1[n]\} + a_2 T\{p_2[n]\}$, a_1, a_2 – dowolne ograniczone stałe.

Układy liniowe wymagają realizacji obliczeń z nieskończoną precyzją. Rzeczywiste układy dyskretne charakteryzuje skończona dokładność obliczeń. Różnica pomiędzy dokładnymi a rzeczywistymi wynikami jest traktowana jako szum.

Układy, które nie są liniowe nazywa się nieliniowymi.

2. Układy stacjonarne (inaczej inwariantne czasowo), to takie układy, których operator T nie zależy od czasu. W tym przypadku reakcja układu na przesunięte pobudzenie jest równa $T\{p[n-m]\} = r[n-m]$. W przeciwnym razie układy nazywa się niestacjonarnymi.
3. Układy niewyprzedzające, to takie, dla których $T\{p[n] 1[n]\} = 0$ dla $n < 0$.
4. Układy przyczynowe to układy, które dla pobudzeń $p_1[n] = p_2[n]$ dla $n \leq m$, wytwarzają reakcję $T\{p_1[n]\} = T\{p_2[n]\}$ dla $n \leq m$. Reakcja układu przyczynowego może zależeć od bieżącej oraz przeszłych wartości pobudzenia a także od poprzednich wartości reakcji. W przeciwnym razie układ jest nieprzyczynowy.

Można pokazać, że układ liniowy i niewyprzedzający jest układem przyczynowym.

5. Układy dyskretne są BIBO stabilne, jeżeli dla ograniczonego pobudzenia $p[n]$ wytwarzają ograniczoną reakcję, tj. dla $|p[n]| \leq C_p < \infty$ istnieje taka stała $C_r(C_p)$, że $|r[n]| \leq C_r < \infty$. Układ, którego operator T nie posiada tej właściwości jest układem niestabilnym w sensie BIBO.
6. Układami z pamięcią nazywa się układy których $r[n]$ zależy nie tylko od bieżącej wartości pobudzenia $p[n]$, ale także poprzedzających ją wartości pobudzenia i/lub reakcji - $p[n-1]$, $r[n-1]$, ..., itd. Układy bez pamięci nazywa się także układami bezinercyjnymi.

Jeżeli układ dyskretny jest liniowy i stacjonarny (LS) oraz dla $p[n] = \delta[n]$ - $r[n] = h[n]$ to dla dowolnego pobudzenia $p[n]$ mamy:

$$r[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p[k] h[n-k] = p[n] * h[n]. \quad (7)$$

Powyższą zależność można łatwo udowodnić, wychodząc z tożsamości: $p[n] = p[n] * \delta[n]$, stąd

$$T\{p[n]\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} p[k] \delta[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p[k] T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p[k] h[n-k] = p[n] * h[n]. \quad (8)$$

Dla układów przyczynowych $h[n < 0] = 0$, więc

$$r[n] = \sum_{k=0}^n p[k] h[n-k]. \quad (9)$$

Można pokazać, że jeżeli reakcja impulsowa jest bezwzględnie sumowalna ($\sum_{n=0}^{\infty} |h[n]| < \infty$), to dyskretny układ SLS jest BIBO stabilny.

Jeżeli reakcja impulsowa $h[n] = 0$ dla $n \geq M < \infty$ to układ nosi nazwę układu o skończonej odpowiedzi impulsowej (SOI), w przeciwnym razie jest układem o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (NOI). Układy NOI nazywa się także układami reakursywnymi, a układy SOI – układami nierekursywnymi. Dla tych ostatnich:

$$r[n] = \sum_{k=0}^{M-1} p[k] h[n-k]. \quad (10)$$

Do układów SOI zalicza się filtry cyfrowe stosowane w aparaturze z cyfrową obróbką sygnałów. Większość procesorów sygnałowych posiada architekturę dostosowaną do efektywnego wykonywania obliczeń zgodnie z powyższym wzorem. Współczynniki $h[n]$ oraz próbki pobudzenia są pobierane z pamięci procesora i w tym samym cyklu mnożone i dodawane.

Układy SLS możemy realizować za pomocą mnożników, sumatorów oraz elementów opóźniających. Realizacje takie są na ogół wrażliwa na błędy obliczeniowe.

Zastosowanie przekształcenia Z do analizy układów dyskretnych

Tym, czym dla układów i sygnałów analogowych jest jednostronne przekształcenie Laplace'a, tym dla układów dyskretnych jest jednostronna transformata Z. Dla ciągu dyskretnego $f[n] = f(nT)$ jest ona zdefiniowana wzorem:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] z^{-k}. \quad (11)$$

Dla istnienia tej transformaty potrzeba, aby suma szeregu potęgowego (11) o współczynnikach równych wartościom próbek ciągu $\{f[n]\}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) była zbieżna. Z teorii szeregów potęgowych wiadomo, że szeregi te mogą być zbieżne dla pewnego r , takiego, że $|z| > r$, gdzie r – promień zbieżności, tj. dla z leżących na zewnątrz koła zbieżności. Można przy tym pokazać, że jeżeli (a) $|f[n]| < \infty$ dla skończonych n , (b) $|f[n]| < K r^n$ dla pewnych stałych $K > 0$, $r > 0$ i N oraz dla $n \geq N < \infty$, to transformata (11) jest bezwzględnie zbieżna oraz analityczna w obszarze $|z| \geq r$. Oznacza to, że wszystkie punkty osobliwe $F(z)$ leżą wewnątrz koła o promieniu r .

Uwaga

Jeżeli $r > 1$ wówczas okrąg jednostkowy $z = e^{j\Omega n}$ leży w obszarze zbieżności sumy (11). Funkcja $F(z)$ zdefiniowana na kole jednostkowym i opisana wzorem

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] e^{-j\Omega n}. \quad (12)$$

nazywa się transformatą Fouriera ciągu $f[n]$ równego 0 dla $n < 0$. Jest to oczywiście funkcja okresowa względem Ω , o okresie 2π . Dla ciągów istniejących dla $n < 0$ stosuje się dwustronną transformatę Fouriera o postaci

$$F(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\Omega n}, \quad (f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega). \quad (13)$$

a suma (13) stanowi jej rozwinięcie w szereg wykładniczy Fouriera.

Odwrotne przekształcenie Z ma postać całkową:

$$f[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz. \quad (14)$$

przy czym całkowanie przeprowadza się po zamkniętym konturze obejmującym wszystkie punkty osobliwe funkcji podcałkowej $F(z) z^{n-1}$. Dla wymiernych $F(z)$ $f[n]$ możemy wyznaczyć metodą residuów, korzystając ze wzoru:

$$f[n] = \sum_k \operatorname{res} \{F(z) z^{n-1}\}, \quad (15)$$

przy czym sumowanie rozciąga się na wszystkie punkty osobliwe funkcji $F(z) z^{n-1}$.

Przekształcenie Z posiada szereg interesujących właściwości, które można wykorzystać dla potrzeb analizy i syntezy układów dyskretnych. Ze względu na postać przekształcenia Z funkcje $f[n]$ i $f[n] 1[n]$ będą miały tą samą jednostronną transformatę Z.

Właściwości transformaty Z

Będziemy zakładali, że odpowiednie transformaty istnieją, oraz stosowali oznaczenie: $f[n] \leftrightarrow F(z)$.

1. Liniowość

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k f_k[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k F_k[z], \quad f_k[n] \leftrightarrow F_k(z)$$

2. Przesunięcie

ciągu próbek

a. do przodu

b. wstecz

$$f[n-m] \leftrightarrow z^{-m} F(z) + f[-m] + f[-m+1]z^{-1} + f[-m+2]z^{-2} + \dots + f[-1]z^{-m+1}$$

$$f[n+m] \leftrightarrow z^m F(z) - f[0]z^m - f[1]z^{m-1} - f[2]z^{m-2} - \dots - f[m-1]z^1$$

c. do przodu z

zerowaniem

pierwszych m

próbek

$$f[n-m] \mathbb{I}[n-m] \leftrightarrow z^{-m} F(z)$$

3. Mnożenie

przez funkcję

wykładniczą

$$a^n f[n] \leftrightarrow F\left(\frac{z}{a}\right), \quad a^{-n} f[n] \leftrightarrow F(az).$$

4. Mnożenie

przez n

$$n f[n] \leftrightarrow -z \frac{dF(z)}{dz}$$

5. Suma próbek

$$\sum_{k=0}^n f[k] \leftrightarrow \frac{z}{z-1} F(z)$$

6. Funkcja

periodyczna o

okresie N

$$f[n] = \sum_{k=0}^{\infty} f_1[n-kN] \leftrightarrow \frac{z^N}{z^N - 1} F_1(z), \quad f_1[n] = f[n] \mathbb{I}[n] - \mathbb{I}[n-N] \leftrightarrow F_1(z).$$

7. Splot w

dziedzinie

sekwencji

$$f[n] * g[n] = \sum_{k=0}^n f[k]g[n-k] \leftrightarrow F(z)G(z)$$

8. Wartości

próbek

$$f[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z), \quad f[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} \{zF(z) - f[0]\}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{z}{z-1} F(z) \right\},$$

9. Związek z

transformatą

Laplace'a

$$f[n] = f(nT) \leftrightarrow F(z) = L\{f(t)\delta_p(t, T)\} \Big|_{z=e^{sT}} = \sum_k \operatorname{res}_{s_k} \left\{ \frac{F(s)}{1 - z^{-1}e^{sT}} \right\}, \quad \frac{1}{F(s_k)} = 0.$$

10. Suma

funkcji

wykładniczych

$$f[n] = \sum_{i=1}^m C_i e^{s_i n T} \leftrightarrow \sum_{i=1}^m \frac{C_i z}{z - e^{s_i T}}.$$

Przykłady znajdowania transformat wybranych funkcji i zastosowania przekształcenia Z

1. Delta Kroneckera: $\delta[n] \leftrightarrow 1$ (bezpośrednio z definicji), $\delta[n-k] \leftrightarrow z^{-k}$.

2. Dyskretny skok jednostkowy: $\mathbb{I}[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$, $\mathbb{I}[n-m] \leftrightarrow \frac{z^{-(m-1)}}{z-1}$.

3. Funkcja liniowa: $f[n] = n$: $n = n \mathbb{I}[n] \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z}{z-1} \right\} = -z \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$.

4. Funkcja $f[n] = n^2$: $n^2 \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z}{(z-1)^2} \right\} = -z \frac{(z-1)^2 - 2z(z-1)}{(z-1)^4} = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$.

5. Funkcja $f[n] = n(n-1) = n^2 - n \leftrightarrow \frac{2z}{(z-1)^3}$.

6. Funkcja wykładnicza: $f[n] = a^n = a^n 1[n] \leftrightarrow \frac{z/a}{z/a-1} = \frac{z}{z-a}$.

7. Funkcja eksponencjalna: $f[n] = e^{bn} = (e^b)^n \leftrightarrow \frac{z}{z-e^b}$.

8. Funkcja: $na^{n-1} = \frac{1}{a} na^n \leftrightarrow \frac{1}{a} (-z \frac{d}{dz} \frac{z}{z-a}) = \frac{z}{(z-a)^2}$.

9. Zespolony wersor $e^{j\Omega n}: (e^{j\Omega})^n \leftrightarrow \frac{z}{z-e^{j\Omega}}$.

10. Funkcja $f[n] = \cos(\Omega n)$:

$$\cos(\Omega n) = \frac{1}{2} (e^{j\Omega n} - e^{-j\Omega n}) \leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z-e^{j\Omega}} + \frac{z}{z-e^{-j\Omega}} \right) = \frac{z(z-2\cos(\Omega))}{z^2 - 2z\cos(\Omega) + 1}.$$

11. $f[n] = \sin(\Omega n): \sin(\Omega n) = \frac{1}{2j} (e^{j\Omega n} - e^{-j\Omega n}) \leftrightarrow \frac{z \sin(\Omega)}{z^2 - 2z\cos(\Omega) + 1}$.

12. $e^{-cn} \sin(n\Omega): Z\{e^{-cn} \sin(n\Omega)\} = Z\{\sin(n\Omega)\} \Big|_{z:=ze^c} = \frac{ze^{-c} \sin(\Omega)}{z^2 - 2ze^{-c} \cos(\Omega) + e^{-2c}}$.

13. $2|A_k||z_k|^n \cos[n \arg(z_k) + \arg(A)] \leftrightarrow \frac{A_k z}{z-z_k} + \frac{A_k^* z}{z-z_k^*}$.

14. Rozwiązanie rekurencyjnego równania różnicowego:

$$\sum_{k=0}^N a_k r[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k p[n-k] \quad (16)$$

Rozwiązanie tego równania w dziedzinie sekwencji: $r[n] = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_n} r[n-k] + \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_n} p[n-k]$,

natomiast po zastosowaniu przekształcenia Z otrzymujemy:

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right) R(z) + W_r(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) P(z) + W_p(z),$$

zatem:

$$R(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} P(z) + \frac{W_x(z) - W_y(z)}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = H(z)P(z) + \frac{W(z)}{M(z)}, \quad (17)$$

gdzie $W(z) = W_p(z) - W_r(z)$, $R(z)$ i $P(z)$ – transformaty Z $r[n]$ i $p[n]$, $M(z)$ – wielomian charakterystyczny równania różnicowego, $H(z)$ – transmitancja układu dyskretnego, opisanego równaniem (16), $W_p(z)$ i $W_r(z)$ – składowe rozwiązania, zależne od warunków początkowych $r[n]$ i $p[n]$.

Wzór (17) zawiera dwie składowe:

1. $H(z)P(z)$ – składowa pochodząca od zewnętrznego pobudzenia $P(z) \leftrightarrow p[n]$,
2. $\frac{W(z)}{M(z)}$ – składowa związana z warunkami początkowymi, które pełnią rolę wewnętrznych źródeł tej składowej reakcji.

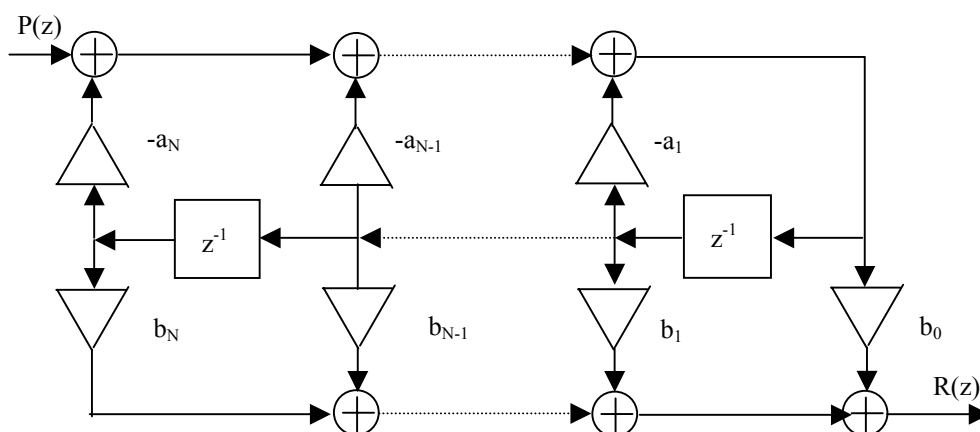
Funkcja transmitancji układu dyskretnego SLS jest związana z pierwszą z wymienionych składowych i wyraża się wzorem:

$$H(z) = \frac{R(z)}{P(z)} \Big|_{W(z)=0} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}, \quad (18)$$

Wielomian mianownika $H(z)$ jest wielomianem charakterystycznym równania (16) i występuje także w mianowniku wyrażeniu na składową wywołaną przez wewnętrzne źródła reakcji układu. Dla pobudzenia $\delta[n]=1$: $R(z) = H(z) \cdot 1 \leftrightarrow h[n]$.

Przykład realizacji układu o transmitancji:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (19)$$



Rys. 4 Realizacja transmitancji (16) rekursywnego układu dyskretnego.

Niektóre operacje numeryczne, jak np. metody całkowania numerycznego, można opisać za pomocą równań różnicowych, a w szczególności dla:

(1) metody prostokątów:

$$y[n] = T\{x(T) + x(2T) + \dots + x(nT)\} = y[n-1] + Tx(nT),$$

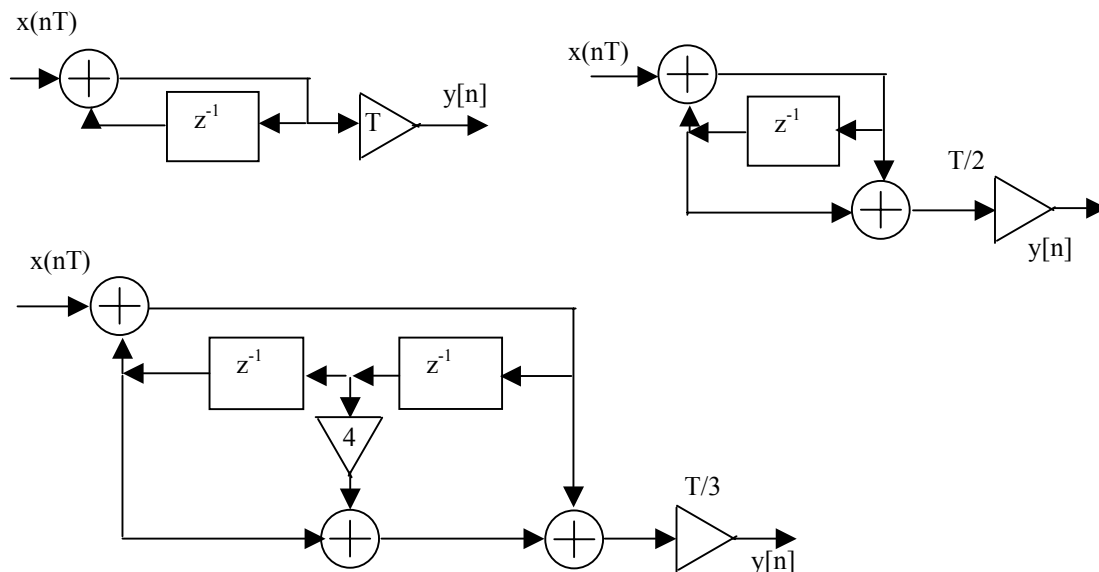
(2) metody trapezów:

$$y[n] = \frac{T}{2} \{x(0) + 2x(T) + \dots + 2x(nT-T) + x(nT)\},$$

(3) metody Simpsona (stosowanej dla parzystej liczby próbek):

$$y[n] = \frac{T}{3} \{x(0) + 4[x(T) + x(3T) + \dots + x(nT-T)] + 2[x(2T) + x(4T) + \dots + x(nT-2T)] + x(nT)\},$$

przy założeniu, że $y[0]=0$, i zrealizować w układzie filtrów cyfrowych, jak na rys. 5.



Rys. 5 Wybrane realizacje dyskretnie całkowania numerycznego.

Metoda Simpsona może być przedstawiona jako realizacja równania różnicowego:

$$y[n] - y[n-2] = \frac{T}{3} (x[n] + 4x[n-1] + x[n-2]) .$$

Przy zerowych warunkach początkowych równanie to można postać zapisać w postaci:

$$(1 - z^{-2}) R(z) = \frac{T}{3} (1 + 4z^{-1} + z^{-2}) P(z)$$

stąd funkcja transmitancji układu całkującego tą metodą ma postać:

$$H(z) = \frac{T}{3} \frac{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}} = \frac{T}{3} \frac{z^2 + 4z + 1}{z^2 - 1} .$$

Jak wszystkie układy całkujące nie jest to układ BIBO stabilny, ponieważ dla ograniczonego pobudzenia, takiego jak $1[n]$, reakcja układu narasta nieograniczenie.

Wyznaczanie transformaty odwrotnej

Odwrotna transformata Z może być wyznaczona ze wzoru (13)

$$f[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz. \quad (20)$$

w którym całkowanie przeprowadza się po zamkniętym konturze obejmującym wszystkie punkty osobliwe funkcji podcałkowej $F(z) z^{n-1}$. Dla wymiernych rzeczywistych funkcji $F(z)$ oryginał $f[n]$ możemy wyznaczyć metodą residuów, korzystając ze wzoru (21):

$$f[n] = \sum_k \operatorname{res}_{z_k} \{F(z) z^{n-1}\}, \quad (21)$$

gdzie dla bieguna w z_k o krotności n_k :

$$\operatorname{res}_{z_k} \{F(z) z^{n-1}\} = \lim_{z \rightarrow z_k} \left[\frac{1}{(n_k - 1)!} \frac{d^{n_k-1}}{dz^{n_k-1}} (z - z_k)^{n_k} F(z) \right]. \quad (22)$$

Jeżeli $H(z)$ jest posiada pojedyncze bieguny, można skorzystać z rozkładu na ułamki proste o postaci:

$$\frac{F(z)}{z} = \sum_k \frac{A_k}{z - z_k}, \quad (23)$$

wówczas korzystając z tego, że

$$\frac{A_k z}{z - z_k} \leftrightarrow A_k (z_k)^n 1[n] \quad (24)$$

możemy zapisać

$$f[n] = \sum_k A_k (z_k)^n 1[n]. \quad (25)$$

Przykład 1

Niech $F(z) = \frac{z^2}{(z+0.8)(z-0.5)}$. Szukamy rozkładu o postaci:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z}{(z+0.8)(z-0.5)} = \frac{A}{z+0.8} + \frac{B}{z-0.5}.$$

Znajdujemy współczynniki: $A = \frac{z}{z-0.5} \Big|_{z=-0.8} = \frac{8}{13}$, $B = \frac{z}{z+0.8} \Big|_{z=0.5} = \frac{5}{13}$, a następnie,

korzystając ze wzorów (24) i (25) oryginał: $f[n] = \frac{8}{13}(-0.8)^n + \frac{5}{13}(0.5)^n$, $n \geq 0$. Ten sam wynik otrzymamy po zastosowaniu metody residuów.

Z definicji transformaty $F(z) = Z\{f[n]\}$ wynika, że funkcja $F(z)$ rozwinięta w szereg o ujemnych całkowitych potęgach z ma jako współczynniki wartości próbek $\{f[0], f[1], \dots, f[n], \dots\}$. Wpływa stąd wniosek, że wartości kolejnych próbek $f[n]$ możemy otrzymać dzieląc wielomian licznika przez wielomian mianownika tej funkcji, jeśli zapiszemy obydwa wielomiany odpowiednio w kolejności malejących ujemnych potęg zmiennej z . Ten sposób nie pozwala jednak na znalezienie ogólnej formuły dla $f[n]$.

Przy wyznaczaniu oryginału można też wykorzystać znajomość transformaty Laplace'a funkcji $f(t)$ takiej, że $f[n] = f(nT)$, gdzie T – okres próbkowania. Na podstawie właściwości (9) zachodzi bowiem związek:

$$f[n] = f(nT) \leftrightarrow F(z) = L\{f(t)\delta_p(t, T)\} \Big|_{z=e^{sT}} = \sum_k \operatorname{res}_{s_k} \left\{ \frac{F(s)}{1 - z^{-1}e^{sT}} \right\}. \quad (26)$$

Rozważmy dla przykładu $f[n] = \sin(n\omega T)$. Funkcja $f(t)$ i jej transformata ma w tym przypadku

postać: $f(t) = \sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$. Funkcję $f[n]$ możemy wyznaczyć ze wzoru:

$$\begin{aligned} f[n] &= \sum_k \operatorname{res}_{s_k} \left\{ \frac{\omega}{(1 - z^{-1}e^{sT})(s + j\omega)(s - j\omega)} \right\} = \frac{\omega}{(1 - z^{-1}e^{sT})(s - j\omega)} \Big|_{s=-j\omega} + \\ &+ \frac{\omega}{(1 - z^{-1}e^{sT})(s + j\omega)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{-1}{(1 - z^{-1}e^{-j\omega T})(2j)} + \frac{1}{(1 - z^{-1}e^{j\omega T})(2j)} = \\ &= \frac{z \sin(\Omega)}{z^2 - 2z \cos(\Omega) + 1}, \quad \Omega = \omega T. \end{aligned}$$

Analiza sygnałów dyskretnych w dziedzinie częstotliwości

Dyskretny szereg Fouriera (DSF)

Periodyczny sygnał dyskretny może być przedstawiony w postaci szeregu Fouriera, podobnie jak jego ciągły odpowiednik. Niech $f[n, N]$ będzie sygnałem periodycznym o

okresie N , oraz niech $\Omega = 2\pi/N$ będzie dyskretną pulsacją podstawową $f[n, N]$. Wtedy współczynnik określający „zawartość” składowej o pulsacji $k\Omega$ w widmie $f[n, N]$ można określić ze wzoru:

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j\Omega kn}, \quad (27)$$

dla $k=0, 1, 2, \dots, N-1$. Znając zawartość N składowych występujących w widmie $f[n, N]$ możemy dokonać syntezy tego przebiegu korzystając z równania:

$$f[n, N] = \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{j\Omega kn}. \quad (28)$$

Przebieg okresowy zawierający N próbek w okresie ma zatem co najwyżej N składowych w swoim widmie. Jest to istotna różnica, w porównaniu z widmem przebiegów analogowych, które, niezależnie od okresu, mogą zawierać nieskończenie wiele składowych.

Zbadajmy widmo przebiegu periodycznego:

$$f[n] = 1 + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Przebieg ten zawiera składową stałą, równą 1 i składowe sinusoidalnie zmienne o okresie wynoszącym odpowiednio 8 i 4. Stąd okres periodyczności $f[n]$ jest równy $N = 8$. Dla $n = 0, 1, 2, \dots, 7$ kolejne próbki wynoszą odpowiednio:

$$f[0] = 2; f[1] = 1.7071; f[2] = 1; f[3] = 1.7071; f[4] = 2; f[5] = 0.2929; f[6] = -1; f[7] = 0.2929.$$

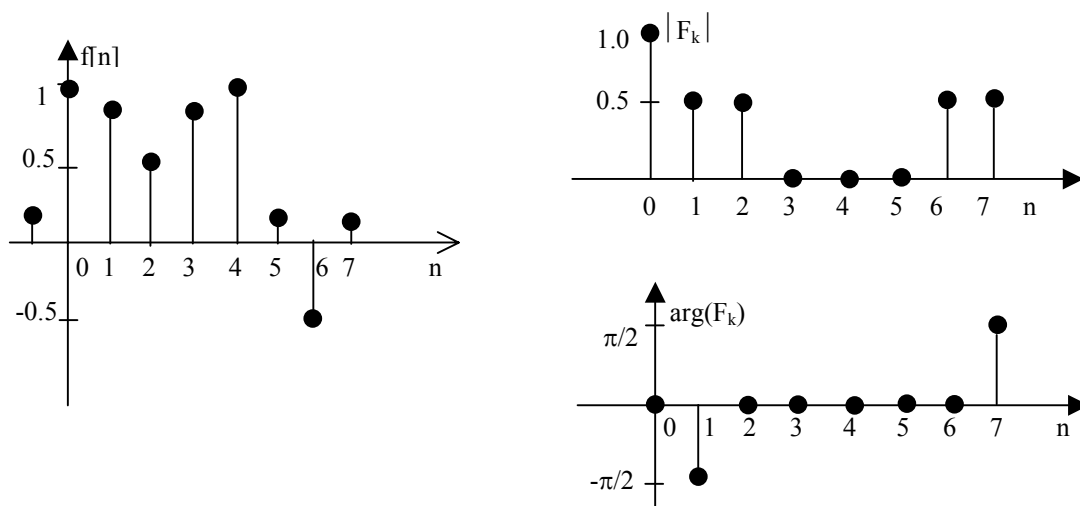
Podstawiając te wartości do wzoru () otrzymujemy:

$$F_0 = 1; \quad F_1 = -j0.5; \quad F_2 = 0.5; \quad F_3 = 0; \quad F_4 = 0; \quad F_5 = 0; \quad F_6 = 0.5; \quad F_7 = j0.5;$$

dlatego możemy zapisać:

$$f[n] = 1 - j0.5e^{j\frac{\pi}{4}n} + 0.5e^{j\frac{\pi}{2}n} + 0.5e^{-j\frac{\pi}{2}n} + j0.5e^{-j\frac{\pi}{4}n}.$$

Poniżej, na rys. 6 pokazano przebieg $f[n]$ oraz jego widmo amplitudowe i fazowe.



Rys. 6 Dyskretny przebieg periodyczny i jego widmo

Dla periodycznego przebiegu $\delta[n, N]$ opisanego wzorem:

$$\delta[n, N] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN], \quad (29)$$

mamy $F_k = 1/N$. Ten szczególny dyskretny przebieg periodyczny można zapisać w postaci:

$$\delta[n, N] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\Omega n k} \quad (30)$$

gdzie $\Omega = 2\pi/N$.

Dla dyskretnych przebiegów periodycznych definiuje się wielkość określającą średnią energię przypadającą na próbkę. Odpowiednia zależność, zwana twierdzeniem Parsewala dla tych przebiegów postać ma:

$$W / N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |F_n|^2 \quad (31)$$

W przypadku funkcji $\delta[n, N]$: $W/N = 1/N$.

Wybrane właściwości DSF

1. Liniowość: $a f[n, N] + b g[n, N] \leftrightarrow a F_k + b G_k$
2. Przesunięcie: $f[n-m, N] \leftrightarrow F_k e^{-j\Omega k m}$
3. Różnica: $\Delta[n, N] = f[n, N] - f[n-1, N] \leftrightarrow F_k \{1 - e^{-j\Omega k}\}$
4. Suma przebiegu o zerowej składowej stałej: $\sum_{k=-\infty}^n f[k] \leftrightarrow \frac{F_k}{1 - e^{-j\Omega k}}, k \neq 0$
5. Splot kołowy: $\sum_{k=0}^{N-1} f[k, N] g[n-k, N] \leftrightarrow N F_k G_k$
6. Iloczyn $f[n, N] g[n, N] \leftrightarrow \sum_{m=0}^{N-1} F_m G_{k-m}$

Transformata Fouriera dyskretnego przebiegu nieokresowego

Dyskretne przebiegi impulsowe można traktować jako przebiegi okresowe o okresie $N \rightarrow \infty$. Dla opisu właściwości częstotliwościowych takich sygnałów wykorzystuje się podaną niżej postać przekształcenia Fouriera:

przekształcenie
proste

$$F(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\Omega n} \quad (32)$$

i odwrotne

$$f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} F(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \quad (33)$$

Podobnie jak dla sygnałów analogowych, widmo przebiegów dyskretnych jest ciągłą funkcją pulsacji (częstotliwości). Odróżnia obydwie te widma periodyczność funkcji widmowej $F(j\Omega)$ przebiegów dyskretnych. Jak można pokazać: $F(j\Omega) = F[j(\Omega + 2\pi)]$. Jest to konsekwencją próbkowania sygnałów oraz wynika z tego, że $e^{-j\Omega n} = e^{-j(\Omega + 2\pi)n}$.

Przykład

Niech $f[n] = \delta[n]$. Transformata Fouriera tego pojedynczego, jednostkowego impulsu jest dana wzorem:

$$\Delta(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\Omega n} = 1 \quad (34)$$

Wybrane właściwości transformaty Fouriera

1. Liniowość: $a f[n] + b g[n] \leftrightarrow a F(j\Omega) + b G(j\Omega)$
2. Przesunięcie: $f[n-m] \leftrightarrow F(j\Omega) e^{-j\Omega m}$

3. Funkcja „przyczynowa” $f[n]=f[n]1[n] \leftrightarrow F(z=e^{j\Omega})$

4. Splot dyskretny: $f[n]*g[n] \leftrightarrow F(j\Omega)G(j\Omega)$

Tą ostatnią właściwość można wykorzystać do opisu w dziedzinie pulsacji układów transmitancyjnych SLS. Wykorzystując znany związek: $r[n]=p[n]*h[n]$, możemy zapisać:

$$R(j\Omega) = H(j\Omega) P(j\Omega) = |H(j\Omega)| |P(j\Omega)| e^{j[\arg(H(j\Omega)) + \arg(P(j\Omega))]} \quad (35)$$

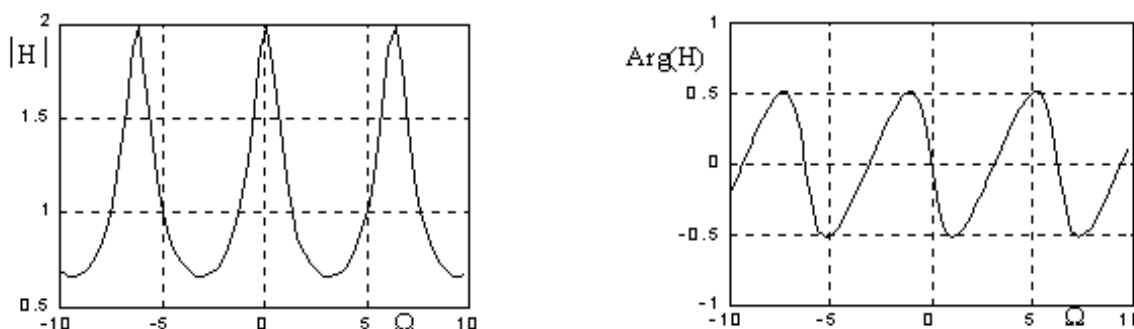
gdzie $H(j\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} = H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}}$ transmitancja widmowa dyskretnego układu przyczynowego SLS.

Przykład

Układ SLS opisany jest przez równanie różnicowe: $r[n] - 0.5 r[n-1] = p[n]$ –Zapisując to równanie za pomocą transformat Z $r[n]$ i $p[n]$ w postaci: $(1-0.5z^{-1}) R(z) = P(z)$ znajdujemy transmitancję: $H(z) = (1 - 0.5z^{-1})^{-1}$. Reakcja impulsowa tego rekursywnego układu: $h[n] = (0.5)^n 1[n]$, natomiast widmowa funkcja transmitancji:

$$H(j\Omega) = H(z=e^{j\Omega}) = (1 - 0.5 e^{-j\Omega})^{-1}.$$

Poniżej na rys. 7 pokazano przebieg charakterystyki amplitudowej i fazowej $H(j\Omega)$.



Rys. 7 Charakterystyka amplitudowa i fazowa układu o transmitancji (26).

Analizowany układ opisany jest przez równanie różnicowe o rzeczywistych współczynnikach, jego charakterystyka amplitudowa jest funkcją parzystą i okresową pulsacji Ω , a charakterystyka fazowa – funkcją nieparzystą i okresową Ω (okres równy 2π). Z tego też powodu wystarczy podać przebieg obydwu tych charakterystyk dla przedziału $\Omega \in [0, \pi]$, lub w dziedzinie pulsacji $\omega \in [0, \omega_N]$, gdzie ω_N – pulsacja Nyquista, równa π/T (T – okres próbkowania).

Dyskretna transformata Fouriera

W odróżnieniu od transformaty Fouriera dyskretniej funkcji czasu transformata ta jest zdefiniowana dla ciągów próbek o skończonej długości: $f[0], f[1], \dots, f[N-1]$. Dla takiego ciągu transformata Fouriera

$$F(j\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j\Omega n}, \quad (36)$$

jest periodyczną i ciągłą funkcją Ω , z okresem 2π . Funkcja ta spróbkowana z krokiem $2\pi/N$ dla $\Omega \in [0, 2\pi]$ przyjmuje wartości:

$$F(j\frac{2\pi}{N}k) = F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] W^{kn}, \quad (37)$$

gdzie $W = e^{-j2\pi/N}$, $k=0, 1, 2, \dots, N-1$. Dysponując zbiorem N wartości próbek $F(j\Omega)$ możemy wyznaczyć $f[n]$:

$$\begin{aligned} f[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(j\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega \approx \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} F(j\frac{2\pi}{N}k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \frac{2\pi}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] W^{nk}. \end{aligned} \quad (38)$$

Para równań:

$$\begin{aligned} F[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] W^{kn}, \\ f[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F[k] W^{nk}, \end{aligned}$$

określa postać prostego i odwrotnego dyskretnego przekształcenia Fouriera. Zauważmy, że do powyższych zależności można dojść traktując $f[n]$ jako zbiór pierwszych N próbek przebiegu periodycznego o okresie periodyczności równym N . Wystarczy we wzorach (27), (28) przyjąć: $F[k] = N F_k$