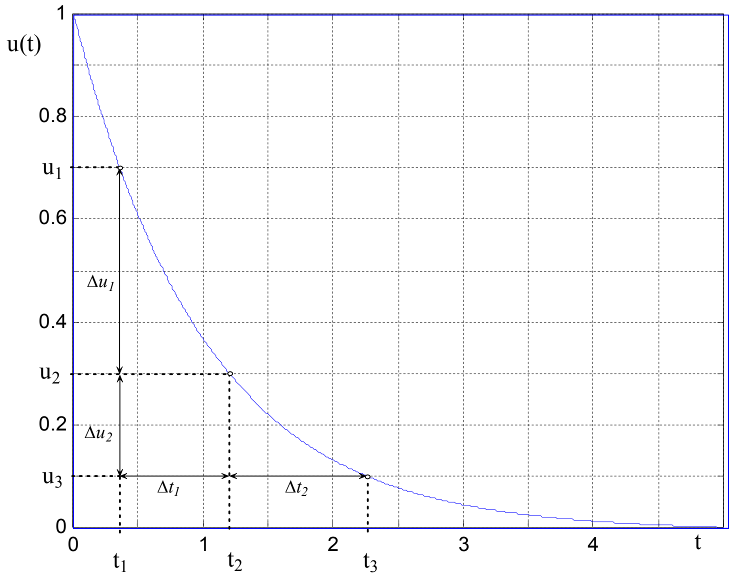
Wyznaczanie wykładnika funkcji eksponencjalnej



Dana jest krzywa opisana zależnością $u(t) = Ke^{-at}$. Podczas pomiarów za pomocą oscyloskopu występują błędy związane z przesunięciem punktu (0, 0). Obserwowaną krzywą można zapisać ogólnie

$$u(t) = u_0 + Ke^{-a(t+t_0)},$$

gdzie u_0, t_0 – stałe określające przesunięcie w pionie i poziomie.

Trzy dowolne punkty na krzywej eksponencjalnej określone są zależnościami:

$$u_1 = u(t_1) = u_0 + Ke^{-a(t_1+t_0)},$$
$$u_2 = u(t_2) = u_0 + Ke^{-a(t_2+t_0)},$$
$$u_3 = u(t_3) = u_0 + Ke^{-a(t_3+t_0)}.$$

Oznaczając

$$\Delta u_1 = u_1 - u_2, \quad \Delta u_2 = u_2 - u_3 \text{ oraz } \Delta t_1 = t_2 - t_1, \quad \Delta t_2 = t_3 - t_2$$

uzyskuje się

$$\frac{\Delta u_1}{\Delta u_2} = \frac{u_1 - u_2}{u_2 - u_3} = \frac{Ke^{-a(t_1+t_0)} - Ke^{-a(t_2+t_0)}}{Ke^{-a(t_2+t_0)} - Ke^{-a(t_3+t_0)}} = \frac{e^{-at_1} - e^{-at_2}}{e^{-at_2} - e^{-at_3}} = \frac{e^{-at_2}\left(e^{a(t_2-t_1)} - 1\right)}{e^{-at_2}\left(1 - e^{-a(t_3-t_2)}\right)} = \frac{e^{a\Delta t_1} - 1}{1 - e^{-a\Delta t_2}}.$$

Równanie to można łatwo rozwiązać tylko przy założeniu, że

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t.$$

Wówczas

$$\frac{\Delta u_1}{\Delta u_2} = \frac{e^{a\Delta t} - 1}{1 - e^{-a\Delta t}} = \frac{e^{a\Delta t}\left(1 - e^{-a\Delta t}\right)}{1 - e^{-a\Delta t}} = e^{a\Delta t}$$

i wykładnik a wyznacza się z zależności

$$a = \frac{1}{\Delta t}\ln\left(\frac{\Delta u_1}{\Delta u_2}\right).$$