Metoda symboliczna

Zad. 1.1

Znaleźć zespolone wartości skuteczne następujących prądów i napięć:

a) $u(t) = 12\sqrt{2}\sin\left(150t - \frac{7}{12}\pi\right)\mathrm{V}$, b) $i(t) = 5\sqrt{2}\cos\left(35t + \frac{3}{4}\pi\right)A$,

c) $u(t) = 10\sin\left(100t + \frac{2}{3}\pi\right) + 20\cos\left(100t - \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{V}$,

d) $i(t) = 5\sin\left(2t - \frac{1}{3}\pi\right) - 4\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{A}$.

Wynik:

a) $\underline{U} = 12e^{-\mathrm{j}\frac{7}{12}\pi}V$, $\omega = 150\,\mathrm{rad/s}$, b) $\underline{I} = 5e^{\mathrm{j}\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi\right)} = 5e^{\mathrm{j}\frac{5}{4}\pi} = 5e^{-\mathrm{j}\frac{3}{4}\pi}\mathrm{A}$, $\omega = 35\,\mathrm{rad/s}$

c) $u(t) = 29.85\sin\left(100\mathrm{t}+0.070617\,\mathrm{rad}\right)\mathrm{V}$, d) $i(t) = 8{,}924\sin(2t - 0{,}931\,\mathrm{rad})\,\mathrm{A}$

Rozwiązanie d:

Wyznaczamy wartości skuteczne składowych napięcia

$$5\sin\left(2t - \frac{1}{3}\pi\right) \leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{2}}e^{-\mathrm{j}\frac{1}{3}\pi},$$

$$4\cos\left(2t + \frac{1}{4}\pi\right) \leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{j}\frac{3}{4}\pi}.$$

Wykonujemy działanie:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(5e^{-j\frac{1}{3}\pi} - 4e^{j\frac{3}{4}\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{5}{2}\left(1 - \sqrt{3}j\right) - 2\sqrt{2}\left(-1 + j\right)\right) = 5{,}328 - 7{,}159j = \frac{1}{\sqrt{2}}8{,}924\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0{,}931\mathrm{rad}},$$

następnie przedstawiamy wynik w postaci funkcji czasu, tzn.

$$i(t) = 8{,}924\sin(2t - 0{,}931\ \mathrm{rad})\,A.$$

Mając do dyspozycji kalkulator np. CITIZEN SR-135, który ma dwa rejestry a i b oraz tryb pracy CPLX, powyższe działania można wykonać następująco (włączamy CPLX i upewniamy się czy jest włączony tryb pracy deg):

1. $5 \Rightarrow a,$
2. $-60 \Rightarrow b,$
3. $P \to R,$
4. $-$
5. $4 \Rightarrow a,$
6. $135 \Rightarrow b$
7. $P \to R$
8. $=$
9. $R \to P$

Po wykonaniu działań od 1 do 9 na wyświetlaczu powinniśmy otrzymać 8,923958373, naciskając b otrzymujemy: -53,33806606.

Natomiast wykorzystując kalkulator firmy CASIO (np. fx-570MS) powyższe działania można wykonać następująco (włączony mode: CMPLX i tryb pracy D): $5 < -60 - 4 < 135 > r < \theta$. Po naciśnięciu znaku = otrzymujemy: 8.923958373, naciskając SHIFT i = otrzymujemy na wyświetlaczu -53.33806606.

Zad. 1.2

Przedstawić jako funkcję czasu następujące prądy i napięcia:

a) $\underline{U}_1 = (-1-\mathrm{j})V,\ \omega = 120\,\text{rad/s}$, b) $\underline{I}_2 = 10\,j\,A,\ \omega = 300\,\text{rad/s}$,

c) $\underline{U}_3 = (8e^{-\mathrm{j}\frac{2}{3}\pi} + 4e^{\mathrm{j}\frac{1}{3}\pi})V,\ \omega = 240\,\text{rad/s}$, d) $\underline{I}_4 = (-2+\mathrm{j}4)A,\ \omega = \pi/2$.

Wynik:

a) $u_1(t) = 2\sin\left(120t - \dfrac{3}{4}\pi\right)V$ b) $i_2(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(300t + \dfrac{\pi}{2}\right)A$,

c) $u_3(t) = 4\sqrt{2}\sin\left(240t - \dfrac{2}{3}\pi\right)V$ c) $i_4(t) = 2\sqrt{10}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t + 2{,}034\text{rad}\right)$.

Zad. 1.3

Do węzła dopływają trzy prądy $\underline{I}_1,\ \underline{I}_2,\ \underline{I}_3$. Znane są moduły (wartości skuteczne) tych prądów oraz wiadomo, że faza początkowa prądu $\underline{I}_1$ jest równa φ_1. Obliczyć fazy początkowe φ_2 i φ_3. Narysować wykres wskazowy.

$I_1 = |\underline{I}_1| = 5\,A,\ I_2 = |\underline{I}_2| = 3{,}5\,A,\ I_3 = |\underline{I}_3| = 7{,}5\,A,\ \varphi_1 = 30^0$.

Rozwiązanie:

Z I prawa Kirchhoffa wynika, że $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$. Równość ta będzie spełniona, jeśli odpowiednio część rzeczywista i urojona będzie równa zero, tzn.

$$1^0.\quad I_1\cos(\varphi_1) + I_2\cos(\varphi_2) + I_3\cos(\varphi_3) = 0,$$

$$2^0.\quad I_1\sin(\varphi_1) + I_2\sin(\varphi_2) + I_3\sin(\varphi_3) = 0.$$

Aby rozwiązać powyższy układ równań należy zrobić następujące przekształcenia:

$$\left.\begin{aligned} 1^0.\quad & I_1\cos(\varphi_1) + I_2\cos(\varphi_2) = -I_3\cos(\varphi_3) \\ 2^0.\quad & I_1\sin(\varphi_1) + I_2\sin(\varphi_2) = -I_3\sin(\varphi_3) \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\left(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\right) = I_3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad A.\quad I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = I_3^2$$

oraz

$$\left.\begin{aligned} 1^0.\quad & I_1\cos(\varphi_1) + I_3\cos(\varphi_3) = -I_2\cos(\varphi_2) \\ 2^0.\quad & I_1\sin(\varphi_1) + I_3\sin(\varphi_3) = -I_2\sin(\varphi_2) \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad I_1^2 + I_3^2 + 2I_1I_3\left(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_3) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_3)\right) = I_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad B.\quad I_1^2 + I_3^2 + 2I_1I_3\cos(\varphi_1 - \varphi_3) = I_2^2.$$

Z A i B otrzymujemy

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{I_3^2 - I_1^2 - I_2^2}{2I_1I_2} = 0.5428571430,$$

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_3) = \frac{I_2^2 - I_1^2 - I_2^2}{2I_1I_2} = \text{-}0.9200000000.$$

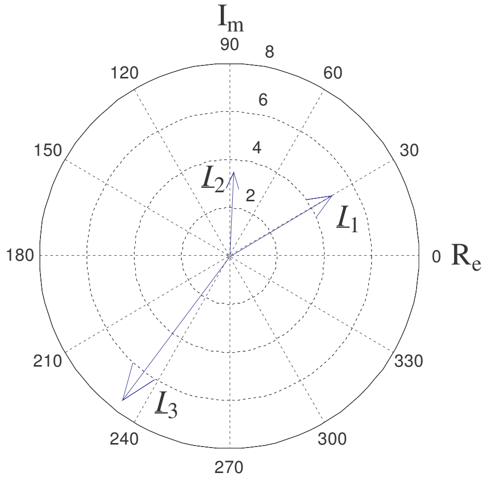
Zatem

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm 57.12165^0, \qquad \varphi_1 - \varphi_3 = 156.92608^0.$$

Są więc dwa różne rozwiązania:

1) $\varphi_2 = 87.12165^0$, $\varphi_3 = \text{-}126.92608^0$, 2) $\varphi_2 = \text{-}27.12165^0$, $\varphi_3 = \text{-}173.07392^0$.

Wykres wskazowy wykonany za pomocą Matlaba (instrukcja `compass`) dla pierwszego rozwiązania przedstawiono poniżej (rys.1.3).



Rys. 1.3

Zad. 1.4

Zadany jest przebieg sinusoidalny symbolicznie

$$f(t) \leftrightarrow 10 - \mathrm{j}20, \ \ \omega = 2.$$

Zapisać postać symboliczną pochodnej i całki tego przebiegu.

Rozwiązanie:

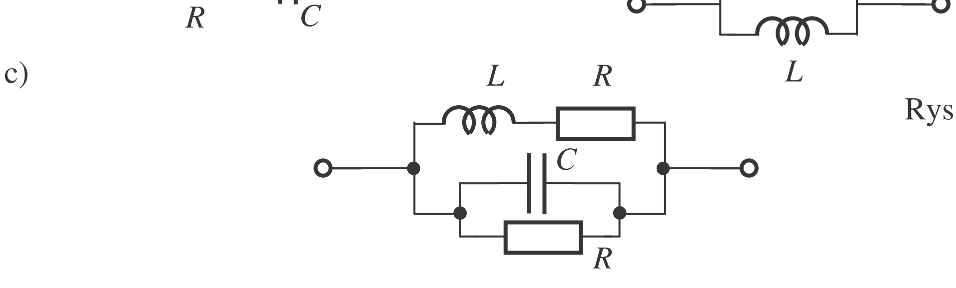
$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow \mathrm{j}2(10 - \mathrm{j}20) = 40 + \mathrm{j}20,$$

$$\int f(t)\mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{10 - \mathrm{j}20}{\mathrm{j}2} = -10 - \mathrm{j}5.$$

Zad. 1.5.

Obliczyć impedancję i admitancję dwójników z rys.1.5 dla częstotliwości f. Wynik przedstawić w postaci algebraicznej i wykładniczej.

$R = 50\,\Omega$, $C = 5\mu\mathrm{F}$, $L = 10\,\mathrm{mH}$, $f = 2\,\mathrm{kHz}$.



Rys. 1.5

Wynik (tylko postać algebraiczna)**:**

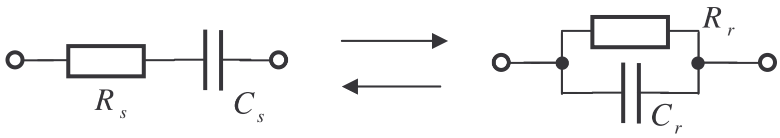
a) $\underline{Z} = R - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C} = \left(50 - \mathrm{j}\dfrac{5}{\pi}\right)\Omega,\ \underline{Y} = \dfrac{1}{\underline{Z}} = (19{,}98 + 0{,}6360\mathrm{j})\,\mathrm{mS}$**,**

b) $\underline{Y} = \dfrac{1}{R} - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega L} = (20 - \mathrm{j}7{,}958)\,\mathrm{mS},\quad \underline{Z} = \dfrac{1}{\underline{Y}} = (43{,}17 + \mathrm{j}17{,}18)\,\Omega,$

c) $\underline{Y} = \dfrac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C + \dfrac{1}{R + j\omega L} = (22{,}73 + 621{,}4\mathrm{j})\,\mathrm{mS},\ \underline{Z} = (0.0588\ \text{-}\ 1.607\mathrm{j})\,\Omega.$

Zad. 1.6

Dane są wartości: R_s i C_s (R_r i C_r) oraz częstotliwość f sygnału sinusoidalnego. Wyznaczyć wartość rezystancji R_r (R_s) i pojemności C_r (C_s) odpowiedniego dwójnika równoważnego.



Wynik:

$$R_r = \frac{4\pi^2 R_s^2 C_s^2 f^2 + 1}{4\pi^2 R_s C_s^2 f^2},\ C_r = \frac{C_s}{4\pi^2 R_s^2 C_s^2 f^2 + 1};\ \left(R_s = \frac{R_r}{4\pi^2 R_r^2 C_r^2 f^2 + 1},\ C_s = \frac{4\pi^2 R_r^2 C_r^2 f^2 + 1}{4\pi^2 R_r^2 C_r f^2}\right).$$

Zad. 1.6

Dwójnik pasywny zasilany jest napięciem sinusoidalnym $u(t)$. Przebieg wartości chwilowych prądu dwójnika jest $i(t)$. Wyznaczyć impedancję i admitancję, impedancję zespoloną i admitancję zespoloną oraz rezystancję, reaktancję, konduktancję i susceptancję dwójnika, a także kąt przesunięcia fazowego pomiędzy prądem i napięciem.

a) $u(t) = 220\sqrt{2}\sin 314t\ \mathrm{V}$; $\quad i(t) = 10\cos 314t\ \mathrm{A}$,

b) $u(t) = 100\cos(628t - 2{,}618)\ \mathrm{V}$; $\quad i(t) = 10\sin(628t - 0{,}5236)\ \mathrm{A}$,

c) $u_{(t)} = 100\sqrt{2}\cos(1000t + 3{,}142)\ \mathrm{V}$; $\quad i(t) = 10\sqrt{2}\sin(628t - \dfrac{\pi}{5})\ \mathrm{A}$.

Wynik: a) $Z = X = 22\sqrt{2} \cong 31{,}11\ \Omega$, $Y \cong 0{,}032\ \mathrm{S}$, $\underline{Z} = -j22\sqrt{2}\ \Omega$, $\underline{Y} \cong 0{,}032 e^{j\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{S}$, $R = 0\ \Omega$, $G = 0\ S$, $B \cong 0{,}032\ S$, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ rad ; b) $Z = 10\ \Omega$, $Y = 0{,}1\ \mathrm{S}$, $\underline{Z} = 10 e^{-j\frac{\pi}{6}}\ \Omega$, $\underline{Y} = 0{,}1 e^{j\frac{\pi}{6}}\ \mathrm{S}$, $R = 5\sqrt{3} \cong 8{,}66\ \Omega$, $X = 5\ \Omega$, $G \cong 0{,}087\ S$, $B = 0{,}05\ S$, $\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$ rad ; c) brak rozwiązania - przebiegi mają różną pulsację (nie są synchroniczne).

Zad. 1.7

Dwójnik o impedancji zespolonej $\underline{Z}$ zasilany jest prądem sinusoidalnym $i(t)$. Wyznaczyć wartość skuteczną zespoloną $\underline{U}$ oraz przebieg wartości chwilowych $u(t)$ napięcia dwójnika.

a) $\underline{Z} = (10 + j20)\ \Omega$; $\quad i(t) = 5\cos(314t - \pi/4)\ \mathrm{A}$;

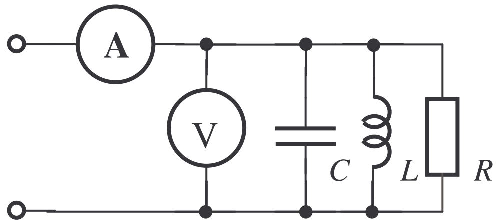
b) $\underline{Z} = 10 \cdot e^{j\pi/6}\ \Omega$; $\quad i(t) = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(500t - \pi/2)\ \mathrm{A}$.

Wynik: a) $\underline{U} = -25 + j75 \cong 79 \cdot e^{j1{,}89}\ \mathrm{V}$, $u(t) \cong 79\sqrt{2} \cdot \sin(314t + 1{,}89)\ \mathrm{V}$,

b) $\underline{U} = 100 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}\ \mathrm{V}$, $u(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(500t - \pi/3)\ \mathrm{V}$.

Zad. 1.8

W obwodzie panuje stan ustalony (rys. 1.8). Obwód zasilany jest napięciem zmiennym. Woltomierz (V) pokazuje $U = 16$V (wartość skuteczna), amperomierz (A) natomiast $I = 10$A (również wartość skuteczna). Wyznaczyć wartość indukcyjności *L*. $\omega = 2,\ R = 2,\ C = 1/4$.



Rys. 1.8

Wynik:

$$L = 4 \vee L = \frac{4}{7}.$$

Rozwiązanie:

Elementy *R*, *L*, *C* połączone są równolegle, zatem wygodnie jest opisać obwód za pomocą admitancji

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}.$$

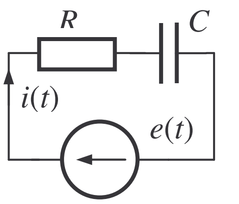
Z treści zadania wynika, że $|\underline{Y}| = Y = \frac{I}{U} = \frac{5}{8}$. Drugiej strony

$$Y^2 = \frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2 \rightarrow \frac{25}{64} = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2L}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \left(1 - \frac{1}{L}\right)^2\right).$$

Zatem $\left(1 - \frac{1}{L}\right)^2 = \frac{9}{16} \rightarrow 1 - \frac{1}{L} = \pm\frac{3}{4}$. Rozwiązując równanie otrzymuje się wynik.

Zad. 1.9

Jaka powinna być wartość rezystancji *R* aby wartość skuteczna prądu $i(t)$ wynosiła 1A?

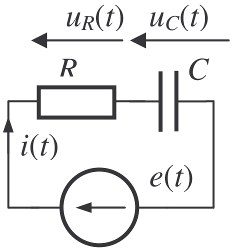


Dane:
$e(t) = 4\sin(2t + \pi)$ V,
C = ¼ F.

Wynik:
$R = 2$

Zad. 1.10

Wyznaczyć napięcie $u(t)$ na kondensatorze *C*. Narysować wykres wskazowy napięć i prądów w obwodzie.



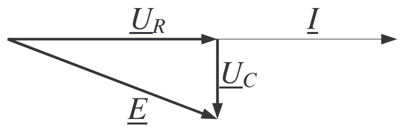
Dane:
$e(t) = 10\sin(10^3 t + 5/9\,\pi),\ C = 10\,\mu\text{F},\ R = 50\,\Omega.$

Rozwiązanie

Obliczymy symboliczną wartość prądu, napięcia na rezystorze oraz napięcia na kondensatorze:

$$\underline{I} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j5/9\pi} \frac{1}{50 - j\frac{1}{10^3 10 \cdot 10^{-6}}} = 0,06325\, e^{j2,8523\text{rad}} \text{ A}, \quad \underline{U}_R = R\underline{I} = 3,1624 e^{j2,8523\text{rad}} \text{ V},$$

$$\underline{U}_C = \frac{1}{j10^3 10^{-5}} \underline{I} = 6,325 e^{j1,2815\text{rad}} \text{V}.$$



Wykres wskazowy pokazano na rysunku.
Przebiegi czasowe prądu i napięć są następujące:

$$i(t) = 0,08945 \sin(10^3 t + 2,8523) \text{ A},$$

$$u_R(t) = 4,4723 \sin(10^3 t + 2,8523) \text{ V},$$

$$u_C(t) = 8,9449 \sin(10^3 t + 1,2815) \text{ V}.$$

Zad. 1.11

Gałąź szeregową RC ($R = 8\ \Omega$, $C \cong 530,78\ \mu$F) załączono na napięcie o wartości skutecznej $U = 220$ V o pulsacji $\omega \cong 314$ rad/s .

Obliczyć jakie będzie napięcie na kondensatorze jeżeli gałąź zostanie odłączona od zasilania:

a) w chwili gdy wartość chwilowa napięcia zasilającego przechodzi przez zero: 1) rosnąc, 2) malejąc;

b) w chwili gdy osiąga ona maksimum: 1) „dodatnie”, 2) „ujemne”.

Wynik: a) 1) $U_C \cong 149.34$ V , 2) $U_C \cong -149.34$ V b) 1) $U_C \cong$ -111.89 V , 2) $U_C \cong 111.89$ V .

Zad. 1.12

W celu wyznaczania parametrów L i R_L cewki rzeczywistej przeprowadzono dwa pomiary: jeden przy zasilaniu jej napięciem stałym, drugi przy zasilaniu napięciem zmiennym. Mierzono wartości prądu i napięcia, a przy zasilaniu napięciem zmiennym także częstotliwość.
Otrzymano następujące wyniki:

a) zasilanie napięciem stałym:

$U_{=} = 24$ V , $I_{=} = 6$ A ,

a) zasilanie napięciem zmiennym:

$U_{\approx} = 24$ V , $I_{\approx} = 4,8$ A , $f = 50$ Hz .

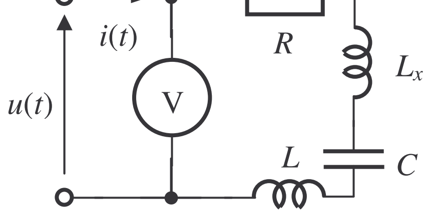
Wyznaczyć indukcyjność L i rezystancję R_L cewki.

Wynik:
$R_L = 4\,\Omega$, $L \cong 9,55$ mH

Zad. 1.13

Dla obwodu o schemacie z rys. 1.10 wyznaczyć indukcyjność L_x , jeżeli wskazanie woltomierza wynosi: $U = 100$ V .
Dane:

$$i(t) = 20 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(500t) \text{ A}, \ C = 0,25\ m\text{F}, \ L = 2\ mH, \ R = 3\ \Omega.$$



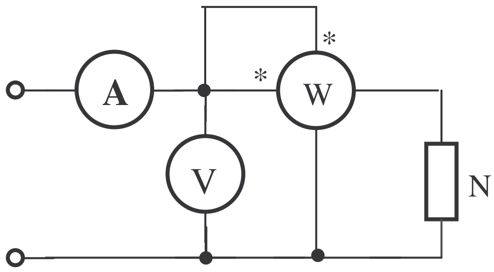
Wynik
Istnieją dwa rozwiązania :
$L'_x = 6$ mH, $L''_x = 22$ mH.

Zad. 1.14

Przyrządy podłączone do dwójnika zasilanego napięciem zmiennym sinusoidalnym pokazują $U = 65\,\mathrm{V}$, $I = 5\,\mathrm{A}$, $P = 300\,\mathrm{W}$ (rys. 1.14). Wszystkie przyrządy są idealne (nie obciążają obwodu, a więc nie zmieniają wartości przez siebie mierzonych). Woltomierz i amperomierz mierzą wartości skuteczne. Watomierz mierzy iloczyn wartości skutecznej prądu przepływającego przez jego cewkę prądową, wartości skutecznej napięcia przyłożonego do jego cewki napięciowej i kosinusa kąta pomiędzy nimi.

Wyznaczyć zespoloną impedancję $\underline{Z}$ dwójnika N w przypadku, gdy :

a) $\varphi = \arg\{\underline{Z}\} > 0$; b) $\varphi = \arg\{\underline{Z}\} < 0$.



Rys. 1.14

Rozwiązanie:

Moduł i argument impedancji dwójnika N wyznaczamy za pomocą wzorów:

$$|\underline{Z}| = \frac{U}{I} = \frac{65}{5} = 13\,\Omega, \quad \cos(\varphi) = \frac{P}{U \cdot I} = 0,923.$$

Stąd $\varphi = \pm 22,631321^0$.

a) $\varphi = \arg\{\underline{Z}\} > 0,$ $\qquad \underline{Z} = Ze^{j\varphi} = (12 + j5)\,\Omega$,

b) $\varphi = \arg\{\underline{Z}\} < 0$ $\qquad \underline{Z} = Ze^{j\varphi} = (12 - j5)\,\Omega$.

Zad. 1.15

Dwójnik N z rys. 1.14 zasilono napięciem sinusoidalnym o częstotliwości $f_1 = 50\,\mathrm{Hz}$. Wiemy, że dwójnik składa się z szeregowo połączonych rezystora, cewki i kondensatora. Wskazania przyrządów: $U_1 = 220\,\mathrm{V}$, $I_1 = 11\,\mathrm{A}$, $P_1 = 2\,\mathrm{kW}$

Następnie ten sam obwód zasilono napięciem o częstotliwości dwukrotnie wyższej. Wskazania przyrządów jednak wówczas nie uległy zmianie. Wyznaczyć wartości rezystancji (*R*), indukcyjności (*L*) i pojemności (*C*).

Wynik: $R \cong 16,53\ \Omega$, $C \cong 141,4\ \mu F$, $L \cong 35,86$ mH.

Zad. 1.16

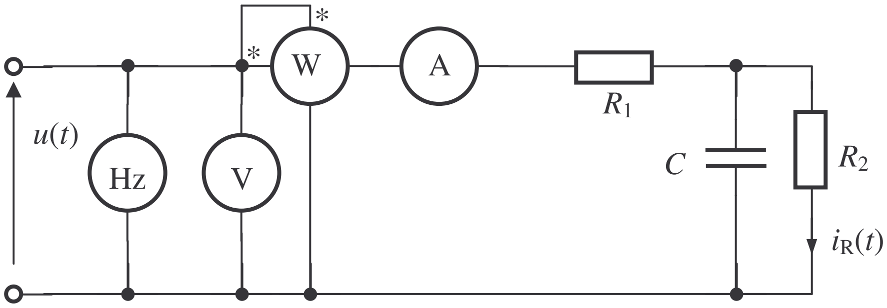
W obwodzie o schemacie z rysunku 1.14 przy częstotliwości $\mathrm{f} = 50\,\mathrm{Hz}$ mierniki wskazują $\mathrm{P} = 1000\,\mathrm{W}$, $\mathrm{U} = 220\,\mathrm{V}$, $\mathrm{I} = 5\,\mathrm{A}$. Dwójnik N składa się z szeregowo połączonego rezystor i kondensatora. Wyznaczyć parametry (R i C) dwójnika N. Wyznaczyć także wskazania mierników gdy częstotliwość napięcia zasilającego wzrośnie dwukrotnie (ale wartość skuteczna napięcia pozostanie ta sama).

Wynik: $R = 40\ \Omega$, $C \cong 0,174\,\mathrm{mF}$, ($X_C \cong 18,33\ \Omega$); gdy częstotliwość wzrośnie: $I \cong 5,36$ A, $P \cong 1149,6$ W, ($X_C \cong 9,165\ \Omega$)

Zad. 1.17

Dla obwodu o schemacie z rys. 1.17 wyznaczyć wskazania przyrządów.

Dane: $i_R(t) = 10\sqrt{2}\cos(1000t + \pi)$ A, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $C = 250\ \mu$F.



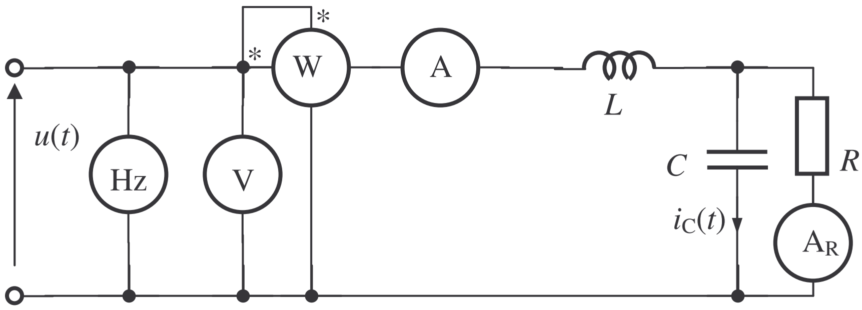
Rys. 1.17

Wynik: $f \cong 159{,}15$ Hz, $P_W = 325$ W, $U \cong 30{,}41\ V$, $I \cong 11{,}18$ A.

Zad. 1.18

Dla obwodu o schemacie z rys. 1.18 wyznaczyć wskazania przyrządów.

Dane: $i_C(t) = 6\sqrt{2}\cos(628t)$ A, $R = 10\ \Omega$, $L = 15{,}92\ m$H, $C = 159{,}24\ \mu$F.

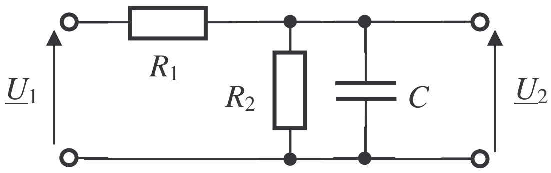


Rys. 1.18

Wynik: $f = 100$ Hz, $P_W \cong 360$ W, $U \cong 60\ V$, $I \cong 8{,}48$ A, $I_R \cong 6$ A.

Zad. 1.19

Obliczyć taką wartość rezystancji rezystora R_2, aby $\left|\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\right| = k$. Do obliczeń przyjąć $R_1 = 100\ \Omega$, $\frac{1}{\omega C} = 50\ \Omega$, $k = 0{,}2$.



Rys. 1.19

Rozwiązanie

Obliczymy transmitancją układu

$$\underline{T}=\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}=\frac{\dfrac{R_2\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R_2+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}}{R_1+\dfrac{R_2\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R_2+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}}=\frac{R_2}{R_1+R_2+\mathrm{j}\omega R_2R_1C}.$$

Kwadrat modułu transmitancji

$$k^2=\frac{R_2^2}{(R_1+R_2)^2+(\omega R_1R_2C)^2}=\frac{1}{\left(\dfrac{R_1}{R_2}+1\right)^2+(\omega R_1C)^2}.$$

Po rozwiązaniu równania ze względu na R_2 otrzymujemy

$$R_2=\frac{kR_1\left(\sqrt{1-\left(\omega CkR_1\right)^2}-k\right)}{\left(\omega CkR_1\right)^2+k^2-1}\approx 27,91\Omega \vee R_2=\frac{kR_1\left(\sqrt{1-\left(\omega CkR_1\right)^2}+k\right)}{\left(\omega CkR_1\right)^2+k^2-1}\approx -17,91\Omega.$$

Zatem należy przyjąć R_2 = 27,91 Ω.

Zad. 1.20

Moc chwilowa dostarczona do odbiornika ze źródła o napięciu sinusoidalnym zmienia się w przedziale 23 kVA do –5 kVA. Napisać wyrażenie na prąd i napięcie w funkcji czasu, jeżeli $u(0)$ = 500 V, U_m = 1835 V oraz częstotliwość zmian mocy wynosi f_p = 100 Hz.

Rozwiązanie

Załóżmy, że $u(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi_u)$ oraz $i(t)=I_m\sin(\omega t+\varphi_i)$. Oznaczmy $\varphi=\varphi_u-\varphi_i$ (prąd jest przesunięty w fazie względem napięcia o kąt φ). Z treści zadania wynika, że wartość skuteczna napięcia $U=\dfrac{U_m}{\sqrt{2}}=\dfrac{1835}{\sqrt{2}}=1297,54\,\mathrm{V}$.

Moc chwilowa

$$P=u(t)\cdot i(t)=U_mI_m\sin\left(\omega t+\varphi_u\right)\sin\left(\omega t+\varphi_i\right)=$$
$$\frac{U_mI_m}{2}\left[\cos\varphi-\cos\left(2\omega t+\varphi_u+\varphi_i\right)\right]=UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t+\varphi_p).$$

Z tego wzoru wynika, że moc chwilowa ma dwie składowe:

- składową stałą $\dfrac{U_mI_m}{2}\cos\varphi=UI\cos\varphi$,
- składową zmienną $\dfrac{U_mI_m}{2}\cos(2\omega t+\varphi_p)=UI\cos(2\omega t+\varphi_p)$, gdzie $\varphi_p=2\left(\varphi_u+\varphi_i\right)$.

W powyższej zależności skorzystano ze wzoru: $2\sin(A)\sin(B)=\cos(A-B)-\cos(A+B)$.

Moc chwilowa przy przebiegach sinusoidalnych oscyluje, sinusoidalnie z częstotliwością $2f=f_\mathrm{p}$ ($f=50\rightarrow\omega=100\pi$) wokół wartości stałej $UI\cos\varphi$, a jej amplituda wynosi UI. Moc chwilowa osiąga maksymalną wartość dla $2\omega t=k\pi-\varphi_p$ i wynosi $P_{\max}=UI\cos\varphi+UI$ oraz wartość minimalną dla $2\omega t=-\varphi_p$ i wynosi $P_{\min}=UI\cos\varphi-UI$. Mając te dwa równania można wyznaczyć I oraz $\cos\varphi$, tzn.

$$I=\frac{P_{\max}-P_{\min}}{2\cdot U}=\frac{(23+5)10^3}{2\cdot 1297,54}=10.79\,\mathrm{A},\qquad \cos\varphi=\frac{P_{\max}+P_{\min}}{P_{\max}-P_{\min}}=0.64285714\,.$$

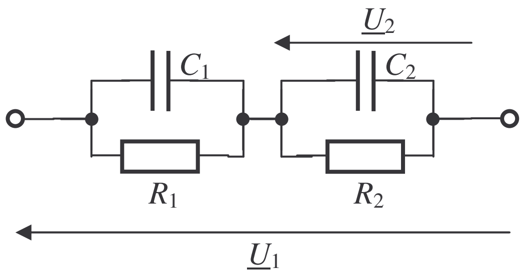
Stąd $\varphi=0,8725738534\,\mathrm{rad}$. Można zauważyć, że moc czynna $P=UI\cos\varphi=9\,\mathrm{kW}$ i jest równa średniej wartości $\frac{P_{\max}+P_{\min}}{2}$. Ponieważ $u(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi_u)$, więc dla $t=0$ $\sin(\varphi_u)=\frac{500}{1835}$, a stąd $\varphi_u=0,27596917$ rad (mniejsza wartość). Kąt φ_i wyznaczamy ze wzoru $\varphi_i=\varphi_u-\varphi=-0,5966046865\,\mathrm{rad}$. Ostatecznie, więc:

$$u(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi_u)=1835\sin(100\pi t+0,27596917\,\mathrm{rad})\,\mathrm{V}\,,$$

$$i(t)=I_m\sin(\omega t+\varphi_i)=15.25\sin\left(100\pi t\text{ - }0.59660468\,\mathrm{rad}\right)A\,.$$

Zad. 1.21

Wyznaczyć $\underline{T}=\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ (rys. 1.21). Jaka musi zachodzić zależność pomiędzy wartościami elementów obwodu, by $\underline{T}$ nie zależało od częstotliwości?



Rys. 1.21

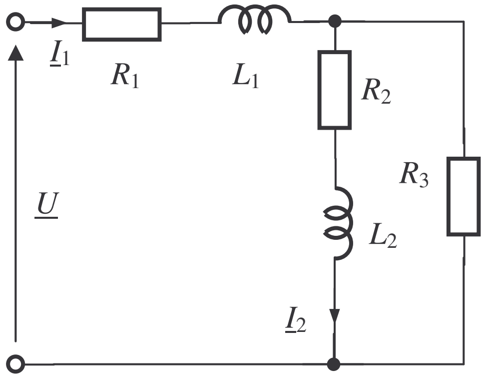
Rozwiązanie

Oznaczymy $\underline{Z}_1=\frac{\frac{R_1}{j\omega C_1}}{R_1+\frac{1}{j\omega C_1}}=\frac{R_1}{1+j\omega R_1C_1}$, $\underline{Z}_2=\frac{R_2}{1+j\omega R_2C_2}$. Korzystamy z dzielnika napięcia, zatem $\underline{U}_2=\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{U}_1$. Stąd $\underline{T}=\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}=\frac{\frac{R_2}{1+j\omega R_2C_2}}{\frac{R_1}{1+j\omega R_1C_1}+\frac{R_2}{1+j\omega R_2C_2}}$. Wyrażenie to nie będzie zależało od ω jeśli $1+j\omega R_2C_2=1+j\omega R_1C_1$, czyli $R_2C_2=R_1C_1$.

Wówczas $\underline{T}=\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}=\frac{R_2}{R_1+R_2}$. Jest to tzw. dzielnik skompensowany.

Zad. 1.22

Jaka powinna być wartość rezystancji R_3, aby prąd $\underline{I}_2$ płynący przez elementy R_2 i L_2 opóźniał się w fazie względem przyłożonego napięcia $\underline{U}$ o $\pi/2$ (rys. 1.22). Przyjąć następujące dane: R_1 = 5 Ω, ωL_1 = 11 Ω, R_2 = 10 Ω, ωL_2 = 25 Ω.



Rys. 1.22

Rozwiązanie

Oznaczmy $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = R_1 + jX_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = R_2 + jX_2$, $\underline{Z}_3 = R_3$. Prąd

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{we}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}} = \frac{\underline{U}\left(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3\right)}{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3},$$ gdzie $\underline{Z}_{we}$ oznacza impedancję wejściową dwójnika. Przez impedancję $\underline{Z}_2$ płynie prąd $\underline{I}_2$, którego wartość wyznaczamy z dzielnika prądowego, tzn. $\underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_T}$, gdzie $\underline{Z}_T = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$ ma wymiar impedancji ale nią nie jest, można ją nazwać impedancją przejściową (trans-impedancją). Prąd $\underline{I}_2$ będzie opóźniał się względem przyłożonego napięcia $\underline{U}$ o 90^0, jeśli impedancja przejściowa będzie czysto urojona (znak dodatni). Wyznaczmy część rzeczywistą i urojoną tej impedancji:

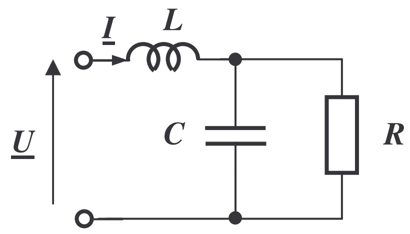
$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2) + \frac{\left(R_1 + jX_1\right)\left(R_2 + jX_2\right)}{R_3} =$$

$$\left(R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2 - X_1X_2}{R_3}\right) + j\left(X_1 + X_2 + \frac{R_1X_2 + R_2X_1}{R_3}\right).$$

Część rzeczywistą powyższego wyrażenia przyrównujemy do zera $R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2 - X_1X_2}{R_3} = 0$, stąd $R_3 = \frac{X_1X_2 - R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{11\cdot 25 - 5\cdot 10}{5+10} = 15\,\Omega$. Sprawdzenie, jeśli $R_3 = 15\,\Omega$, to $\underline{Z}_T = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = 5 + j11 + 10 + j25 + \frac{(5 + j11)(10 + j25)}{15} = j\frac{155}{3}$.

Zad 1.23

Wykazać, że dla $\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$ wartość skuteczna prądu $\underline{I}$ płynącego przez cewkę (rys. 1.23) wynosi $I = \frac{U}{\omega L}$ dla dowolnych wartości R, natomiast argument tego prądu przy zmianie $R \in (0, \infty)$ zmienia się w odpowiednio między w przedziale $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Rys. 1.23

Rozwiązanie

Prąd $\underline{I}=\frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{we}}=\frac{\underline{U}}{j\omega L+\frac{R}{1+j\omega RC}}=\frac{\underline{U}\left(1+j\omega RC\right)}{R-\omega^2 RLC+j\omega L}$.

Moduł tego prądu (wartość skuteczna) dla podanej pulsacji wynosi:

$$\left|\underline{I}\right|=I=\left.\frac{U\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}{\sqrt{\left(R-\omega^2RLC\right)^2+\omega^2L^2}}\right|_{\omega^2=\frac{1}{2LC}}=\sqrt{2}U\left.\sqrt{\frac{C}{L}}\right|_{C=\frac{1}{2\omega^2L}}=\frac{U}{\omega L}.$$

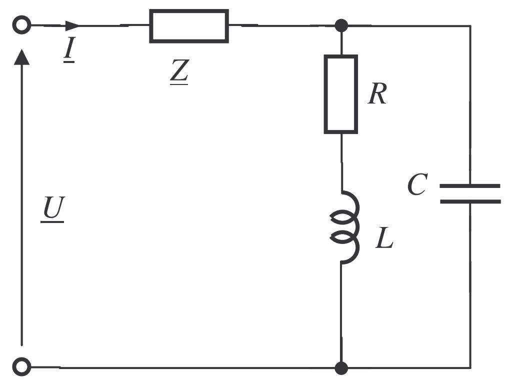
Argument prądu $\underline{I}$ wyznaczamy jako (zakładamy, że argument napięcia $\underline{U}$ jest równy zero)

$$\arg\left\{\underline{I}\right\}=\arg\left\{1+j\omega RC\right\}-\arg\left\{R-\omega^2RLC+j\omega L\right\}\Big|_{\omega=\frac{1}{\sqrt{2LC}}}=arctg\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{C}{L}}\right)-arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$$

Z tego wyrażenia wynika, że gdy $R\to 0$, to $\arg\left\{\underline{I}\right\}\to-\frac{\pi}{2}$, a gdy $R\to\infty$, to $\arg\left\{\underline{I}\right\}\to\frac{\pi}{2}$.

Zad. 1.24

Parametry obwodu pokazanego na (rys.1.24) są następujące: R = 40 Ω, ωL = 40 Ω, $\frac{1}{\omega C}=20\Omega$. Wiadomo, że element o impedancji $\underline{Z}$ jest kondensatorem lub induktorem. Znaleźć wartość reaktancji tego elementu, jeśli $|\underline{U}|=U=30$ V, a $|\underline{I}|=I=0.75$ A.



Wynik:

$\underline{Z}=j\left(24+16\sqrt{6}\right)\approx 63{,}1918\,j\,\Omega$ (cewka)

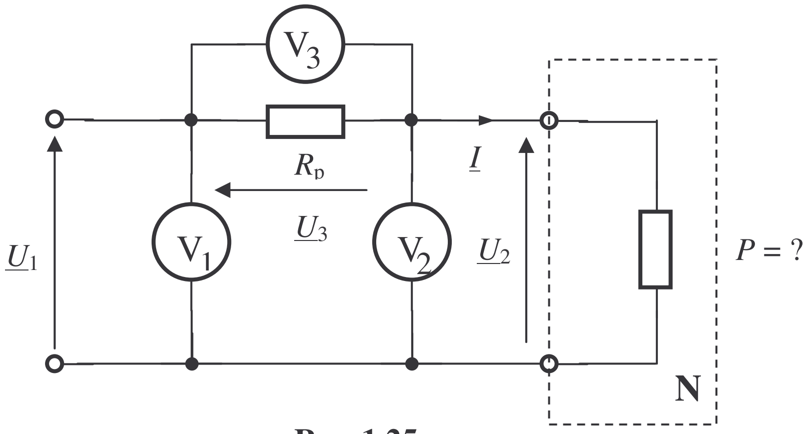
lub

$\underline{Z}=j\left(24-16\sqrt{6}\right)\approx -15{,}1928\,j\,\Omega$ (kondensator)

Zad. 1.25

Dwójnik N zasilany jest napięciem zmiennym. Występuje stan ustalony. Wyznaczyć moc czynną wydzieloną w dwójniku N (obwód *RLC*). Ta metoda pomiaru mocy nazywa się metodą trzech woltomierzy.

Do obliczeń przyjąć dane: $U_1=100V$, $U_2=96V$, $U_3=8V$, $R_p=10\Omega$.



Rys. 1.25

Wynik: $P = \frac{1}{2R_p}\left[U_1^2 - \left(U_2^2 + U_3^2\right)\right] = 36\,W$

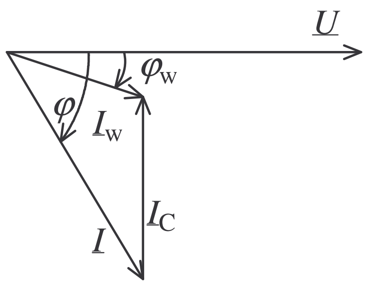
Wskazówka: Narysować poprawnie wykres wskazowy, zastosować wzór na $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ oraz wzory Carnota.

Zad. 1.26

Odbiornik energii (charakter indukcyjny) pobiera moc czynną $P = 2000\,W$ przy napięciu zasilającym $U = 230\,V$ i $\cos(\varphi) = 0{,}65$, $f = 50\,Hz$. Znaleźć pojemność i moc bierną baterii kondensatorów, które włączone równolegle do odbiornika zwiększą $\cos(\varphi_w) = 0{,}9$ (nadal zostanie charakter indukcyjny wypadkowego obciążenia). Co się stanie, jeśli będziemy chcieli poprawić $\cos(\varphi) \to 1$.

Rozwiązanie

Narysujmy wykres wskazowy (rys. 1.26).



Rys. 1.26

Przed włączeniem kondensatora wartość skuteczna prądu wynosiła $|\underline{I}| = I = \frac{P}{U\cos(\varphi)} = 13{,}3779\,A$. Po włączeniu kondensatora płynie prąd sumaryczny $\underline{I}_w$. Z rysunku 1.26 wynika, że $I_w \cos(\varphi_w) = I\cos(\varphi)$. Stąd $I_w = I\frac{\cos(\varphi)}{\cos(\varphi_w)} = 9{,}6618\,A$. Również z rys. 1.26 wynika, że $I_C = I\sin(\varphi) - I_w\sin(\varphi_w) = I\sqrt{1-\cos^2(\varphi)} - I_w\sqrt{1-\cos^2(\varphi_w)} = 5{,}9548\,V$. Prąd płynący przez kondensator $\underline{I}_C = j\omega C\underline{U}$, zatem $|\underline{I}_C| = |j\omega C||\underline{U}| \to I_C = \omega CU$. Stąd

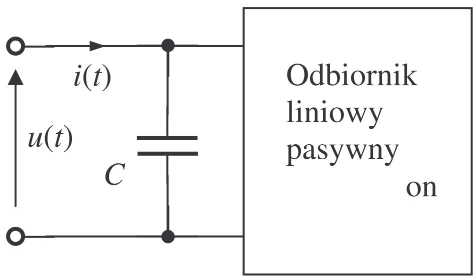
$C=\frac{I_C}{U\omega}=82,4\mu F$. Moc bierna $Q_C=I_C\cdot U=5,9548\cdot 230=1369,6War$. Jeśli $\cos(\varphi_w)=1$, $I_w\approx 8,69\,A,\ \varphi_w=0\rightarrow \sin(\varphi_w)=0.$ Zatem $I_C=I\sin(\varphi)\approx 10,166\,A.$ Tak, więc $C=\frac{I_C}{\omega U}=140,7\,\mu F$. Wówczas $Q_C=I_C\cdot U=10,166\cdot 230=2338,2War$. Z powyższego przykładu wynika wniosek: poprawa współczynnika $\cos(\varphi)$, tak aby był on bliski jedności wymaga znacznego zwiększenia pojemności baterii w stosunku do uzyskanych korzyści.

Zad. 1. 27

Dla obwodu o schemacie zastępczym z rysunku 1.27 obliczyć całkowity współczynnik mocy $\cos\varphi_\Sigma$. Odbiornik ma charakter rezystancyjno-indukcyjny.

Dane : odbiornika: $U_{on}=220V$, $P_{on}=1,6\ kW$, $\cos\varphi_{on}=0,6$,

kondensatora: $\frac{1}{\omega C}=40\ \Omega$.



Wynik:
$\cos\varphi_\Sigma\cong 0,87$

Rys. 1.27

Zad 1. 28

Odbiornik o charakterze rezystancyjno-indukcyjnym ma następujące parametry znamionowe: $U_{on}=220$ V , $P_{on}=100$ kW , $\cos\varphi_{on}=0,75$, $f=50$ Hz .
Dane prądnicy zasilającej odbiornik: $U_{gn}=220$ V , $\cos\varphi_{gn}=0,8$, $S_{gn}=150$ kVA , $X_{gn}=0,05\ \Omega$ (przyjmuje się samą reaktancję, rezystancja uzwojenia jest pomijalna).

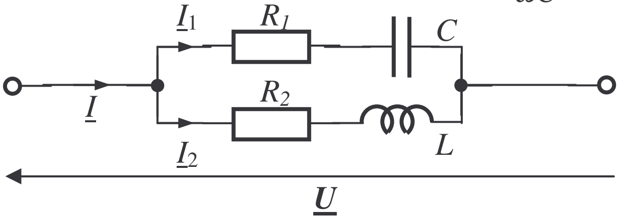
Wyznaczyć prąd odbiornika, napięcie na jego zaciskach oraz moc przezeń pobieraną. Obliczyć też pojemność kondensatora jaki należy podłączyć równolegle do odbiornika, aby wypadkowy współczynnik mocy miał wartość $\cos\varphi_K=0,95$.

Wynik: $I_o\cong 611$ A , $U_o\cong 222$ V , $P_o\cong 101,6$ kW (szeregowe połączenie: $R_o\cong 0,27\ \Omega$, $X_o\cong 0,24\ \Omega$, $E_g\cong 242$ V), $C\cong 8$ mF lub 3,69 mF (w zależności od tego czy po dołączeniu kondensatora charakter układu pozostanie rezystancyjno-indukcyjny czy też zmieni się na rezystancyjno-pojemnościowy).

Zad. 1.29

Dwie równoległe gałęzie podłączono do źródła napięcia zmiennego (rys. 1.29). Wyznaczyć prądy $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ oraz $\underline{I}$. Wyznaczyć moc czynną (*P*) i bierną (*Q*)pobieraną przez każdą gałąź oraz całego obwodu. Ponadto wyznaczyć moc zespoloną ($\underline{S}$) i pozorną (*S*) dla całego obwodu.

Przyjąć następujące dane: $\underline{U} = 130V$, $X_L = \omega L = 6\,\Omega$, $X_C = \dfrac{1}{\omega C} = 5\,\Omega$, $R_1 = 8\,\Omega$, $R_2 = 12\,\Omega$.



Rys. 1.29

Rozwiązanie:

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{R_1 - jX_C} = (11,69 + j7,30)\,A,\ \underline{I}_2 = \frac{U}{R_2 + jX_L} = (8,67 - j4,33)\,A,$$

$$\underline{I} = \underline{U}\left(\frac{1}{R - jX_C} + \frac{1}{R + jX_L}\right) = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (20,35 + j2,97)\,A,$$

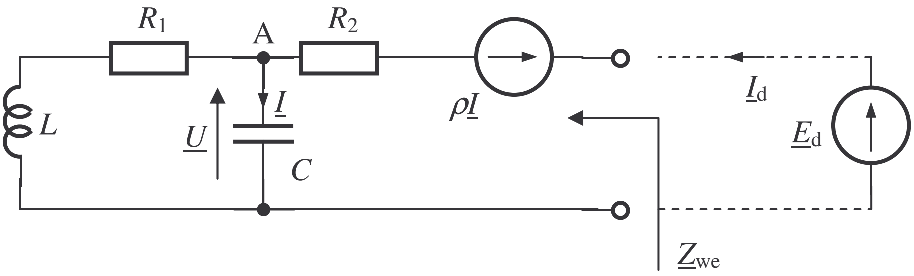
$$P_1 = \left|\underline{I}_1\right|^2 R_1 = 1519\ W,\ P_2 = \left|\underline{I}_2\right|^2 R_2 = 1127\ W,$$

$$Q_1 = -\left|\underline{I}_1\right|^2 X_C = -949\ War,\ Q_2 = \left|\underline{I}_2\right|^2 X_L = 563 War,$$

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = P + jQ = 2646W - j386War,\ S = 2674VA.$$

Zad. 1.30

Obliczyć impedancję wejściową układu. Dane: $R_1 = R_2 = 50\ \Omega$, $\omega L = 50\ \Omega$, $\rho = 50\ \Omega$, $\omega C = 0{,}02$ S.



Rozwiązanie.

W celu obliczenia impedancji wejściowej wprowadzimy dodatkowe źródło napięcia $\underline{E}_d$ i obliczymy prąd wejściowy $\underline{I}_d$. Wtedy

$$\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{E}_d}{\underline{I}_d}.$$

Aby obliczyć prąd $\underline{I}_d$ musimy najpierw wyznaczyć napięcie $\underline{U}$, gdyż

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{E}_d - \rho\underline{I} - \underline{U}}{R_2},\ \text{natomiast}\ \underline{I} = \underline{U}\,\mathrm{j}\omega C.$$

Dla napięcia $\underline{U}$ można ułożyć równanie (I prawo Kirchhoffa dla węzła A)

$$\frac{\underline{U}}{R_1 + \mathrm{j}\omega L} + \underline{U}\mathrm{j}\omega C = \frac{\underline{E}_d - \rho\underline{U}\mathrm{j}\omega C - \underline{U}}{R_2}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$\underline{U} = \frac{\underline{E}_d}{3}(1 - \mathrm{j}),\ \underline{I} = \frac{\underline{E}_d}{150}(1 + \mathrm{j})$$

i ostatecznie

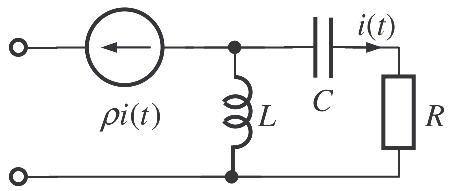
$$\underline{I}_{we} = \frac{\underline{E}_d - 50\frac{\underline{E}_d}{150}(1+\mathrm{j}) - \frac{\underline{E}_d}{3}(1-\mathrm{j})}{50} = \frac{\underline{E}_d}{150}.$$

Tak więc

$$\underline{Z}_{we} = 150 \ \ \Omega.$$

Zad. 1.31

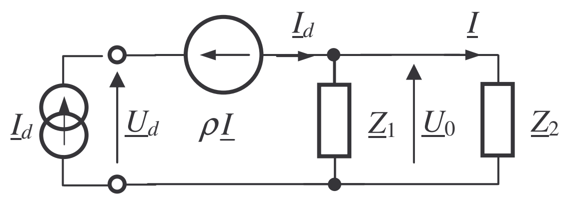
Obliczyć impedancję wejściową poniższego dwójnika.



$C = 0{,}5,\ L = 2,\ R = 1,\ \rho = 2,\ \omega = 2.$

Rozwiązanie.

Symboliczny układ zastępczy z dołączonym dodatkowym źródłem prądowym pokazano na rysunku 1.31.



$\underline{Z}_1 = \mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}4,\ \underline{Z}_2 = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} = 1 - \mathrm{j}.$

Rys. 1.31

Impedancja wejściowa

$$\underline{Z}_w = \frac{\underline{U}_d}{\underline{I}_d}.$$

Na podstawie rysunku obwodu

$$\underline{U}_d = \underline{U}_0 + \rho \underline{I},$$

$$\underline{U}_0 = \underline{I}_d \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2},\ \ \underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_2}.$$

Tak więc

$$\underline{U}_d = \underline{I}_d \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \rho \underline{I}_d \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Ostatecznie

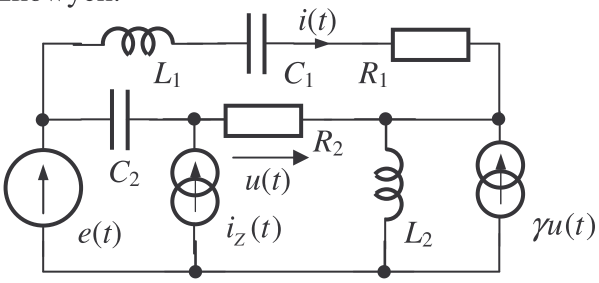
$$\underline{Z}_w = \frac{\underline{Z}_1(\underline{Z}_2 + \rho)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Po podstawieniu danych

$$\underline{Z}_w = 4.$$

Zad 1.32

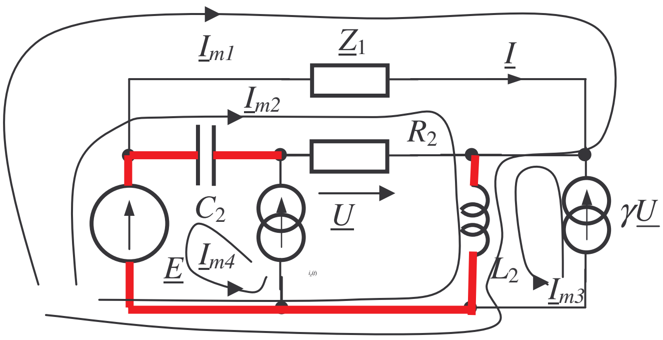
W obwodzie panuje stan ustalony. Obliczyć prąd $i(t)$ posługując się metodą prądów oczkowych.



$e(t)=\sqrt{2}\cos(t),\ i_z(t)=\sqrt{2}\sin(t),$
$L_1=L_2=1,\ C_1=C_2=0{,}5,\ R_1=R_2=1,$
$\gamma=0{,}5.$

Rozwiązanie.

Symboliczny obwód zastępczy pokazano na rysunku 1.32.



$\underline{E}=\mathrm{j},\ \underline{I}_z=1,$

$\underline{Z}_1=R_1+\mathrm{j}\omega L_1-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C_1}=1-\mathrm{j},$

$\underline{Z}_2=-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C_2}=-\mathrm{j}2,\ \underline{Z}_3=R_2=1,$

$\underline{Z}_4=\mathrm{j}\omega L_2=\mathrm{j}.$

Rys. 1.32

Po wybraniu drzewa T_r (jako koniecznego warunku rozwiązalności obwodu - lina pogrubiona czerwona) można wybrać system oczek niezależnych (oczka tworzą elementy dopełniające do drzewa T_r) oraz zbiór prądów oczkowych i ułożyć układ równań metody prądów oczkowych.

1. $(\underline{Z}_1+\underline{Z}_4)\underline{I}_{m1}+\underline{Z}_4\underline{I}_{m2}+\underline{Z}_4\underline{I}_{m3}=\underline{E},$
2. $(\underline{Z}_2+\underline{Z}_3+\underline{Z}_4)\underline{I}_{m2}+\underline{Z}_4\underline{I}_{m1}+\underline{Z}_4\underline{I}_{m3}-\underline{Z}_2\underline{I}_{m4}=\underline{E},$
3. $\underline{I}_{m3}=\gamma\underline{U}$
4. $\underline{I}_{m4}=\underline{I}_Z.$

Równanie sterowania:

5. $\underline{U}=-\underline{Z}_3\underline{I}_{m2}.$

Wstawiając równanie (5) do (3) otrzymujemy $\underline{I}_{m3}=-\gamma\underline{Z}_3\underline{I}_{m2}$. Zatem można zapisać następujący układ równań liniowych:

$$\begin{bmatrix}\underline{Z}_1+\underline{Z}_4 & \underline{Z}_4-\gamma\underline{Z}_3\underline{Z}_4\\ \underline{Z}_4 & \underline{Z}_2+\underline{Z}_3+\underline{Z}_4-\gamma\underline{Z}_3\underline{Z}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{I}_{m1}\\ \underline{I}_{m2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{E}\\ \underline{E}+\underline{Z}_2\underline{I}_Z\end{bmatrix}.$$

Podstawiając dane otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix}1 & \mathrm{j}\dfrac{1}{2}\\ \mathrm{j} & 1-\mathrm{j}\dfrac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{I}_{m1}\\ \underline{I}_{m2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{j}\\ \text{-j}\end{bmatrix},$$

stąd

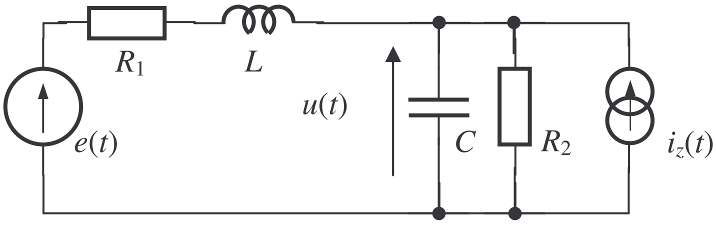
$$\underline{I}_{m1}=\underline{I}=\frac{\begin{vmatrix} \mathrm{j} & \frac{1}{2}\mathrm{j} \\ \text{-j} & 1\text{-}\frac{3}{2}\mathrm{j} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 1\text{-}\frac{3}{2}\mathrm{j} \end{vmatrix}}=\frac{1+\mathrm{j}}{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{j}}=\frac{2}{3}\mathrm{j}=\frac{2}{3}e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

Ostatecznie

$$i(t)=0,9428\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=0,9428\cos(t).$$

Zad. 1.33

W obwodzie pokazanym na rysunku panuje stan ustalony. Obliczyć napięcie $u(t)$ posługując się metodą symboliczną oraz metodą napięć węzłowych.



$e(t)=10\sin(\omega t)$ V,

$i_z(t)=0,05\sin(\omega t+30^0)$ A,

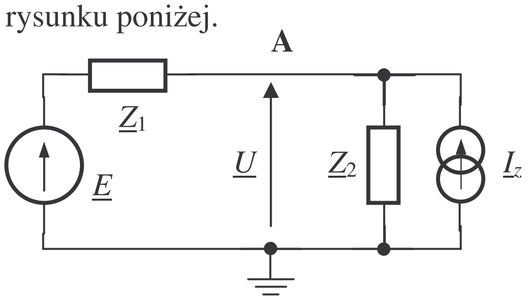
$R_1=100$ Ω, $R_2=200$ Ω,

$L=10,61$ mH, $C=0,2653$ μF,

$f=3$ kHz.

Rozwiązanie.

Symboliczny schemat zastępczy obwodu, obowiązujący w stanie ustalonym, pokazano na rysunku poniżej.



$$\underline{E}=\frac{10}{\sqrt{2}},\ \underline{I}_z=\frac{0,05}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}30^0},\ \omega=2\cdot\pi\cdot3\cdot10^3,$$

$$\underline{Z}_1=R_1+j\omega L=100+\mathrm{j}200,$$

$$\underline{Z}_2=\frac{1}{\frac{1}{R_2}+\mathrm{j}\omega C}=100-\mathrm{j}100.$$

Dla węzła **A** można zapisać

$$\left(\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}\right)\underline{U}-\frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{E}=\underline{I}_Z,$$

stąd

$$\underline{U}=\frac{\underline{I}_Z+\frac{\underline{E}}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}}=\frac{\underline{Z}_2\left(\underline{Z}_1\underline{I}_Z+\underline{E}\right)}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}.$$

Po podstawieniu danych

$$\underline{U}=6,5054\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}21,5^0}.$$

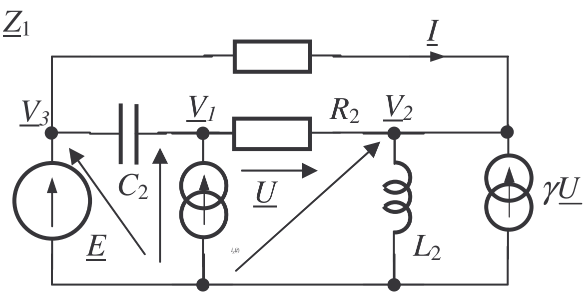
Ostatecznie
$u(t) = \sqrt{2} \cdot 6,5054 \sin(\omega t - 21,5^0) = 8,5621 \sin(\omega t - 21,5^0).$

Zad. 1.34

Prąd $i(t)$, o którym mowa w **Zadaniu 1.32**, obliczyć metodą napięć węzłowych.

Rozwiązanie

Symboliczny obwód zastępczy z wybranymi napięciami węzłowymi pokazanymi rysunku.



Słuszny jest następujący układ równań metody napięć węzłowych:

$$1.\ \underline{V}_1\left(\frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}\right) - \underline{V}_2 \frac{1}{\underline{Z}_3} - \frac{1}{\underline{Z}_2}\underline{V}_3 = \underline{I}_z,$$

$$2.\ -\underline{V}_1 \frac{1}{\underline{Z}_3} + \underline{V}_2\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \frac{1}{\underline{Z}_4}\right) - \frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{V}_3 = \gamma \underline{U},$$

$$3.\ \underline{V}_3 = \underline{E}.$$

Równanie sterowania:

$$4.\ \underline{U} = \underline{V}_2 - \underline{V}_1.$$

Po rozwiązaniu równań otrzymuje się

$$\underline{V}_1 = \frac{1}{3}\mathrm{j},$$

$$\underline{V}_2 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{j}.$$

Ponieważ

$$\underline{I} = \frac{\underline{E} - \underline{V}_2}{\underline{Z}_1},$$

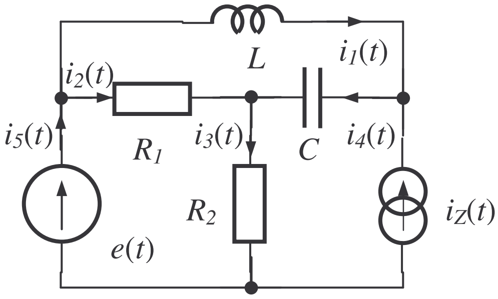
więc

$$\underline{I} = \frac{2}{3}\mathrm{j}.$$

Przebieg czasowy prądu $i(t)$ jest oczywiście taki sam jak w rozwiązaniu **Zadania 1.32**.

Zad. 1.35

W obwodzie występuje stan ustalony. Korzystając z metody prądów oczkowych znaleźć wszystkie zaznaczone prądy gałęziowe.



$e(t)=\sin t,\ i_Z(t)=\cos t,$

$R_1=R_2=1\Omega,\ C=3\text{F},$

$L=1/6\,\text{H}$

Wynik

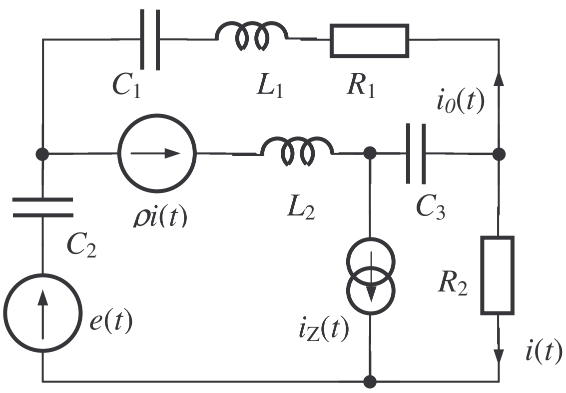
$i_1(t)=\sin(t-0{,}9273)\,A,\ i_2(t)=0{,}2236\sin(t-0{,}4636)\,A,$

$i_3(t)=0{,}8062\sin(t+0{,}1244)\,A,\ i_4(t)=0{,}6325\sin(t+0{,}3218)\,A,$

$i_5(t)=1.204\sin(t-0{,}8442)\,A.$

Zad. 1.36

W sieci panuje stan ustalony. Znaleźć prąd $i_0(t)$ metodą prądów oczkowych.



$C_1=C_2=C_3=1\text{F},$

$L_1=L_2=2\,\text{H},$

$R_1=R_2=\rho=1\Omega,$

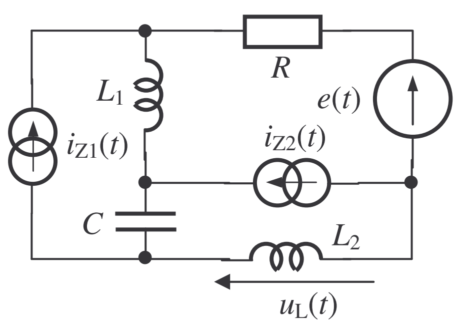
$e(t)=\sqrt{2}\sin t\,\text{V},\ i_Z(t)=\sqrt{2}\cos t\,A.$

Wynik:

$$i_0(t)=2\sqrt{2}\sin\left(t-\pi/2\right)\text{A}.$$

Zad. 1.37

W sieci panuje stan ustalony. Znaleźć napięcie $u_L(t)$.



$e(t)=\sqrt{2}\sin t\,\text{V},$

$i_{Z1}(t)=\sqrt{2}\cos\left(t+\pi/4\right)\text{A},$

$i_{Z2}(t)=\sqrt{2}\sin\left(t-\pi\right)\text{A},$

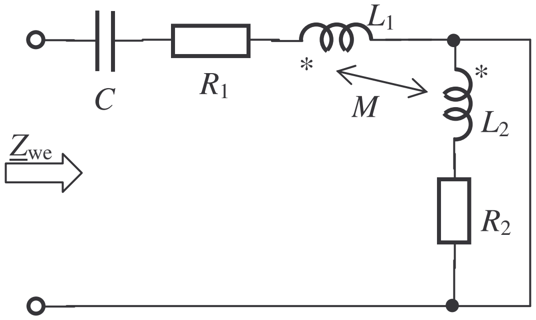
$R_1=1\Omega,\ L_1=L_2=1\text{H},\ C=1\text{F}.$

Wynik

Należy zastosować metodę prądów oczkowych i prawo Ohma, otrzymujemy $u_L(t) = \sin(t - \pi/4)$.

Zad. 1.38

Znaleźć impedancję wejściową poniższego dwójnika.



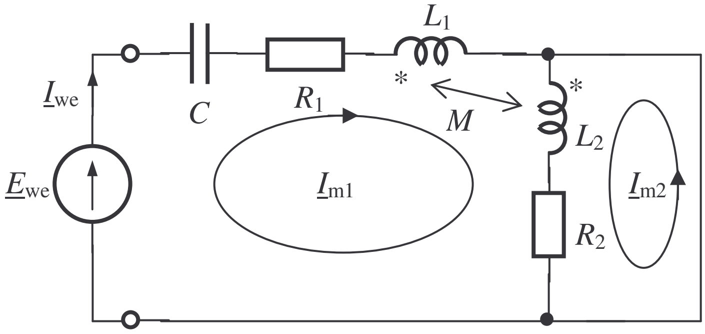
$R_1 = 6\,\Omega,\ R_2 = 2\,\Omega,$

$\omega L_1 = 8\,\Omega,\ \omega L_2 = 2\,\Omega,\ \omega M = 4\,\Omega,$

$\dfrac{1}{\omega C} = 8\,\Omega.$

Rozwiązanie

Do analizy obwodu z cewkami sprzężonymi zaleca się stosowanie metody prądów oczkowych. Sposób rozwiązywania obwodu jest taki sam, jak w przypadku obwodu bez sprzężeń. Należy tylko nieco inaczej wyznaczyć impedancje własne i wzajemne oczek.



$$\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{E}_{we}}{\underline{I}_{we}} = \frac{\underline{E}_{we}}{\underline{I}_{m1}}$$

Wybieramy oczka (w przykładzie nie wybrano celowo oczek optymalnie). Orientację oczek najlepiej przyjąć tak, aby prądy oczkowe wpływały do zacisków jednoimiennych cewek (*). Najpierw układamy równania wynikające z metody prądów oczkowych tak jak nie byłoby sprzężeń, tzn.

$$1.\ \left(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1 - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} + \mathrm{j}\omega L_2 + R_2\right)\underline{I}_{m1} + \left(\mathrm{j}\omega L_2 + R_2\right)\underline{I}_{m2} = \underline{E}_{we},$$

$$2.\ \left(\mathrm{j}\omega L_2 + R_2\right)\underline{I}_{m1} + \left(\mathrm{j}\omega L_2 + R_2\right)\underline{I}_{m2} = 0.$$

Następnie modyfikujemy te równania zgodnie z zasadą:

- jeśli istnieją sprzężenia pomiędzy cewkami należącymi do tego samego oczka, to w impedancji własnej pojawi się dwukrotna wartość impedancji indukcyjności wzajemnej. Znak podwojonej impedancji indukcji wzajemnej jest + (plus) jeśli prąd oczkowy w tym oczku wpływa (wypływa) jednocześnie do (z) zacisków jednoimiennych obydwu cewek sprzężonych.
- jeśli istnieją sprzężenia pomiędzy cewkami to do impedancji wzajemnej należy jeszcze dodać (zwrot obu prądów oczkowych względem zacisków jednoimiennych cewek jest zgodny) lub odjąć (zwrot obu prądów oczkowych względem zacisków

jednoimiennych cewek jest przeciwny).

Zatem równania 1 i 2 zostają uzupełnione w następujący sposób:

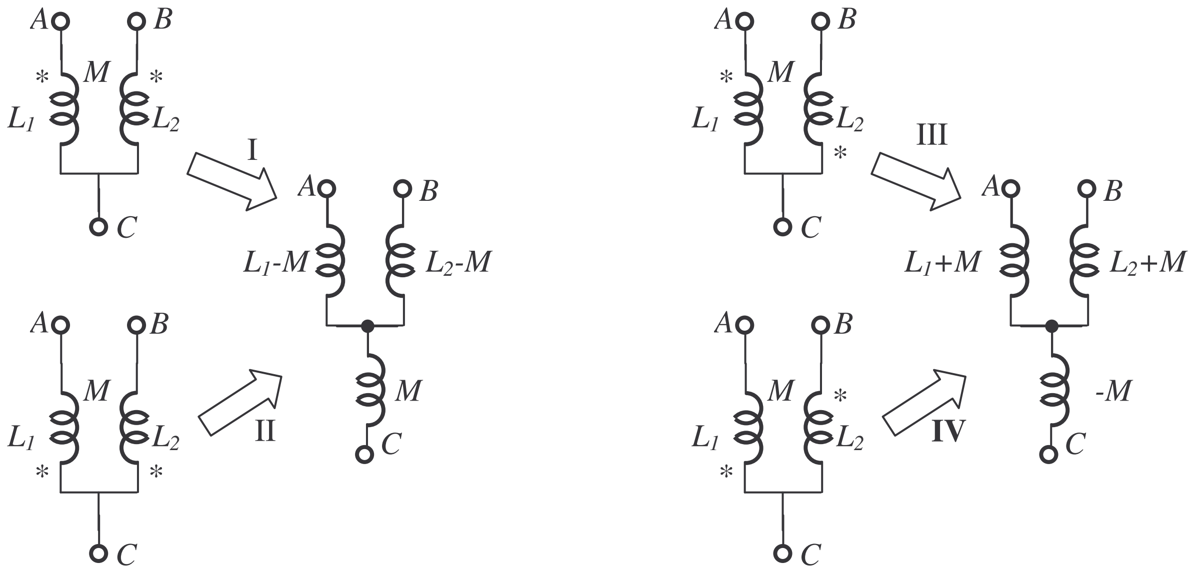
$$1.\ \left(R_1 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C} + j\omega L_2 + R_2 + j2\omega M\right)\underline{I}_{m1} + \left(j\omega L_2 + R_2 + j\omega M\right)\underline{I}_{m2} = \underline{E}_{we},$$

$$2.\ \left(j\omega L_2 + R_2 + j\omega M\right)\underline{I}_{m1} + \left(j\omega L_2 + R_2\right)\underline{I}_{m2} = 0.$$

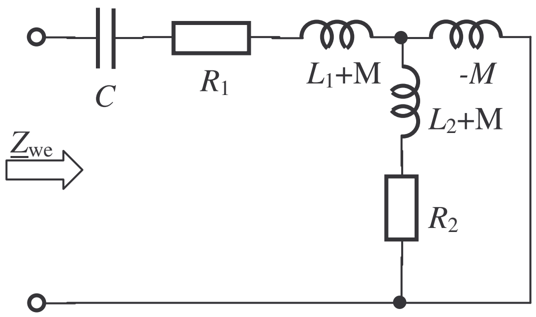
Podstawiając dane, otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 8+j10 & 2+j6 \\ 2+j6 & 2+j2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{I}_{m1} \\ \underline{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_{we} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{Z}_{we} = \frac{\underline{E}_{we}}{\underline{I}_{m1}} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}} = 10-4j.$$

W przypadku, gdy cewki sprzężone są połączone tak, że spotykają się we wspólnym węźle można zastosować układy równoważne, trzy cewki ale bez sprzężeń (4 możliwe kombinacje I, II, III i IV- rys. poniżej).



Stosując III schemat równoważny, analizowany obwód można narysować w następujący sposób (rys. poniżej).



Zatem

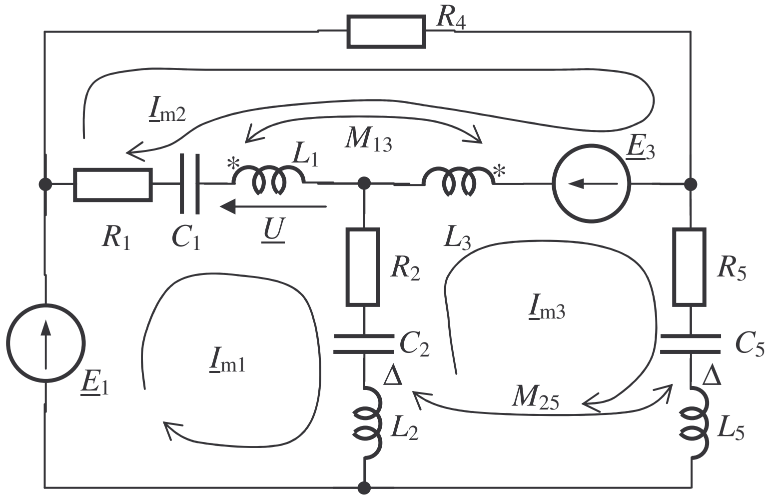
$$\underline{Z}_{we} = R_1 + j\omega\left(L_1 + M\right) - j\frac{1}{\omega C} +$$

$$+\frac{\left[R_2 + j\left(L_2 + M\right)\right]\left(\text{-}jM\right)}{R_2 + j\left(L_2 + M\right) - jM} =$$

$$6 + j12 - j8 + \frac{\left(2+j6\right)\cdot\left(\text{-}j4\right)}{2+j6-j4} = 10 - j4$$

Zad. 1.39

W obwodzie panuje stan ustalony. Obliczyć wartość napięcia $\underline{U}$.



$$M_{13} = M_{25} = 0,5,$$
$$L_1 = L_2 = L_3 = L_5 = 1,$$
$$C_1 = 2,\ C_2 = \frac{2}{5},\ C_5 = \frac{2}{3},$$
$$R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 1,$$
$$\underline{E}_1 = 1,\ \underline{E}_3 = 2,\ \omega = 1.$$

Rozwiązanie.

W obwodzie występują induktory sprzężone polem magnetycznym; zalecaną metodą analizy obwodu jest metoda prądów oczkowych. Można ułożyć następujące równania:

1. $(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2)\underline{I}_{m1} - (R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1 - j\omega M_{13})\underline{I}_{m2}$
$-(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2 + j\omega M_{13} - j\omega M_{25})\underline{I}_{m3} = \underline{E}_1,$

2. $-(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1 - j\omega M_{13})\underline{I}_{m1} + (R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1 + R_4 + j\omega L_3 - 2j\omega M_{13})\underline{I}_{m2}$
$-\left(j\omega L_3 - j\omega M_{13}\right)\underline{I}_{m3} = \underline{E}_3,$

3. $-(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2 + j\omega M_{13} - j\omega M_{25})\underline{I}_{m1} - \left(j\omega L_3 - j\omega M_{13}\right)\underline{I}_{m2}$
$+(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2 + R_5 + \frac{1}{j\omega C_5} + j\omega L_5 + j\omega L_3 - 2j\omega M_{25})\underline{I}_{m3} = -\underline{E}_3.$

Podstawiając dane otrzymuje się układ równań

$$\begin{bmatrix} 2-j & -1 & -1+\frac{3}{2}j \\ -1 & 2+\frac{1}{2}j & -\frac{1}{2}j \\ -1+\frac{3}{2}j & -\frac{1}{2}j & 2-2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{m1} \\ \underline{I}_{m2} \\ \underline{I}_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązując ten układ otrzymuje się

$$\underline{I}_{m1} = 0,8783 + j0,2368,$$
$$\underline{I}_{m2} = 1,4371 - j0,2581,$$
$$\underline{I}_{m3} = -0,06882 - j0,2499.$$

Napięcie $\underline{U}$ jest sumą trzech składowych

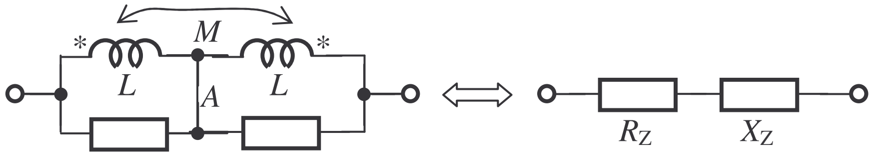
$$\underline{U} = j\omega L_1(\underline{I}_{m1} - \underline{I}_{m2}) + j\omega M_{13}\underline{I}_{m2} - j\omega M_{13}\underline{I}_{m3}.$$

Wartość numeryczna napięcia

$\underline{U} = -0,4908 + j0.1942 = 0,5278\,e^{j2,765\,rad}.$

Zad. 1.40

Wyznaczyć wartości elementów szeregowego połączenia R_Z, X_Z równoważnego układowi jak na rysunku poniżej. Dane: $L = 10\,\mathrm{mH}$, $M = 3\,\mathrm{mH}$, $R = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$, $\omega = 2\cdot 10^5\,\mathrm{rd/s}$.

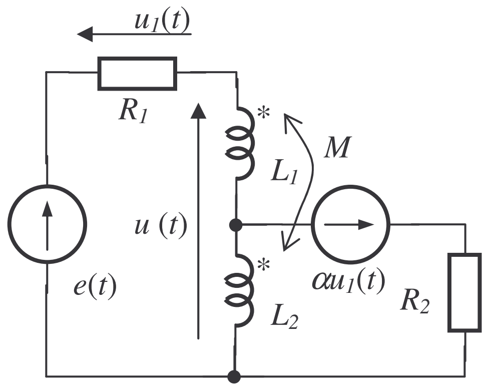


Wynik

$R_Z = 1{,}4\,\mathrm{k\Omega}$, $X_Z = \omega L_Z = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$. Uwaga: Wykorzystać symetrię obwodu można zauważyć, że nic się zmieni, jeśli połączenie A się usunie.

Zad. 1.41

Obliczyć napięcie $u(t)$.



Dane:

$R_1 = R_2 = 1\Omega$, $\alpha = 1$,

$L_1 = L_2 = M = 1\,\mathrm{H}$,

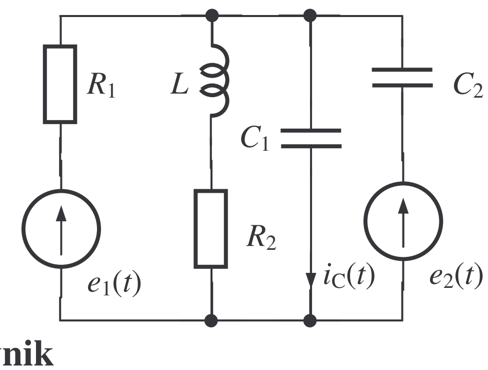
$e(t) = \sqrt{2}\cos(t)\,\mathrm{V}$,

Wynik

$$u(t) = \frac{\sqrt{20}}{5}\sin\left(t + 108{,}4^0\right)V\,.$$

Zad. 1.42

W obwodzie występuje stan ustalony. Wyznaczyć prąd $i_C(t)$.



Dane:

$e_1(t) = 2{,}8\sin\left(t + \pi/4\right)\mathrm{V}$,

$e_2(t) = \sqrt{2}/10\sin\left(t + \pi\right)\mathrm{V}$,

$R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $L = 1\,\mathrm{H}$,

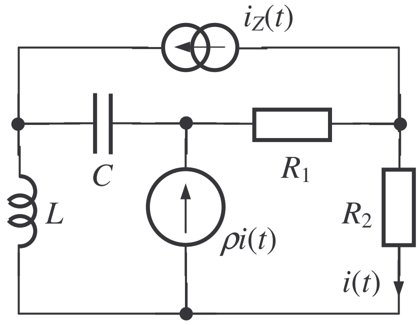
$C_1 = 1/2\,\mathrm{F}$, $C_2 = 1\,\mathrm{F}$.

Wynik

Stosujemy metodę napięć węzłowych ! $i_C(t) = \sqrt{2}/2\sin\left(t + \pi/2\right)\mathrm{A}$.

Zad. 1.43

Znaleźć napięcie $u_L(t)$ metodą napięć węzłowych.



Dane:

$i_Z(t) = \sqrt{2}\cos(2t)$,

$R_1 = R_2 = 1,\ \ \rho = 3$,

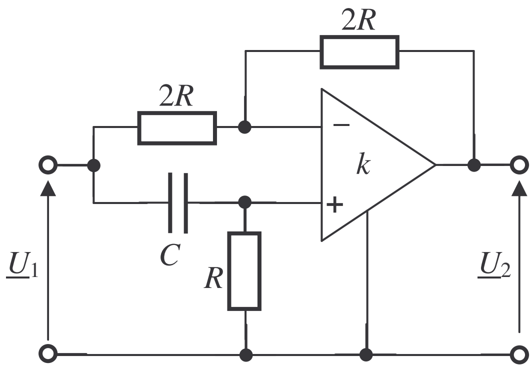
$L = 2, C = 1/2$.

Wynik

$u_L(t) \cong 5{,}963\sin\left(2t + 1{,}249\mathrm{r}\right)\mathrm{V}$.

Zad. 1.44

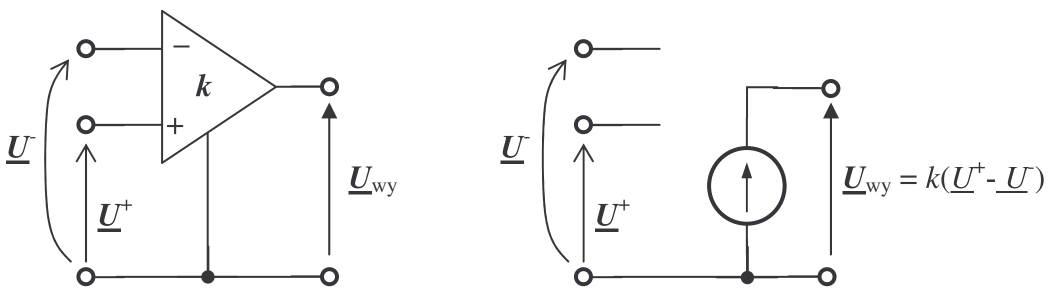
Wyznaczyć stosunek $\underline{T} = \underline{U}_1 / \underline{U}_2$ dla poniższego układu w dwóch przypadkach
1) współczynnik wzmocnienia idealnego wzmacniacza operacyjnego k jest skończone oraz
2) gdy $k \to \infty$.



Dane

$\omega = \dfrac{1}{RC}$.

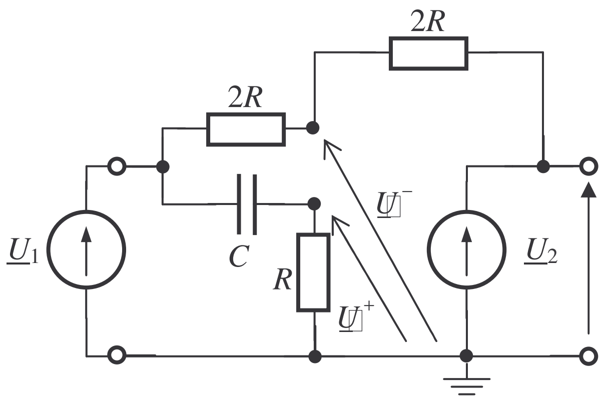
Rys. 1.44a Analizowany układ



Rys. 1.44b Schemat równoważny idealnego wzmacniacza operacyjnego.

Rozwiązanie

Narysujmy układ do analizy.



Zadanie rozwiążemy metodą napięć węzłowych. Do zacisków wejściowych należy dołączyć pobudzenie. Poszukiwany stosunek $\underline{T} = \underline{U}_1 / \underline{U}_2$ nie może zależeć od wartości pobudzenia ($\underline{U}_1 \neq 0$). Układamy następujący układ równań liniowych (równania wynikające bezpośrednio z metody):

$$1.\ \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)\underline{U}^+ - j\omega C\underline{U}_1 = 0,$$

$$2.\ \left(\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}\right)\underline{U}^- - \frac{1}{2R}\underline{U}_1 - \frac{1}{2R}\underline{U}_2,$$

oraz równanie sterowania:

$$3.\ \underline{U}_2 = k\left(\underline{U}^+ - \underline{U}^-\right).$$

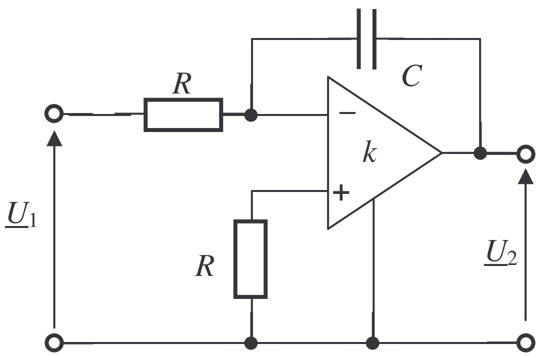
Rozwiązując ten układ równań (z 1. wyznaczamy $\underline{U}^+$, z 2. $\underline{U}^-$ i wstawiamy do 3.) otrzymujemy:

$$\underline{T} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = -\frac{k(1-\mathrm{j}\omega RC)}{(2+k)(1+\mathrm{j}\omega RC)} = -\frac{k}{(2+k)}\frac{1-\mathrm{j}\omega RC}{(1+\mathrm{j}\omega RC)}.$$

Gdy k jest skończone, wówczas $\underline{T}\big|_{\omega=\frac{1}{RC}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = -\frac{k(1-\mathrm{j})}{(2+k)(1+\mathrm{j})} = \frac{k}{2+k}\mathrm{j}$. Natomiast gdy $k \to \infty$, otrzymujemy: $\underline{T}\big|_{\omega=\frac{1}{RC}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = -\frac{1-\mathrm{j}\omega RC}{1+\mathrm{j}\omega RC} = -\frac{1-\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}} = \mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$.

Zad. 1.45

Wyznaczyć stosunek $\underline{T} = \underline{U}_1 / \underline{U}_2$ dla poniższego układu w przypadku gdy $k \to \infty$.

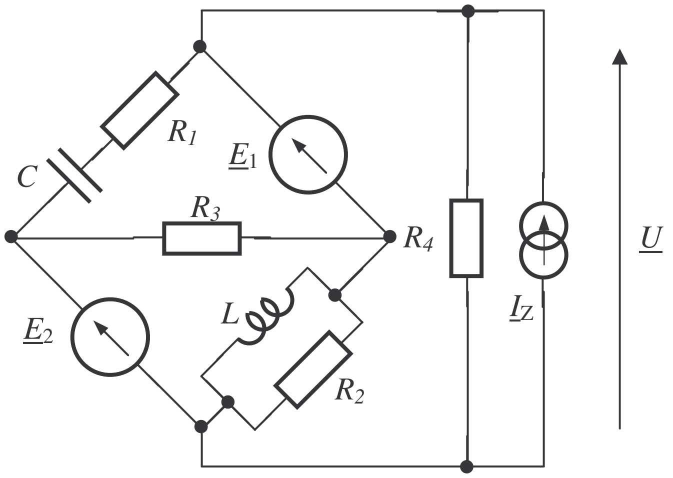


Wynik

$$\underline{T} = \underline{U}_2 / \underline{U}_1 = \mathrm{j}\frac{1}{\omega RC}$$

Zad. 1.46

W obwodzie występuje stan ustalony. Wyznaczyć napięcie $\underline{U}$ stosując metodę napięć węzłowych.



Dane

$\underline{E}_1 = 1,\ \underline{E}_2 = \mathrm{j}3,\ \underline{I}_Z = -4 - \mathrm{j}4,$

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 1,$

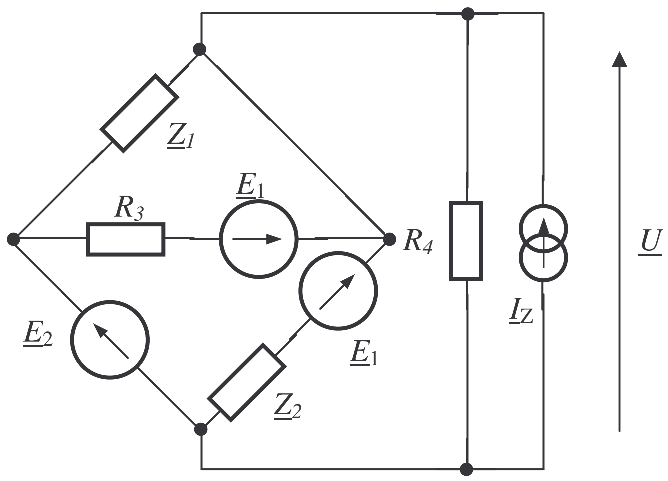
$L = 1,\ C = 1,\ \omega = 1/2.$

Wynik

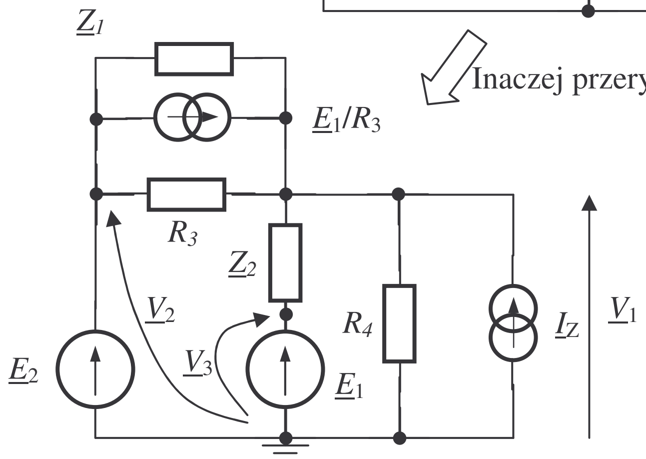
$$\underline{U} = -\frac{1}{2} - \mathrm{j}$$

Rozwiązanie

Nie można bezpośrednio zastosować metody napięć węzłowych, gdyż nie można wybrać węzła odniesienia (zgodnie z tą metodą źródła napięciowe powinny mieć wspólny węzeł). Należy zatem przekształcić obwód stosując zasadę ruchliwości źródeł. Poniżej pokazano sposób postępowania. Oznaczmy jako $\underline{Z}_1 = R_1 - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}$ oraz $\underline{Z}_2 = \left(\dfrac{1}{R_2} - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega L}\right)^{-1}$.



Inaczej przerysowany obwód.



Napiszmy teraz równania wynikające z metody napięć węzłowych.

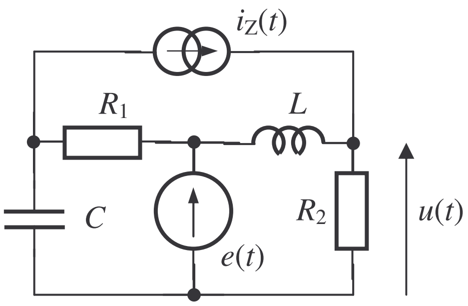
1. $\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}\right)\underline{V}_1-\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{\underline{Z}_1}\right)\underline{V}_2-\frac{1}{\underline{Z}_2}\underline{V}_3=\frac{\underline{E}_1}{R_3}+\underline{I}_Z$,
2. $\underline{V}_2=\underline{E}_2$,
3. $\underline{V}_3=\underline{E}_1$.

Oczywiście szukane $\underline{U}=\underline{V}_1$. Podstawiając dane i rozwiązując ten układ otrzymujemy :

$\underline{U}=\underline{V}_1=-\frac{1}{2}-\mathrm{j}$

Zad. 1.47

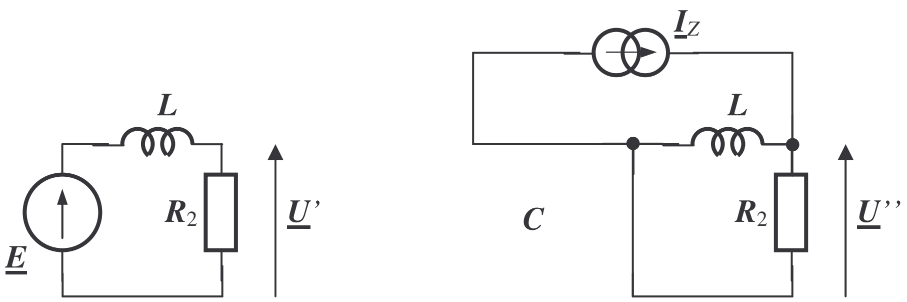
W obwodzie występuje stan ustalony. Wyznaczyć napięcie $u(t)$.



Dane:
$e(t)=\sin(t-\pi/4)$ V,
$i_Z(t)=\cos(2t-\pi/4)$ A,
$R_1=2\,\Omega$, $R_2=5\,\Omega$,
$C=1\,\mathrm{F}$, $L=1\,\mathrm{H}$.

Rozwiązanie

Należy zastosować zasadę superpozycji (pulsacje pobudzeń są różne).



Wyznaczamy przyczynek napięcia $\underline{U}'$ pochodzący od pobudzenia $\underline{E}$:

$$\underline{U}'=\frac{R_2}{R_2+\mathrm{j}\omega_1 L}\underline{E}=\frac{5}{13}-\frac{15}{26}\mathrm{j}\cong 0,6933\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0,9828\,\mathrm{rad}},\ \ \omega_1=1\,\mathrm{r/s}.$$

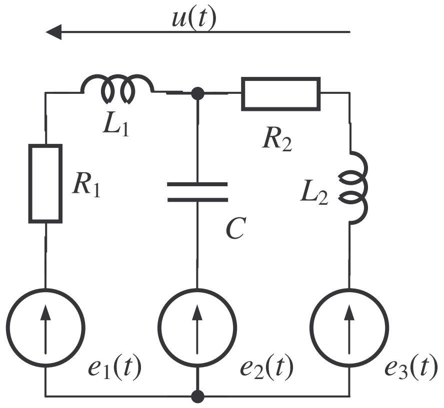
Wyznaczamy przyczynek napięcia $\underline{U}'$ pochodzący od pobudzenia $\underline{I}_Z$:

$$\underline{U}''=\frac{\mathrm{j}\omega_2 LR_2}{R_2+\mathrm{j}\omega_2 L}\underline{I}_Z=\frac{5}{29}(-3+7\mathrm{j})\cong 1,313e^{\mathrm{j}1,976\,\mathrm{rad}},\ \ \omega_2=2\ \mathrm{r/s}.$$

Ostatecznie $u(t)=0,98058\sin(t-0,98279)+1,857\sin(2t+1,976)$ V.

Zad. 1.47

W obwodzie występuje stan ustalony. Wyznaczyć napięcie $u(t)$.



Dane:

$e_1(t) = 1\,\mathrm{V} = \mathrm{const},\ e_2(t) = \sqrt{2}\sin(t)\,\mathrm{V},$

$e_3(t) = \sqrt{2}\sin(2t)\,\mathrm{V},\ C_1 = 1\,\mathrm{F},\ R_1 = R_2 = 1\,\Omega,$

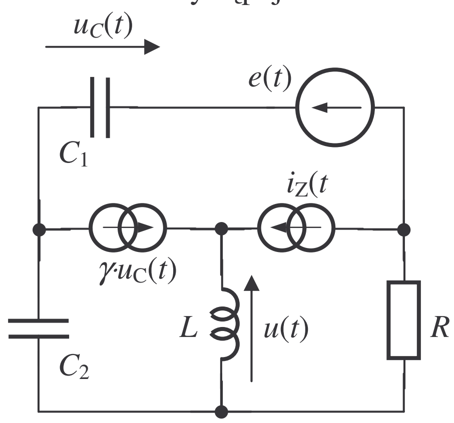
$L_1 = L_2 = 1\,\mathrm{H}.$

Wynik:

$u(t) = 0{,}5 + \sqrt{2}\sin(t) + \sqrt{5}/2\sin\left(2t + 1{,}8925\,\mathrm{r}\right)\mathrm{V}$

Zad. 1.48

W obwodzie występuje stan ustalony. Wyznaczyć napięcie $u(t)$.



Dane:

$e(t) = \sqrt{2}\sin\left(t - \pi\right)\mathrm{V},$

$i_Z(t) = \cos\left(2t - \pi/4\right)\mathrm{A},$

$C_1 = C_2 = 1\,\mathrm{F},\ R = 1\,\Omega,$

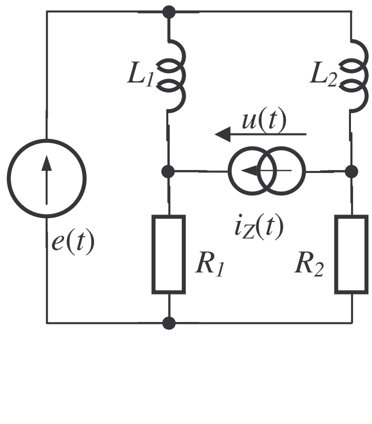
$L = 1\,\mathrm{H},\ \gamma = 1\,\mathrm{A/V}.$

Wynik

$$u(t) = 1{,}682\sin\left(2t - 1{,}08\ \mathrm{rad}\right) + 1{,}658\sin\left(t + 0{,}7854\,\mathrm{rad}\right)\mathrm{V}.$$

Zad. 1.49

W obwodzie występuje stan ustalony. Wyznaczyć napięcie $u(t)$ stosując zasadę superpozycji.



Dane:

$e(t) = \sin(2t)\,\mathrm{V},\ i_Z(t) = \frac{2}{3}\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{A},$

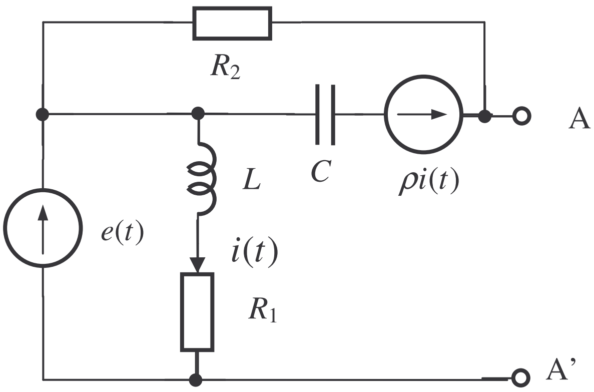
$R_1 = 2\,\Omega,\ R_2 = 1\,\Omega,\ L_1 = 1\,\mathrm{H},\ L_2 = \frac{1}{2}\mathrm{H}.$

Wynik:

$u(t) = \sqrt{2}\sin\left(2t\right)\mathrm{V}.$

Zad. 1.50

Wyznaczyć schemat równoważny dwójnika AA' (rys. 1.50a) wynikający, z tw. Thevenina. $e(t)=\sqrt{2}\cos(2t)$, $R_1=5$, $R_2=10$, $\rho=10$, $L=5$, $C=1/20$.



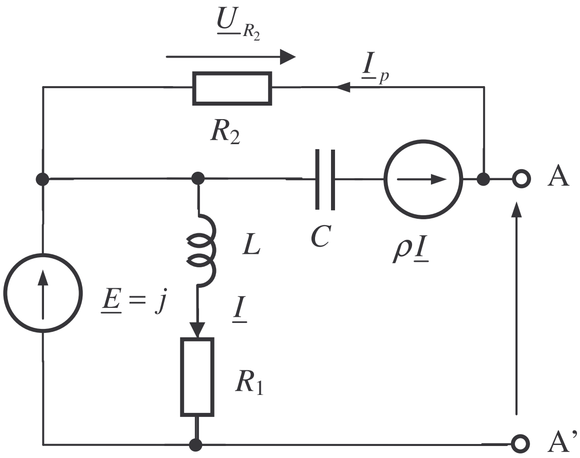
Rys. 1.50a

Wynik:

$$\underline{E}_g=\frac{1}{5}+j\frac{8}{5}$$

$$\underline{Z}_g=5-j5$$

Rozwiązanie:



Rys. 1.50b

Wyznaczenie napięcia biegu luzem $\underline{E}_g$

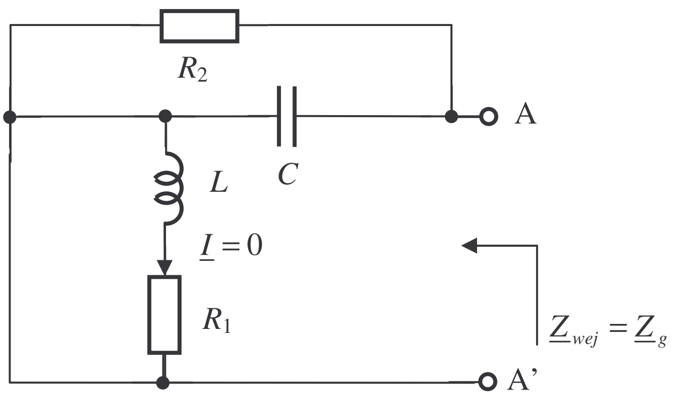
Napięcie $\underline{E}_g=\underline{U}_{AA'}=\underline{E}+\underline{U}_{R_2}$. W obwodzie (rys. 1.50b) są dwa niezależne oczka.

Zatem prąd $\underline{I}=\dfrac{\underline{E}}{R_1+j\omega L}$, $\underline{I}_p=\dfrac{\rho\underline{I}}{R_2+\dfrac{1}{j\omega C}}$,

a $\underline{E}_g=\underline{E}+\dfrac{j\omega C\rho R_2\underline{E}}{(1+j\omega CR_2)(R_1+j\omega L)}=\dfrac{1}{5}+j\dfrac{8}{5}$.

Wyznaczenie zastępczej impedancji generatora $\underline{Z}_g$

Wyłączając autonomiczne źródło napięciowe (w miejsce $\underline{E}$ wstawiamy zwarcie, rys 1.50b), przez gałąź R_1, L nie może płynąć prąd. Zatem $\underline{I}=0$ oraz $\rho\underline{I}=0$ tak, więc źródło sterowane jest również wyłączone. Z powyższych spostrzeżeń wynika, że

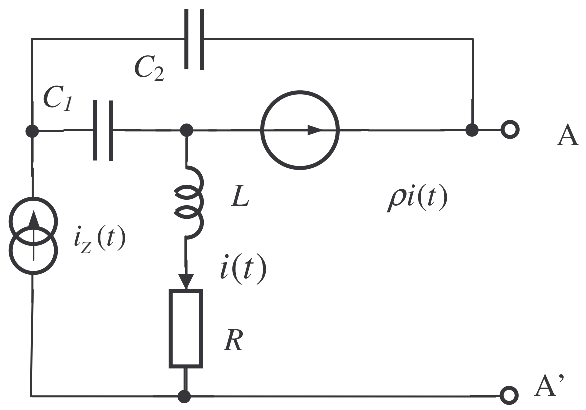


Rys. 1.50c

$$\underline{Z}_g=\underline{Z}_{wej}=\frac{R_2\dfrac{1}{j\omega C}}{R_2+\dfrac{1}{j\omega C}}=\frac{R_2}{1+j\omega R_2C}=5-5j.$$

Zad. 1. 51

Wyznaczyć schemat równoważny dwójnika AA' (rys. 1.51a) wynikający, z tw. Nortona. Dane: $i_Z(t) = 10\cos\left(2t + 45^0\right)$, $R = 2$, $\rho = 2$, $C_1 = 1/2$, $C_2 = 1/4$, , $L = 2$.



Rys. 1.51a

Wynik:

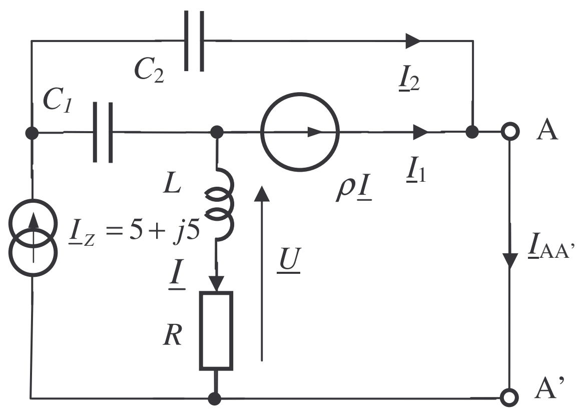
$\underline{I}_g = 5 + j5,$

$\underline{Y}_g = \frac{1}{8} - j\frac{1}{8}$

Rozwiązanie:

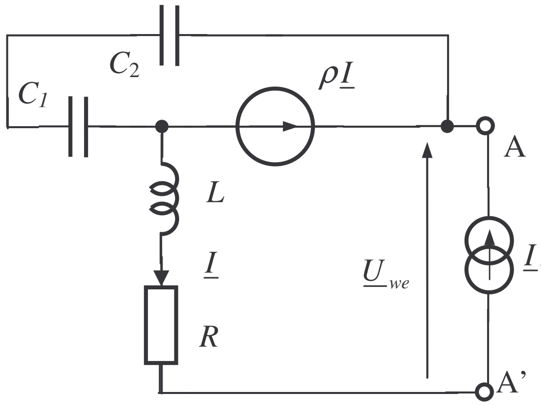
Wyznaczenie prądu zwarcia $\underline{I}_{AA'}$

Prąd $\underline{I}_{AA'} = \underline{I}_g = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ (rys. 1.51b). Na gałęzi *RL* występuje napięcie $\underline{U} = -\rho\underline{I}$, czyli prąd $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\omega L} = \frac{-\rho\underline{I}}{R + j\omega L}$. Równość ta jest możliwa tylko dla $\underline{I} = 0$. Zatem źródło sterowane jest wyłączone (stanowi zwarcie). Prąd źródła autonomicznego $\underline{I}_Z$ płynie dwoma drogami, część przez kondensator C_1 i część przez C_2 (tzn. $\underline{I}_2$). Przez kondensator C_1 płynie prąd $\underline{I}_1$, gdyż prąd $\underline{I} = 0$. Zatem $\underline{I}_{AA'} = \underline{I}_g = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 5 + j5$.



Rys. 1.51b

Wyznaczenie zastępczej impedancji generatora $\underline{Z}_g$



Rys. 1.51b

Podłączamy do zacisków AA' źródło prądowe o wydajności $\underline{I}_{we}$ (rys. 1.51b), stosunek $\frac{\underline{U}_{we}}{\underline{I}_{we}}$ określa impedancję wejściową $\underline{Z}_{we}$ dwójnika AA'.

Prąd $\underline{I} = \underline{I}_{we}$, zatem napięcie

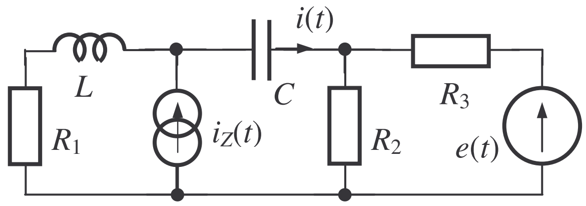
$$\underline{U}_{we} = \rho\underline{I} + \underline{I}(R + j\omega L) = \underline{I}_{we}(\rho + R + j\omega L).$$

Tak więc $\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{U}_{we}}{\underline{I}_{we}} = \rho + R + j\omega L$, a

$$\underline{Y}_{we} = \frac{1}{\underline{Z}_{we}} = \frac{1}{\rho + R + j\omega L} = \frac{1}{4 + j4} = \frac{1}{8} - j\frac{1}{8}$$

Zad. 1.52

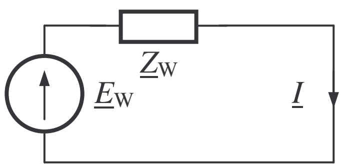
Obliczyć prąd $i(t)$. Zastosować twierdzenie Thevenina.



$e(t) = 20\sin(100t)$ V,
$i_Z(t) = 0,04\sin(100t)$ A,
$R_1 = 400\,\Omega,\ R_2 = 300\,\Omega,$
$R_3 = 500\,\Omega,\ L = 6\,\text{H},\ C = 25\,\mu\text{F}.$

Rozwiązanie.

Zgodnie z twierdzeniem Thevenina można skonstruować obwód zastępczy pokazany na rysunku.



SEM $\underline{E}_z$ można obliczyć przy rozwartych zaciskach kondensatora

$$\underline{E}_z = \underline{I}_z(R_1 + \mathrm{j}\omega L) - \underline{E}\frac{R_2}{R_2 + R_3} = 6,0104 + \mathrm{j}16,9706.$$

Impedancja $\underline{Z}_w$ to impedancja przy rozwartych zaciskach kondensatora i wyłączonych źródłach

$$\underline{Z}_w = R_1 + \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} = 587,5 + \mathrm{j}200.$$

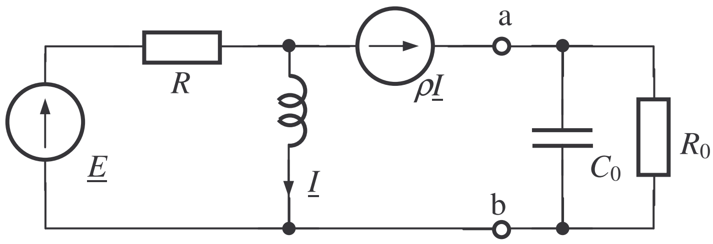
Tak więc

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_z}{\underline{Z}_w} = (17,9803 + \mathrm{j}22,7651)10^{-3}.$$

Prąd jest zatem równy
$i(t) = 41,0310^{-3}\sin(100t + 0,9023)$ A.

Zad. 1.53

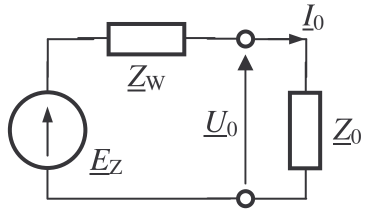
Obliczyć moce wydzielone w obciążeniu o impedancji $\underline{Z}_0$. Jakie wartości winny mieć elementy R_0 i C_0 aby w obciążeniu wydzieliła się maksymalna moc czynna. Obliczyć wartość tej mocy.



$\underline{E} = 100\,\mathrm{V},\ R = 500\,\Omega,\ R_0 = 200\,\Omega,$
$\rho = 300\,\Omega,\ L = 1\,\mathrm{H},\ C_0 = 2{,}5\,\mu\mathrm{F},$
$\omega = 10^3\ \mathrm{rad/s}.$

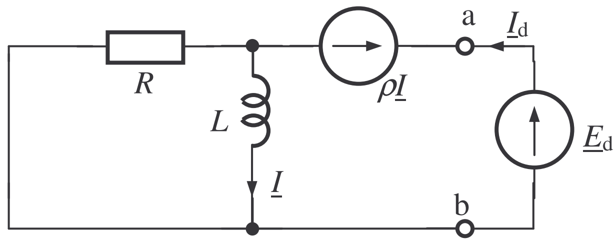
Rozwiązanie.

Na zaciskach a,b obciążenia zastosujemy twierdzenie Thevenina. Obwód zastępczy pokazano na rysunku.



$$\underline{E}_z = \underline{E}\frac{\mathrm{j}\omega L}{R+\mathrm{j}\omega L} + \rho\frac{\underline{E}}{R+\mathrm{j}\omega L} = 92 + \mathrm{j}16.$$

Impedancję $\underline{Z}_w$ obliczymy w obwodzie pokazanym na rysunku poniżej.



$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_d - \rho\underline{I}}{\mathrm{j}\omega L},\quad \underline{I} = \frac{\underline{E}_d}{\rho + \mathrm{j}\omega L},$$

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{E}_d - \rho\dfrac{\underline{E}_d}{\rho+\mathrm{j}\omega L}}{R} + \frac{\underline{E}_d}{\rho+\mathrm{j}\omega L}.$$

Stąd

$$\underline{Z}_w = \frac{\underline{E}_d}{\underline{I}_d} = R\frac{\rho+\mathrm{j}\omega L}{R+\mathrm{j}\omega L} = 460 + \mathrm{j}80,\qquad \underline{Z}_0 = \frac{R_0\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_0}}{R_0 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C_0}} = 160 - \mathrm{j}80.$$

Prąd i napięcie na obciążeniu

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{E}_z}{\underline{Z}_w + \underline{Z}_0} = 0{,}1439 + \mathrm{j}0{,}02581,\ \underline{U}_0 = \underline{I}_0\underline{Z}_0 = 25{,}8065 - \mathrm{j}7{,}7419.$$

Zespolona moc pozorna

$$\underline{S} = \underline{U}_0\underline{I}_0^* = 3{,}6296 - \mathrm{j}1{,}8148.$$

Moc czynna i bierna, wydzielone w obciążeniu

$$P = 3{,}6296\,\mathrm{W},\ Q = -1{,}8148\,\mathrm{VAr}.$$

Aby w obciążeniu wydzieliła się maksymalna moc czynna, impedancja obciążenia winna mieć wartość

$$\underline{Z}_{01} = \underline{Z}_w^* = 460 - \mathrm{j}80.$$

Admitancja takiego obciążenia winna być równa

$$\underline{Y}_{01} = \frac{1}{\underline{Z}_{01}} = 0,0021101 + \mathrm{j}0,000367,$$

skąd

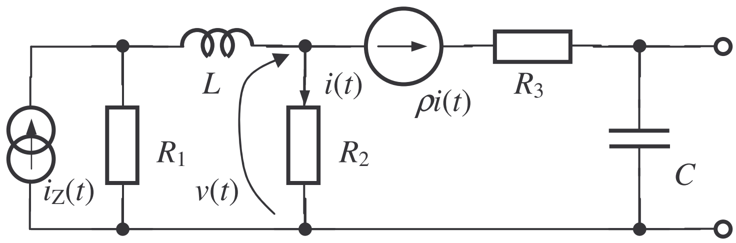
$$R_{01} = \frac{1}{\mathrm{Re}\{\underline{Y}_{01}\}} = 473,9\,\Omega,\ \ C_{01} = \frac{\mathrm{Im}\{\underline{Y}\}}{\omega} = 0,367\,\mu\mathrm{F}.$$

Maksymalna moc czynna w warunkach dopasowania energetycznego

$$P_{\max} = \frac{|\underline{E}_z|^2}{4\,\mathrm{Re}\{\underline{Z}_w\}} = 4,7391\,\mathrm{W}.$$

Zad. 1.54

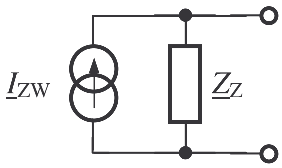
Na rysunku pokazano schemat zastępczy pewnego rzeczywistego źródła prądowego. Jaką mocą czynna dysponuje takie źródło?



$$i_z(t) = 5\sin(314t),\ \ R_1 = 100\,\Omega,$$
$$L = 3,185\,\mathrm{H},\ \ C{=}2\ \mathrm{nF},\ \ R_2 = 500\,\Omega,$$
$$R_3 = 500\,\Omega,\ \ \rho = 1\,\mathrm{k}\Omega.$$

Rozwiązanie.

Znajdziemy obwód zastępczy wynikający z twierdzenia Nortona.



Po zwarciu zacisków wyjściowych, dla symbolicznej wartości napięcia $v(t)$ można zapisać

$$\underline{V}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + \mathrm{j}\omega L} + \frac{1}{R_3}\right) = \underline{I}_z \frac{R_1}{R_1 + \mathrm{j}\omega L} - \rho \frac{\underline{V}}{R_2}\frac{1}{R_3},$$

skąd

$$\underline{V} = 9,4629 - \mathrm{j}42,061.$$

$$\underline{I}_{zw} = \underline{V}\,\frac{1 + \dfrac{\rho}{R_2}}{R_3} = 0,05678 - \mathrm{j}0,2523.$$

Po rozwarciu źródła prądowego można obliczyć impedancję w kierunku strzałki na rysunku

$$\underline{Z}_{w1} = \frac{R_2 + \rho}{1 + \dfrac{R_2}{R_1 + \mathrm{j}\omega L}} = 1169,16 + \mathrm{j}551,45.$$

Impedancja wewnętrzna

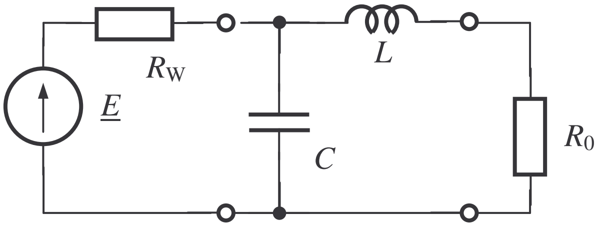
$$\underline{Z}_w = \frac{(\underline{Z}_{w1} + R_3)\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{\underline{Z}_{w1} + R_3 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = 1670,32 + \mathrm{j}549,89.$$

Moc dysponowana źródła

$$P_d = \frac{|\underline{I}_{zw}\underline{Z}_w|^2}{4\,\mathrm{Re}(\underline{Z}_w)} = 30{,}97\,\mathrm{W}.$$

Zad. 1.55

W celu dopasowania rezystora R_0 = 100 Ω do źródła o rezystancji wewnętrznej R_w = 200 Ω zastosowano układ *LC*, pokazany na rysunku. Obliczyć jakie parametry muszą mieć kondensator oraz induktor aby w układzie wystąpiło dopasowanie.



Rozwiązanie.

Impedancja wejściowa układu od strony zacisków obciążenia

$$\underline{Z}_w = \frac{R_w \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R_w + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} + \mathrm{j}\omega L.$$

W warunkach dopasowania

$$\mathrm{Re}\{\underline{Z}_w\} = R_0,$$

$$\mathrm{Im}\{\underline{Z}_w\} + \omega L = 0.$$

Rozwiązanie pierwszego równania daje wartość pojemności kondensatora

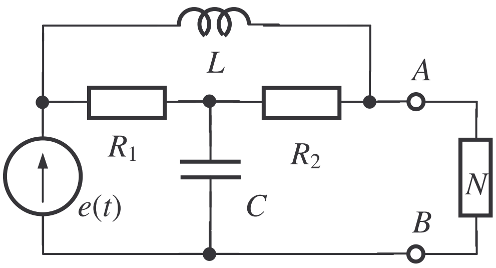
$$C = \frac{1}{\omega R_w}\sqrt{\frac{R_w}{R_0} - 1} = 5\,\mu\mathrm{F},$$

rozwiązanie drugiego równania indukcyjność induktora

$$L = \frac{R_w^2 C}{1 + (\omega R_w C)^2} = 0{,}1\,\mathrm{H}.$$

Zad. 1.56

Znaleźć strukturę i wartości elementów dwójnika N, tak aby wydzieliła się w nim maksymalna moc czynna. Obliczyć tę moc.



Dane:
R_1 = 1 Ω, R_2 = 1 Ω,
$L = 1\ H$, $C = \frac{1}{2}\ F$,
$e(t) = \sqrt{2}\ 10\cos(2t)\ V$

Wyniki:

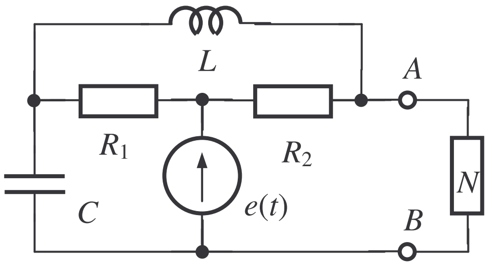
$$\underline{Z}_g = \left(\frac{4}{3} + \mathrm{j}\frac{2}{3}\right)\Omega, \qquad \underline{Y}_g = \left(\frac{3}{5} - \mathrm{j}\frac{3}{10}\right)\Omega,$$

$$\underline{E}_g = \left(\frac{20}{3} + \mathrm{j}10\right)\mathrm{V}, \qquad \underline{I}_g = (7 + 4\mathrm{j})\,\mathrm{A},$$

$$\mathrm{P}_{\max} = \frac{325}{12} W.$$

Zad. 1.57

Znaleźć strukturę i wartości elementów dwójnika N, tak aby wydzieliła się w nim maksymalna moc czynna. Obliczyć tę moc.



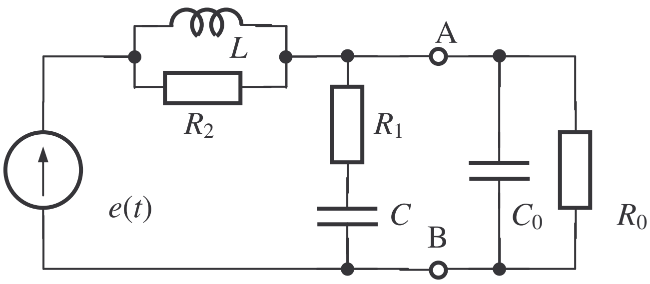
Dane:
$R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$,
$L = 1\ H$, $C = \frac{1}{2}\ F$,
$e(t) = \sqrt{2}\ 5\cos(2t)\ V$

Wynik

$\underline{E}_g = 10j/3V$, $\underline{I}_g = (2+4j)A$, $\underline{Z}_g = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}j\right)\Omega$, $P_{max} = \frac{25}{6}W$.

Zad. 1.58

Dobrać tak R_0 i C_0 by w tym dwójniku wydzieliła się maksymalna moc czynna. Wyznaczyć tę moc.

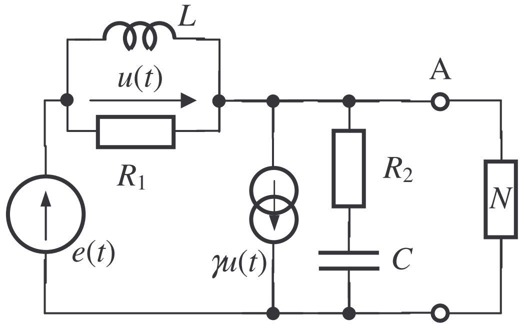


Dane:
$e(t) = 3\sqrt{2}\sin\left(2t - \pi/4\right)$ V,
$R_1 = R_2 = 1\ \Omega$,
$C = 1/4$ F, $L = 1/2$ H.

Wynik: $R_0 = \frac{5}{6}\Omega$, $C_0 = \frac{3}{10}F$, $P_{max} = \frac{15}{4}W$.

Zad. 1.59

Obliczyć elementy (R_0 i C_0 lub R_0 i L_0), dwójnika **N,** które zapewnią dopasowanie tego dwójnika na maksymalną moc czynną. Obliczyć tę moc.



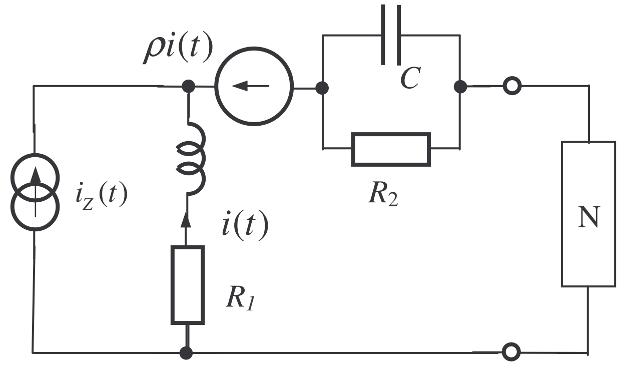
$e(t) = 2\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$, $L = \frac{4}{5}$,

$R_1 = \frac{1}{2}, R_2 = 1, \gamma = \frac{1}{2}, C = 2.$

Wynik: $\underline{I}_g = -5j$A, $\underline{Y}_g = (3-2j)S$, $P_{max} = \frac{25}{12}$. Dwójnik N to np. równoległe połączenie rezystora $R_0 = \frac{1}{3}\Omega$ oraz kondensatora $C_0 = 4F$.

Zad. 1.60

Obliczyć elementy (R_o i C_o lub R_o i L_o), dwójnika **N,** które zapewnią dopasowanie tego dwójnika na maksymalną moc czynną. Obliczyć tę moc.



$i_Z(t) = 3\sin\left(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)V,$

$R_1 = \frac{3}{2}\Omega,\qquad R_2 = 2\Omega,$

$C = 1F,\qquad \rho = \frac{1}{2}\Omega,$

$L = 4H.$

Wynik:

$\underline{E}_g = 4\mathrm{j}\,\mathrm{V},\ \underline{Z}_g = (3+\mathrm{j})\Omega,\ \mathrm{P}_{\max} = 4/3W$ **.** Dwójnik N składa się np. z szeregowo połączonego rezystora $R_0 = 3\Omega$ i kondensatora $C_0 = \frac{1}{2}F$.

Opracował i napisał:

Czesław Michalik Czeslaw.Michalik@pwr.wroc.pl
Instytut Telekomunikacji i Akustyki I-28
Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27

Mile widziane uwagi dotyczące dostrzeżonych błędów.