

Ćwiczenie 7

Prawa autorskie zastrzeżone:
Zakład Teorii Obwodów PWr

SPRZĘŻENIE ZWROTNE

Celem ćwiczenia jest:

- zapoznanie się z podstawowym modelem sprzężenia zwrotnego,
- poznanie metod badania własności układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego na podstawie pomiaru układu z otwartą pętlą.

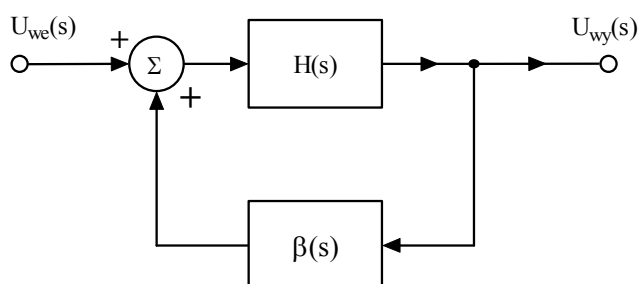
W ćwiczeniu należy:

- zmierzyć transmitancję układu otwartego,
- na podstawie sporządzonego diagramu Nyquista zbadać stabilność układu z zamkniętą pętlą,
- zbadać wpływ sprzężenia zwrotnego na wrażliwość parametrów układu.

A. Wprowadzenie

1. Wstęp

Podstawowy model układu z pojedynczą pętlą sprzężenia zwrotnego pokazano na rys. 1.



Rys. 1

W układzie tym napięcie wyjściowe z bloku o transmitancji $H(s)$, po przejściu przez blok o transmitancji $\beta(s)$, modyfikuje napięcie wejściowe. Sprzężenie zwrotne może być efektem niepożądanym, wynikającym ze sprzężeń pasożytniczych między wejściem a wyjściem układu $H(s)$, ale również może być świadomie wprowadzone w celu odpowiedniego ukształtowania charakterystyki częstotliwościowej, zmniejszenia wpływu nieliniowości toru podstawowego lub zmniejszenia wrażliwości transmitancji układu na zmiany wartości elementów. Ponieważ obwód sprzężenia zwrotnego stanowi pętlę przepływu sygnałów, więc w niektórych przypadkach układ może być niestabilny. Własność ta niekiedy może być pożądana - umożliwia budowę generatorów przebiegów okresowych.

2. Stabilność układu ze sprzężeniem zwrotnym

Funkcja transmitancji układu ze sprzężeniem zwrotnym

$$T(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{H(s)}{1 - H(s)\beta(s)} = \frac{L_T(s)}{M_T(s)}, \quad (1)$$

gdzie $L_T(s)$ oraz $M_T(s)$ są wielomianami zmiennej zespolonej s o współczynnikach rzeczywistych. Można wykazać, że stopień wielomianu $L_T(s)$ jest równy stopniowi wielomianu $M_T(s)$. Do badania stabilności można wykorzystać kryterium algebraiczne, zgodnie z którym warunkiem stabilności w sensie BIBO układu jest warunek, aby wielomian $M_T(s)$ był wielomianem Hurwitza. Kryterium takie wymaga jednak znajomości analitycznej postaci transmitancji układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego. W wielu przypadkach analityczna postać $H(s)$ i $\beta(s)$ nie jest znana lub znana jest tylko w przybliżeniu. Korzystne byłoby więc sformułowanie kryterium umożliwiającego ocenę stabilności układu zamkniętego na podstawie **pomiarów** układu z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego. Jednym z takich kryteriów jest kryterium Nyquista. Oznaczając

$$Q(s) = H(s)\beta(s) = \frac{L_Q(s)}{M_Q(s)}, \quad (2)$$

zależność (1) można zapisać w postaci

$$T(s) = \frac{H(s)}{1 - Q(s)} = \frac{H(s)}{F(s)}, \quad (3)$$

gdzie **różnica zwrotna** $F(s) = 1 - Q(s)$.

$Q(s)$ jest transmitancją **otwartej** pętli sprzężenia zwrotnego, nazywaną **stosunkiem zwrotnym**.
Transmitancje

$$\beta(s) = \frac{L_\beta(s)}{M_\beta(s)} \text{ oraz } H(s) = \frac{L_H(s)}{M_H(s)}$$

mają liczniki i mianowniki będące wielomianami o współczynnikach rzeczywistych. Z faktu, że bloki H i β są stabilne w sensie BIBO wynika, że

$$\begin{aligned} st L_\beta(s) &\leq st M_\beta(s), M_\beta(s) \in WH, \\ st L_H(s) &\leq st M_H(s), M_H(s) \in WH. \end{aligned} \quad (4)$$

Zapiszmy różnicę zwrotną

$$F(s) = 1 - H(s)\beta(s) = 1 - \frac{L_H(s)}{M_H(s)} \frac{L_\beta(s)}{M_\beta(s)} = \frac{L_F(s)}{M_F(s)}. \quad (5)$$

Z (4) wynika, że

$$st L_F(s) \leq st M_F(s), M_F(s) \in WH,$$

natomiast z (1) wynika, że $L_F(s)$ jest wielomianem charakterystycznym układu ze sprzężeniem zwrotnym (mianownikiem funkcji $T(s)$ $L_F(s) = M_T(s)$).

Można sformułować twierdzenie o stabilności układu ze sprzężeniem zwrotnym [1]:

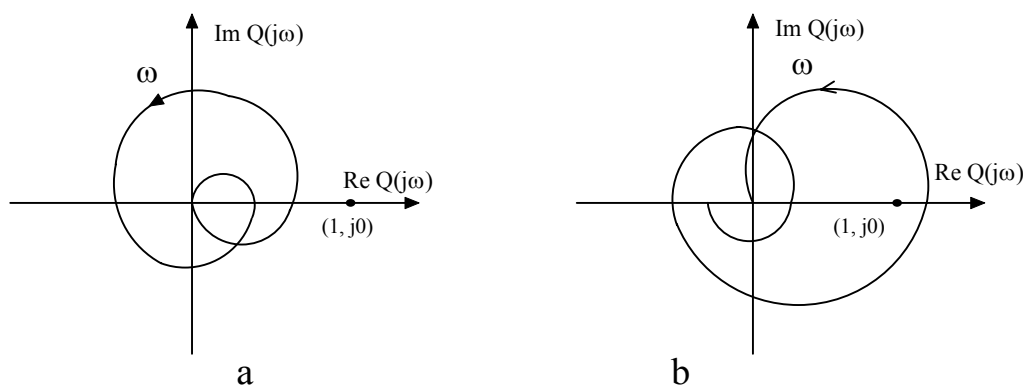
Twierdzenie Nyquista

Układ z rozwartą pętlą sprzężenia zwrotnego, będący kaskadowym połączeniem stabilnych w sensie BIBO bloków, dla którego wyznaczono różnicę zwrotną $F(s)$ w postaci funkcji wymiernej zawierającej w liczniku wielomian charakterystyczny układu, w mianowniku wielomian tego samego stopnia, będzie stabilny w sensie BIBO po zwarcie pętli sprzężenia zwrotnego wtedy i tylko wtedy, gdy

- różnica zwrotna nie ma zer na osi liczb urojonych płaszczyzny s ,
- różnica zwrotna spełnia warunek $\Delta \arg F(j\omega) = \arg F(\infty) - \arg F(0) = 0$.

Równoważnie można powiedzieć że, gdy hodograf funkcji $F(j\omega)$ na płaszczyźnie $\{\operatorname{Re} F(j\omega), \operatorname{Im} F(j\omega)\}$ nie otacza początku układu współrzędnych (punkt krytyczny płaszczyzny) ani nie przechodzi przez ten punkt, to układ dla którego wyznaczono $F(j\omega)$ jest układem stabilnym w sensie BIBO. W praktyce najczęściej konstruuje się diagram Nyquista stosunku zwrotnego $Q(j\omega) = 1 - F(j\omega)$. Jest oczywiste, że diagram Nyquista stosunku zwrotnego $Q(j\omega)$, obliczonego dla układu stabilnego, nie może otaczać ani przechodzić przez punkt krytyczny płaszczyzny $\{\operatorname{Re} Q(j\omega), \operatorname{Im} Q(j\omega)\}$ (1, 0). Jeżeli różnica zwrotna jest wyznaczona w postaci $F(j\omega) = 1 + H(j\omega)\beta(j\omega)$, wtedy stosunek zwrotny $Q(j\omega) = K(j\omega)[- \beta(j\omega)]$. Sytuacja taka wystąpi w przypadku, gdy sygnał sprzężenia zwrotnego w węźle sumacyjnym będzie odejmowany (tak jest w zestawie laboratoryjnym, gdyż rozwierając pętlę sprzężenia zwrotnego za pomocą przełącznika P_1 , powoduje automatyczne ustawienie przełącznika P_2 „-, ±” w położenie „+”). Zmieniając znak na sumatorze z „+” na „-”, (w przypadku pętli zamkniętej) dodajemy w torze β dodatkowy przesuwnik fazy o 180° . Wówczas wszystkie wzory pozostają dalej w mocy, tylko w miejsce β należy wstawić $-\beta$.

Przykładowe diagramy Nyquista układu stabilnego i niestabilnego przedstawiono odpowiednio na rys. 2a i 2b.



Rys. 2

Miarę stabilności układu (w przypadku układu stabilnego) można oszacować wprowadzając pojęcia zapasu stabilności amplitudy ΔM i zapasu stabilności fazy $\Delta \varphi$. Miary te zdefiniowane są następująco:

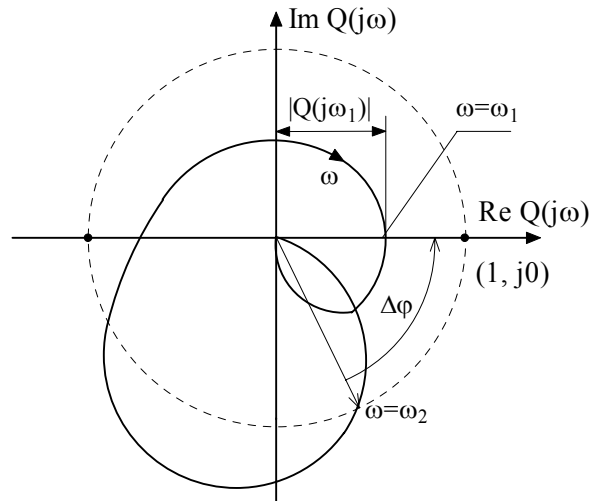
$$\Delta M = \frac{1}{|Q(j\omega_1)|}, \quad \Delta \varphi = -\arg Q(j\omega_2), \quad (6)$$

gdzie ω_1 i ω_2 spełniają odpowiednie warunki

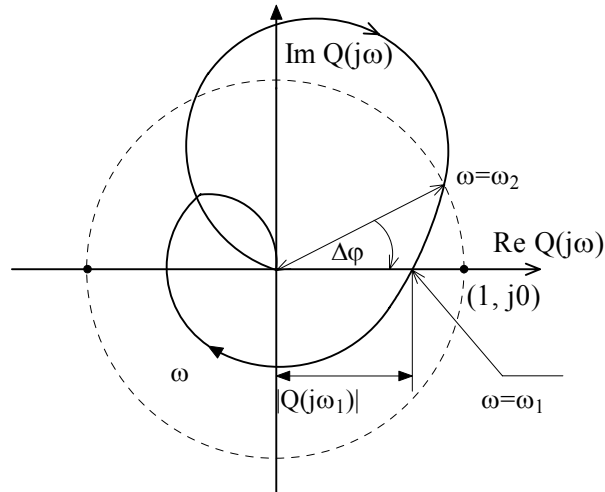
$$\arg Q(j\omega_1) = \pm 2n\pi, \quad (7a)$$

$$|Q(j\omega_2)| = 1, \quad (7b)$$

przy czym w zależności (7a) należy wybrać taką wartość n , przy której $|Q(j\omega_1)|$ ma wartość największą (mniejszą od jedności), natomiast z warunku (7b) wybiera się taką pulsację ω_2 , która daje najmniejszą wartość $\Delta\varphi$ z definicji (6), z której wynika ponadto, że zapas fazy $\Delta\varphi$ to kąt przeciwny do argumentu $Q(j\omega_2)$. W przypadku ustawienia przełącznika P_2 na „+” sytuację zilustrowano na rys. 3a. Dla ustawienia przełącznika na „-”, zapas fazy i amplitudy pokazano na rys. 3b.



Rys. 3a



Rys. 3b

Należy zwrócić uwagę na fakt, że określenie zapasu fazy ma sens, gdy istnieje taka wartość pulsacji ω_0 , że $|Q(j\omega_0)| > 1$ oraz nie istnieje pulsacja ω_1 taka, że dla

$\text{Im } Q(j\omega_1) = 0$, $\text{Re } Q(j\omega_1) > 1$. Można powiedzieć, że gdy $\bigwedge_{\omega \in [0, \infty]} |Q(j\omega)| < 1$ „zapas fazy jest równy 2π (360°)”.

Kryterium amplitudowo-fazowe

W praktyce bardzo wygodnym kryterium stabilności jest tzw. kryterium amplitudowo-fazowe. Kryterium to orzeka, że jeżeli istnieje taka pulsacja ω , przy której

$$\text{Re } Q(j\omega) \geq 1 \wedge \text{Im } Q(j\omega) = 0,$$

to układ z monotoniczną charakterystyką fazową stabilny w stanie rozwarcia pętli staje się niestabilny po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego.

3. Wrażliwość układów ze sprzężeniem zwrotnym

Niech x będzie dowolnym parametrem w układzie o transmitancji $H(j\omega)$ (np. wartością rezystancji, pojemności, wzmocnieniem wzmacniacza w tym układzie). Wrażliwość transmitancji $H(j\omega)$ na zmiany x definiuje się jako

$$\underline{S}_x^H = \frac{d(\ln H)}{d(\ln x)} = \frac{dH}{dx} \frac{x}{H}. \quad *) \quad (8)$$

Podobnie, jeżeli y jest parametrem w układzie o transmitancji $\beta(j\omega)$, wrażliwość $\beta(j\omega)$ na zmiany y definiuje się jako

$$\underline{S}_y^\beta = \frac{d(\ln \beta)}{d(\ln y)} = \frac{d\beta}{dy} \frac{y}{\beta}. \quad (9)$$

Zachodzi pytanie, w jaki sposób zmiana parametru x bądź y będzie wpływać na transmitancję układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego, tj. na $T(j\omega)$.

Wrażliwość $T(j\omega)$ na zmiany x definiuje się jako

$$\underline{S}_x^T = \frac{d(\ln T)}{d(\ln x)} = \frac{dT}{dx} \frac{x}{T}. \quad (10)$$

Po obliczeniu pochodnej

$$\frac{dT}{dx} = \frac{\frac{dH}{dx}}{(1 \mp H\beta)^2} \quad (11)$$

i podstawieniu do (10) otrzymuje się:

$$\underline{S}_x^T = \frac{1}{1 \mp H\beta} \underline{S}_x^H. \quad (12)$$

W powyższych wzorach, znak „+” obowiązuje wówczas gdy przełącznik P_2 na sumatorze jest ustawiony na „-”, a „-” gdy przełącznik P_2 jest ustawiony na „+”.

*) Dalej we wzorach \underline{X} oznacza wartość odpowiedniej transmitancji $X(j\omega)$ dla wybranej pulsacji ω_0 .

Z powyższej zależności wynika, że w przypadku, gdy $|1 \mp H(j\omega)\beta(j\omega)| > 1$, wrażliwość transmitancji układu na zmiany x ulega zmniejszeniu. Przy dostatecznie dużych wartościach $|H(j\omega)\beta(j\omega)|$ wrażliwość ta dąży do 0.

Istotnie, z zależności

$$\lim T(j\omega) = \mp \frac{1}{\beta(j\omega)}, \quad (13)$$

gdy $|H(j\omega)| \rightarrow \infty$,

wynika, że przy dużych wartościach $|H(j\omega)|$ transmitancja $T(j\omega)$ zależy przede wszystkim od transmitancji $\beta(j\omega)$. Można więc powiedzieć, że sprzężenie zwrotne wpływa stabilizująco na transmitancję $T(j\omega)$ ze względu na zmiany $H(j\omega)$.

W podobny sposób można wyznaczyć wrażliwość

$$\underline{S}_y^T = \frac{d(\ln T)}{d(\ln y)} = \pm \frac{\underline{H}\underline{\beta}}{1 \mp \underline{H}\underline{\beta}} \underline{S}_y^\beta. \quad (14a)$$

W tym jednak przypadku, przy dużych wartościach $|H(j\omega)\beta(j\omega)|$, wrażliwość $\underline{S}_y^T \approx \underline{S}_y^\beta$, czyli sprzężenie zwrotne nie powoduje stabilizacji transmitancji $T(j\omega)$ na zmiany $\beta(j\omega)$.

Często (m.in. ze względów pomiarowych) wygodne jest wprowadzenie wrażliwości $T(j\omega)$ na zmiany $H(j\omega)$ i $\beta(j\omega)$, a nie na zmiany parametrów tych układów. Bezpośrednio z definicji wrażliwości wynikają tożsamości:

$$\underline{S}_x^T = \underline{S}_H^T \underline{S}_x^H, \quad (14b)$$

$$\underline{S}_y^T = \underline{S}_\beta^T \underline{S}_y^\beta, \quad (14c)$$

z których, po porównaniu z (10) i (12a) otrzymuje się

$$\underline{S}_H^T = \frac{1}{1 \mp \underline{H}\underline{\beta}}, \quad (15a)$$

$$\underline{S}_\beta^T = \pm \frac{\underline{H}\underline{\beta}}{1 \mp \underline{H}\underline{\beta}}, \quad (15b)$$

tak więc, gdy $|H(j\omega)| \rightarrow \infty$, wówczas $\underline{S}_H^T \rightarrow 0$ i $\underline{S}_\beta^T \rightarrow \pm 1$, co jest zgodne z poprzednimi wnioskami.

W praktyce, przy pomiarach wrażliwości, różniczki $d\underline{T}$, $d\underline{H}$ i $d\underline{\beta}$ zastępuje się przyrostami skończonymi $\Delta \underline{T}$, $\Delta \underline{H}$, $\Delta \underline{\beta}$, czyli przyjmuje się, że

$$\underline{S}_H^T = \frac{\Delta \underline{T}}{\Delta \underline{H}} \frac{\underline{H}}{\underline{T}}, \quad (16a)$$

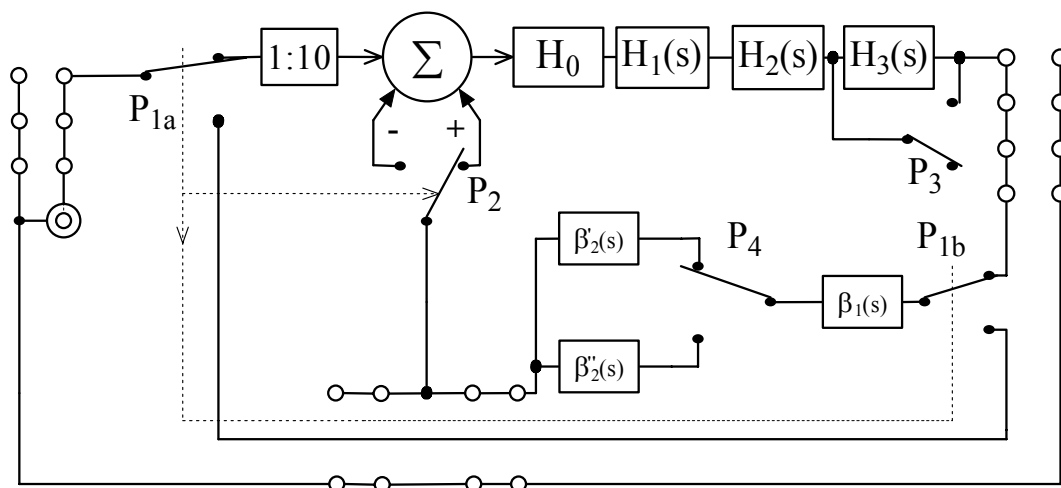
$$\underline{S}_\beta^T = \frac{\Delta \underline{T}}{\Delta \underline{\beta}} \frac{\underline{\beta}}{\underline{T}}. \quad (16b)$$

B. Część laboratoryjna

Wykaz przyrządów

- zestaw laboratoryjny,
- generator z wewnętrznym częstotściomierzem,
- woltomierz (3 szt.),
- miernik fazy (2 szt.),
- oscyloskop.

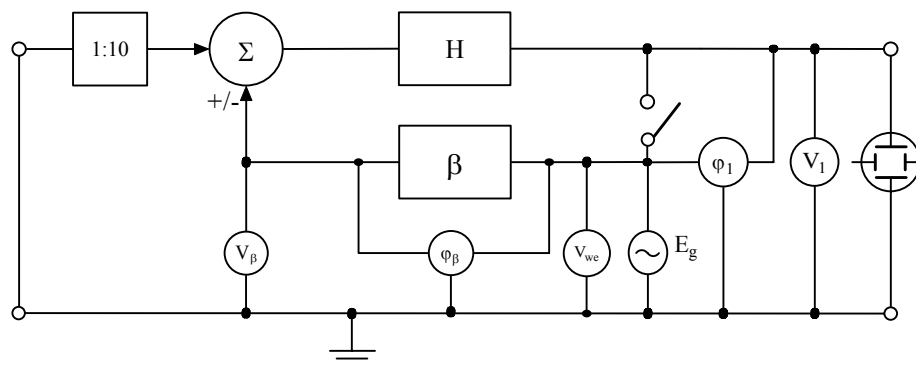
Przed przystąpieniem do pomiarów w porozumieniu z prowadzącym należy wybrać konfigurację badanego układu (ustalić położenie przełączników H_0 , P_3 , P_4 na płycie czołowej zestawu laboratoryjnego). Zalecane jest takie ustawienie przełączników, aby układ z zamkniętą pętlą był stabilny, gdy przełącznik operacji sumatora jest ustawiony na „+” (lub „-”), a niestabilny, gdy przełącznik jest ustawiony na „-” (lub „+”).



Rys. 4

1. Pomiary charakterystyk układu otwartego

Pomiary wykonuje się w układzie na rys. 5. W układzie tym możliwy jest jednoczesny pomiar charakterystyk amplitudowych i fazowych bloków H , β oraz $Q = H\beta$.



Rys. 5

Na podstawie uzyskanych wyników należy wykreślić dwa diagramy Nyquista: jeden gdy przełącznik P_2 jest ustawiony na „+” i drugi, w przypadku gdyby przełącznik P_2 był ustawiony na „-”. Wykreślić również charakterystyki amplitudowe i fazowe bloków H i β . W przypadku, gdy z diagramów Nyquista wynika, że układ po zamknięciu pętli będzie stabilny, określić zapas amplitudy ΔM i $\Delta \varphi$.

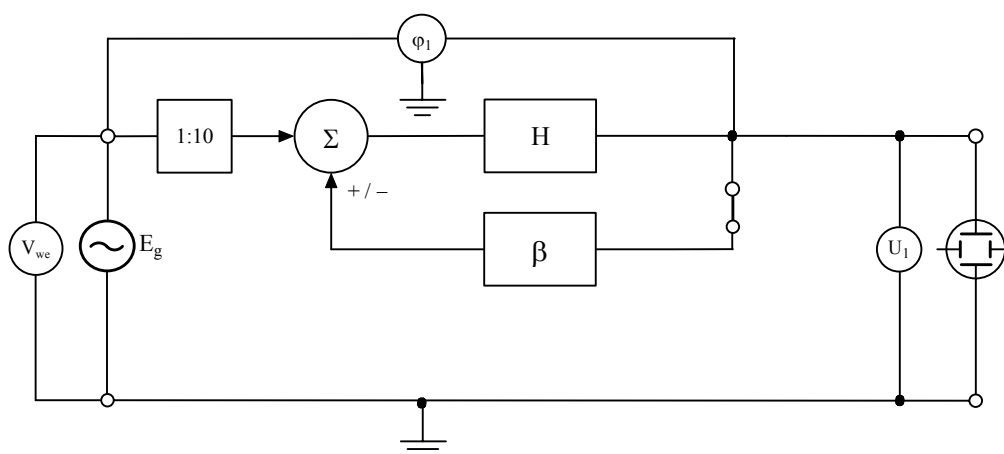
Uwaga 1 Częstotliwość napięcia generatora należy zmieniać w taki sposób, aby charakterystyka fazowa otwartej pętli zmieniała się w kolejnych punktach pomiarowych nie więcej niż o 30° .

Uwaga 2 Należy pamiętać, że miernik fazy mierzy poprawnie, jeśli wartość skuteczna napięć na jego wejściach A i B mieści się w przedziale $\{15\text{mV}, 3\text{V}\}$.

Uwaga 3 W trakcie wykonywania pomiarów należy kontrolować, czy układ nie jest przesterowany. Obserwacja napięcia wyjściowego na ekranie oscyloskopu nie zawsze jest wystarczająca. W badanym zestawie, jeżeli wartość skuteczna napięcia na wyjściu członu H nie przekracza 5V, układ pracuje w zakresie liniowym. Zalecaną wartością skuteczną napięcia generatora jest 1V. Pomiaru kończymy, jeżeli napięcie wskazywane przez woltomierz $V_{wy} < 15\text{mV}$. Zwykle ma to miejsce przy częstotliwości kilka kHz. Do tej częstotliwości wskazania miernika fazy φ_1 zmieniają się zwykle o więcej niż 360° (argument $Q(j\omega)$ jest funkcją ciągłą ω).

2. Pomiary charakterystyk układu zamkniętego

W warunkach stabilnej pracy układu zmierzyć charakterystykę amplitudową i fazową układu z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego (rys. 6). Sporządzić wykresy tych charakterystyk.



Rys. 6

Uwaga 1: Charakterystykę amplitudową i fazową układu zamkniętego mierzymy zmieniając częstotliwość w zakresie podanym w pkt. 1, część B. W obliczeniach transmitancji T należy uwzględnić obecność dzielnika napięcia 1:10 na wejściu. **Traci ważność uwaga 1 z poprzedniego punktu!**

Uwaga 2: Zamykając pętlę sprzężenia zwrotnego (przełącznik P1 wyciśnięty) otrzymamy układ pokazany na rys. 6.

3. Pomiary wrażliwości

Częstotliwość napięcia generatora wybrać z przedziału 0,5 do 1,5 kHz. W układzie z otwartą pętlą (rys. 4) zmierzyć wielkości przyrostów ΔH i $\Delta \beta$. Następnie, po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego, zbadać wpływ przyrostów ΔH i $\Delta \beta$ na charakterystykę amplitudową i fazową układu zamkniętego. Wyniki porównać z wartościami obliczonymi ze wzorów (15a) i (15b).

Uwaga 1: W układzie z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego uwzględnić wpływ dzielnika napięcia na wejściu 1:10.

Uwaga 2: Wrażliwość jest wielkością zespoloną, wyznaczaną dla układu stabilnego (uwaga na znak we wzorze 15).

4. Obserwacja niestabilnej pracy układu

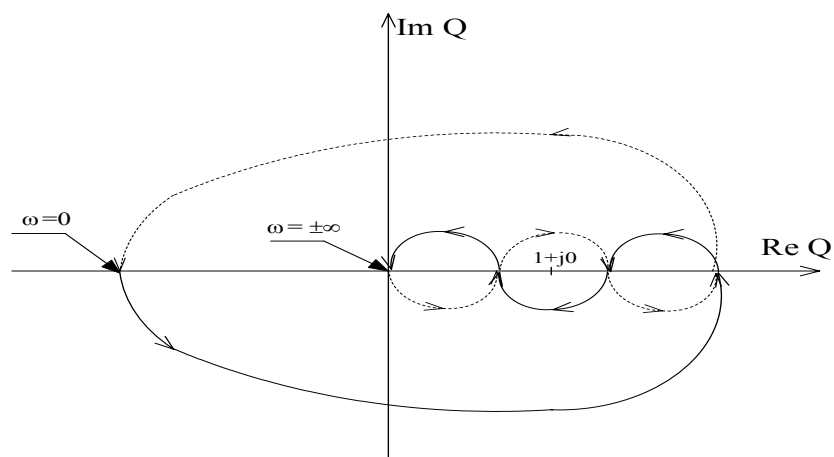
Po odłączeniu generatora dobrać takie ustawienie przełączników na płycie czołowej zestawu, aby wymusić niestabilną pracę układu. Zaobserwować wpływ zmian wzmocnienia bloku H (płynna regulacja pokrętkiem H_0) na kształt i częstotliwość generowanych drgań. Zmierzyć częstotliwościomierzem częstotliwość generowanych drgań. Następnie dla tej częstotliwości zmierzyć wzmocnienie i przesunięcie fazowe pętli otwartej. Sprawdzić słuszność kryterium amplitudowo-fazowego.

Pytania kontrolne

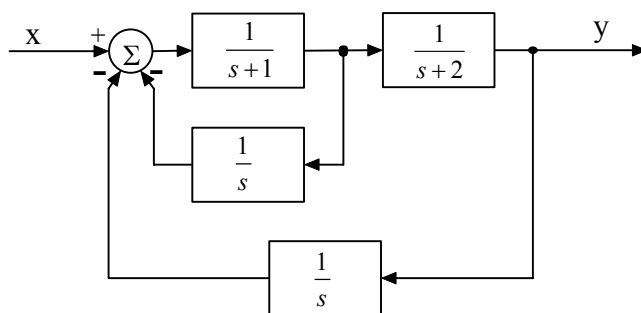
1. Wymień przykłady układów ze sprzężeniem zwrotnym. Wskaż, jakie elementy pełnią w nich funkcję sumatora, członów H i β .
2. Omów, w jakim celu stosuje się sprzężenie zwrotne w układach elektronicznych.
3. Wyprowadź wzór na transmitancję układu ze sprzężeniem zwrotnym.
4. Sformułuj znane kryteria stabilności układów. Podaj przykłady ich zastosowania.
5. Zdefiniuj pojęcie charakterystyk częstotliwościowych układu. Dla jakich układów mają one sens.
6. Podaj definicję i sposób wyznaczania miar zapasu stabilności układu ze sprzężeniem zwrotnym.
7. Praktyczne sposoby wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych układu z otwartą i zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego oraz pomiar wrażliwości.
8. Określić zakres wzmocnienia k dla , którego układ po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego będzie układem stabilnym. Transmitancja pętli rozwartej układu wynosi

$$Q(s) = -\frac{16k}{(s^2 + 10s + 16)(s + 16)}.$$

9. Czy układ dla którego przedstawiono poniżej diagram Nyquista będzie stabilny po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego ?



10. Wyznaczyć transmitancję $H = \frac{y}{x}$ układu, którego schemat blokowy jest przedstawiony poniżej.



Literatura

- [1] Uruski M., Wolski W., Wybrane zagadnienia z teorii obwodów, skrypt P. Wr., Wrocław 1984
- [2] Osiowski J., Szabatin J., Podstawy teorii obwodów, tom III, podręcznik akademicki, NT, Warszawa 1995