LICZBY ZESPOLONE

1. Historia liczb zespolonych

Liczby zespolone pojawiły się w XVI w., w związku z badaniami sposobów rozwiązywania równań algebraicznych trzeciego i czwartego stopnia. Okazało się, że rozwiązania równań trzeciego stopnia można uzyskać za pomocą działań algebraicznych na współczynnikach tych równań, jednak tylko wtedy, gdy umie się obliczać $\sqrt{-1}$. Oczywiście, w zakresie liczb, znanych w tamtym okresie, pierwiastek kwadratowy z liczby -1 nie istniał. Niektórzy z matematyków założyli jego istnienie i nazwali go „liczbą urojoną", a dotychczas znane liczby nazwano „liczbami rzeczywistymi". Oznaczając $\sqrt{-1}$ przez „i", przyjęto, że $i^2 = -1$. Tworzono nowe „liczby" $a + \mathrm{i}b$, które nazwano „liczbami zespolonymi" i określono czysto formalnie cztery działania na takich liczbach. Arytmetyka liczb zespolonych nie doprowadziła do żadnych sprzeczności. *E. Euler* (1707-1783) wprowadził liczby zespolone do analizy matematycznej, powodując tym jej istotny postęp.

Początek wieku XIX przyniósł ścisłe uzasadnienie istnienia liczb zespolonych. Szczegółową teorię liczb zespolonych stworzyli *C.F. Gauss* (1777-1855) i *W.R. Hamilton* (1805-1865). *Gauss* zinterpretował liczby zespolone jako punkty płaszczyzny liczb zespolonych (stąd „płaszczyzna *Gaussa*"), w której wprowadzono pewne działania, zwane dodawaniem i mnożeniem punktów, czyli liczb zespolonych. *Hamilton* wprowadził liczby zespolone jako pary liczb rzeczywistych i określił dodawanie i mnożenie takich par. Obydwa uzasadnienia są równoważne, bowiem punkty płaszczyzny są wyznaczone przez pary liczb rzeczywistych, współrzędnych tego punktu na płaszczyźnie.

Obecnie liczby zespolone, na równi z liczbami rzeczywistymi, które można traktować jako liczby zespolone szczególnego rodzaju, są niezbędnymi narzędziami matematyka, fizyka i inżyniera. Szczególne znaczenie odgrywają w teorii obwodów. Wprowadzono specjalną metodę analizy obwodów elektrycznych, opierającą się na liczbach zespolonych, nazywaną „metodą symboliczną".

Ze względu na zastosowania liczb zespolonych w teorii obwodów, jednostka urojona będzie oznaczana przez j, czyli

$$\mathrm{j}=\sqrt{-1},\ \ \mathrm{j}^2=-1.$$

Liczby zespolone będą oznaczane przez podkreślenie symbolu (litery), oznaczającej tę liczbę:

$$\underline{z}=a+\mathrm{j}b.$$

2. Zapis liczb zespolonych

2.1. Postać kanoniczna liczby zespolonej

Liczbą zespoloną nazywamy parę uporządkowaną liczb rzeczywistych (a, b), najczęściej zapisywaną w postaci sumy

$$\underline{z}=a+\mathrm{j}b,\ \ \mathrm{j}=\sqrt{-1}.$$

Taką postać liczby zespolonej nazywamy <u>postacią kanoniczną (postacią algebraiczną)</u>.

Liczbę rzeczywistą a nazywamy <u>częścią rzeczywistą</u> liczby zespolonej $\underline{z}$

$$a=\mathrm{Re}\{\underline{z}\},$$

liczbę rzeczywistą b nazywamy <u>częścią urojoną</u> liczby $\underline{z}$

$$b=\mathrm{Im}\{\underline{z}\},$$

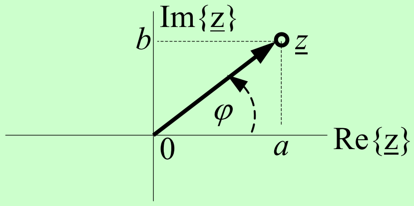
tak że

$$\underline{z}=\mathrm{Re}\{\underline{z}\}+\mathrm{j}\,\mathrm{Im}\{\underline{z}\}.$$

Liczba zespolona $a + \mathrm{j}0$ jest zapisywana jako a i jest utożsamiana z liczbą rzeczywistą. Liczba zespolona $\underline{z}=\mathrm{j}b$ będzie nazywana <u>liczbą urojoną</u>.

2.2. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej – wskaz

Liczby zespolone można interpretować jako punkty na płaszczyźnie zmiennej zespolonej we współrzędnych prostokątnych $\mathrm{Re}\{\underline{z}\}$, $\mathrm{Im}\{\underline{z}\}$. Liczba $\underline{z} = a + \mathrm{j}b$ jest punktem o współrzędnych (a, b) płaszczyzny Gaussa.



Rys. 1. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej.

Punkt ten jest oddalony od początku układu współrzędnych o odcinek o długości

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ta wartość jest nazywana modułem liczby zespolonej lub jej wartością bezwzględną

$$|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Odcinek skierowany od początku układu współrzędnych do punktu reprezentującego liczbę zespoloną jest nazywany wskazem tej liczby. Wskaz ma długość równą modułowi liczby zespolonej i jest odchylony od osi liczb rzeczywistych o kąt nazywany argumentem liczby zespolonej

$$\varphi = \arg(\underline{z}).$$

Łatwo zauważyć, że

$$\varphi = \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

dla liczb zespolonych leżących w pierwszej i czwartej ćwiartce płaszczyzny Gaussa oraz

$$\varphi = \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi$$

dla liczb leżących w drugiej i trzeciej ćwiartce.

Można zatem zapisać

$$\varphi = \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi[\mathrm{a}<0],$$

gdzie [a < 0] jest wyrażeniem logicznym, przyjmującym wartości

$$[a < 0] = \begin{cases} 1, & \text{gdy } a < 0, \\ 0, & \text{gdy } a \geq 0, \end{cases}$$

natomiast znak przy $\pi[\mathrm{a}<0]$ wybiera się tak aby $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Kąt φ spełniający warunek

$$-\pi < \varphi \leq \pi$$

nazywa się argumentem głównym liczby zespolonej. Argument liczby 0 nie jest określony.

Przykład 1

Obliczyć moduły i argumenty zadanych liczb zespolonych i przedstawić je na płaszczyźnie Gaussa: $|\underline{z}_1|$ = 5,45 + j3,25, $|\underline{z}_2|$ = 4,5 - j3,45, $|\underline{z}_3|$ = -5 +j3, $|\underline{z}_4|$ = -4 – j5.

$$|\underline{z}_1| = \sqrt{(5,45)^2 + (3,25)^2} = 6,345471, \;\; \arg(\underline{z}_1) = \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{3,25}{5,45}\right) = 0,537717\,\mathrm{rad} = 30,81^0.$$

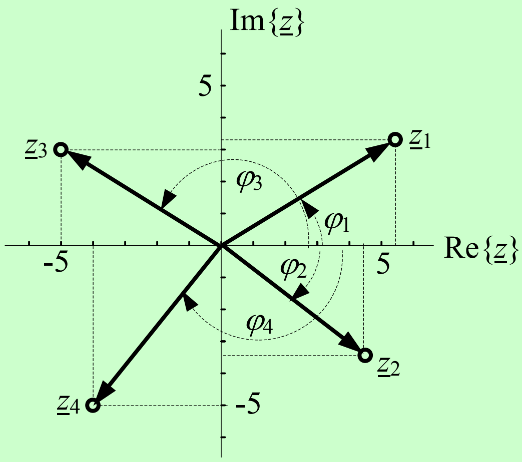
$$|\underline{z}_2| = \sqrt{(4,5)^2 + (-3,45)^2} = 5,670317, \;\; \arg(\underline{z}_2) = \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{-3,45}{4,5}\right) = -0,654081\,\mathrm{rad} = -37,48^0.$$

$$|\underline{z}_3| = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} = 5,830952, \;\; \arg(\underline{z}_3) = \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{3}{-5}\right) + \pi = 2,601173\,\mathrm{rad} = 149,04^0.$$

$|\underline{z}_4| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2} = 6,403124,$

$\arg(\underline{z}_4) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-5}{-4}\right) + \pi = 4,037648 - 2\pi = -2,245537 \text{ rad} = -128,66^0.$

Działanie (4,037648-2π) wykonano, aby obliczyć argument główny liczby.



Rys. P1.1. Argumenty główne liczb zespolonych.

2.3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Zgodnie z rys.1 można zapisać

$$a = |\underline{z}|\cos(\varphi), \ \ b = |\underline{z}|\sin(\varphi),$$

czyli

$$\underline{z} = |\underline{z}|[\cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi)].$$

Tę postać nazywa się <u>postacią trygonometryczną</u> liczby zespolonej.

Zgodnie z <u>wzorem Eulera</u>

$$\underline{z} = |\underline{z}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = |\underline{z}|[\cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi)].$$

Postać $|\underline{z}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ nazywa się <u>postacią wykładniczą</u> liczby zespolonej.

Każda liczba zespolona $\underline{z}$ ma nieskończenie wiele argumentów

$$\arg(\underline{z}) = \varphi + 2k\pi, \ \ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

z których, w obliczeniach, głównie stosuje się argument główny.

Przykład 2

Liczbę $\underline{z}_1$ = -8 + j3 zapisać w postaci wykładniczej, liczbę $\underline{z}_2 = 20\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}50^0}$ zapisać w postaci algebraicznej.

$|\underline{z}_1| = 8,544004, \ \arg(\underline{z}_1) = 2,782822 \text{rad} = 159,44^0,$

$\underline{z}_1 = 8,544004\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2,782822} = 8,544004\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}159,44^0}.$

$\underline{z}_2 = 20[\cos(50^0) - \mathrm{j}\sin(50^0)] = 18,855752 - \mathrm{j}15,320889.$

3. Działania na liczbach zespolonych

Liczbą sprzężoną do danej liczby zespolonej nazywa się liczbę ze zmienionym znakiem części urojonej liczby. Dla liczby

$$\underline{z} = a + \mathrm{j}b$$

liczbą sprzężoną jest liczba

$$\underline{z}^* = a - \mathrm{j}b.$$

Ponieważ

$$\underline{z}\underline{z}^* = a^2 + b^2,$$

więc

$$|\underline{z}|^2 = \underline{z}\underline{z}^*.$$

Równość liczb zespolonych wymaga równości części rzeczywistych i części urojonych liczb:

$$\underline{z}_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1,\ \underline{z}_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2,$$

$$\underline{z}_1 = \underline{z}_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2.$$

Dwie liczby zespolone są równe sobie jeżeli mają równe moduły i argumenty:

$$\underline{z}_1 = |\underline{z}_1|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1},\ \underline{z}_2 = |\underline{z}_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2},$$

$$\underline{z}_1 = \underline{z}_2 \Leftrightarrow |\underline{z}_1| = |\underline{z}_2| \ \wedge\ \varphi_1 = \varphi_2.$$

Liczba zespolona jest równa zero, jeżeli obydwie części tej liczby są równe zero:

$$\underline{z} = a + \mathrm{j}b,$$

$$\underline{z} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0.$$

Liczba zespolona jest równa zero, jeżeli jej moduł jest równy zero:

$$\underline{z} = |\underline{z}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi},$$

$$\underline{z} = 0 \Leftrightarrow |\underline{z}| = 0.$$

Sumę algebraiczną dwóch liczb zespolonych można obliczyć sumując ich części rzeczywiste i części urojone:

$$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (a_1 + \mathrm{j}b_1) \pm (a_2 + \mathrm{j}b_2) = (a_1 \pm a_2) + \mathrm{j}(b_1 \pm b_2).$$

Iloczyn dwóch liczb zespolonych oblicza się jak iloczyn dwóch dwumianów:

$$\underline{z}_1\underline{z}_2 = (a_1 + \mathrm{j}b_1)(a_2 + \mathrm{j}b_2) = a_1a_2 - b_1b_2 + \mathrm{j}(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Iloczyn dwóch liczb można obliczyć z wykorzystaniem postaci wykładniczej (Eulera) liczby zespolonej:

$$\underline{z}_1\underline{z}_2 = |\underline{z}_1|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}\,|\underline{z}_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} = |\underline{z}_1||\underline{z}_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)} = |\underline{z}_1||\underline{z}_2|\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{j}|\underline{z}_1||\underline{z}_2|\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Iloraz dwóch liczb zespolonych oblicza się z wykorzystaniem pojęcia liczby sprzężonej:

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{\underline{z}_1\underline{z}_2^*}{\underline{z}_2\underline{z}_2^*} = \frac{(a_1 + \mathrm{j}b_1)(a_2 + \mathrm{j}b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \mathrm{j}\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Wykorzystując postać wykładniczą liczb można zapisać:

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{|\underline{z}_1|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}}{|\underline{z}_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}} = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{j}\frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}\sin(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Potęgę liczby zespolonej najwygodniej obliczać wykorzystując postać wykładniczą liczby:

$$\underline{z}^n = \left(|\underline{z}|\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \right)^n = |\underline{z}|^n\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi},$$

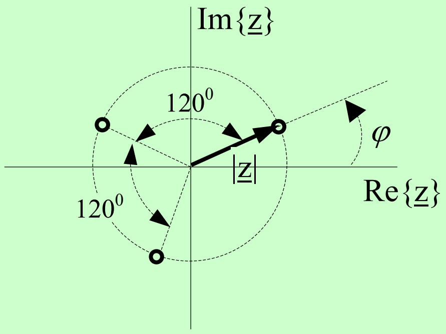
$$\underline{z}^n = |\underline{z}|^n\, [\cos(n\varphi) + \mathrm{j}\sin(n\varphi)].$$

Ostatnia zależność nosi nazwę wzoru Moivre'a.

Pierwiastek z liczby zespolonej ma tyle wartości ile wynosi stopień pierwiastka:

$$\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{|\underline{z}|\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \sqrt[n]{|\underline{z}|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

Moduły wszystkich pierwiastków liczby zespolonej są takie same, a ich argumenty różnią się o $2\pi/n$. Wszystkie pierwiastki leżą więc na kole o promieniu $\sqrt[n]{|\underline{z}|}$ na płaszczyźnie Gaussa i dzielą okrąg na *n* części (Rys. 2).



Rys. 2. Pierwiastki trzeciego stopnia liczby $|\underline{z}|\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$.

Logarytm naturalny liczby zespolonej najlepiej obliczać wykorzystując postać wykładniczą liczby zespolonej (argument liczby musi być wyrażony w radianach).

$$\ln(\underline{z}) = \ln(|\underline{z}|\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}) = \ln(|\underline{z}|) + \ln(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}) = \ln(|\underline{z}|) + \mathrm{j}\varphi.$$

Logarytm dziesiętny liczby zespolonej oblicza się w podobny sposób.

$$\log(\underline{z}) = \log(|\underline{z}|\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}) = \log(|\underline{z}|) + \mathrm{j}\varphi \log(\mathrm{e}) = \log(|\underline{z}|) + \mathrm{j}\,0{,}434294\,\varphi.$$

Funkcję eksponencjalną liczby zespolonej najwygodniej oblicza się dla liczb w postaci algebraicznej.

$$\mathrm{e}^{\underline{z}} = \mathrm{e}^{(a+\mathrm{j}b)} = \mathrm{e}^a [\cos(b) + \mathrm{j}\sin(b)].$$

Funkcje sin i cos dla zespolonych argumentów oblicza się dla liczb w postaci algebraicznej.

$$\sin(a + \mathrm{j}b) = \sin(a)\cosh(b) + \mathrm{j}\cos(a)\sinh(b),$$

$$\cos(a + \mathrm{j}b) = \cos(a)\cosh(b) - \mathrm{j}\sin(a)\sinh(b).$$

Funkcje sinh i cosh dla zespolonych argumentów oblicza się dla liczb w postaci algebraicznej

$$\sinh(a + \mathrm{j}b) = \sinh(a)\cos(b) + \mathrm{j}\cosh(a)\sin(b),$$

$$\cosh(a + \mathrm{j}b) = \cosh(a)\cos(b) + \mathrm{j}\sin\mathrm{h}(a)\sin(b).$$

Przykład 3

Zadane są dwie liczby zespolone: $\underline{z}_1 = -15 + \mathrm{j}10$, $\underline{z}_2 = 10 - \mathrm{j}8$.

3.1. Wartości sprzężone do tych liczb:

$$\underline{z}_1{}^* = -15 - \mathrm{j}10,\ \ \underline{z}_2{}^* = 10 + \mathrm{j}8.$$

3.2. Moduły liczb:

$$m_1 = |\underline{z}_1| = \sqrt{\underline{z}_1 \underline{z}_1{}^*} = \sqrt{(-15+\mathrm{j}10)(-15-\mathrm{j}10)} = \sqrt{15^2+10^2} = 18,027756,$$

$$m_2 = |\underline{z}_2| = \sqrt{\underline{z}_2 \underline{z}_2{}^*} = \sqrt{(10-\mathrm{j}8)(10+\mathrm{j}8)} = \sqrt{10^2+8^2} = 12,806248.$$

3.3. Argumenty liczb:

$$\varphi_1 = \arg(\underline{z}_1) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{10}{-15}\right) + \pi = 2,55359,$$

$$\varphi_2 = \arg(\underline{z}_2) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-8}{10}\right) = -0,67474094.$$

3.4. Liczba $\underline{z}_3 = (x-y) + \mathrm{j}(x+y)$ ma być równa liczbie $\underline{z}_1$. Obliczyć wartości x i y.

$$\begin{array}{l} x - y = -15, \\ x + y = 10, \end{array} \rightarrow x = -2,5,\ \ y = 12,5.$$

3.5. Różnica liczb $\underline{z}_1 - \underline{z}_2$:

$$\underline{z} = (-15+\mathrm{j}10) - (10-\mathrm{j}8) = -25 + \mathrm{j}18.$$

3.6. Iloczyn liczb $\underline{z}_1$ i $\underline{z}_2$:

$$\underline{z} = (-15+\mathrm{j}10)(10-\mathrm{j}8) = -150+80+\mathrm{j}(100+120) = -70+\mathrm{j}220,$$

$$\underline{z} = m_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} m_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} = 230,86793\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}1,87885} = -70+\mathrm{j}220.$$

3.7. Iloraz liczb $\underline{z}_1$ i $\underline{z}_2$:

$$\underline{z} = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{(-15+\mathrm{j}10)(10+\mathrm{j}8)}{(10-\mathrm{j}8)(10+\mathrm{j}8)} = \frac{-230-\mathrm{j}20}{164} = -1,402439 - \mathrm{j}0,12195122,$$

$$\underline{z} = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{m_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}}{m_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}} = 1,407731\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}3,22831} = -1,402438 - \mathrm{j}0,12195122.$$

3.8. Liczba $\underline{z}_1$ podniesiona do trzeciej potęgi:

$$\underline{z} = \underline{z}_1^3 = (m_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1})^3 = 5859,0208\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}7,6607702} = 5859,0208\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}1,3775848} = 1125 + \mathrm{j}5750,$$

ze wzoru Moivre'a $\underline{z} = m_1^3[\cos(3\varphi_1) + \mathrm{j}\sin(3\varphi_1)] = 1125 + \mathrm{j}5750,$

$$\underline{z} = \underline{z}_1 \underline{z}_1 \underline{z}_1 = (-15+\mathrm{j}10)(-15+\mathrm{j}10)(-15+\mathrm{j}10) = 1125+\mathrm{j}5750.$$

3.9. Pierwiastek trzeciego stopnia z liczby $\underline{z}_1$:

$$\underline{z}_a = \sqrt[3]{\underline{z}_1} = \sqrt[3]{m_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\varphi_1}{3}} = 2,6220878\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0,85119668} = 1,7281753 + \mathrm{j}1,9719927,$$

$$\underline{z}_b = \sqrt[3]{m_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\frac{\varphi_1}{3}+\frac{2\pi}{3})} = 2,6220878\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2,9455918} = -2,5718833 + \mathrm{j}0,51064723,$$

$$\underline{z}_c = \sqrt[3]{m_1}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\frac{\varphi_1}{3}+\frac{4\pi}{3})} = 2,6220878\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}5,0399869} = 0,84370818 - \mathrm{j}2,4826399.$$

Można sprawdzić, że $\underline{z}_a \underline{z}_b \underline{z}_c = -15 + \mathrm{j}10$.

3.10. Logarytm naturalny liczby $\underline{z}_1$:

$$\ln(\underline{z}_1) = \ln(m_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}) = \ln(m_1) + \mathrm{j}\varphi_1 = 2,8919126 + \mathrm{j}2,55359 = 3,8579762\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0,72334912}.$$

3.11. Logarytm dziesiętny liczby $\underline{z}_1$:

$$\log(\underline{z}_1) = \log(m_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}) = \log(m_1) + \mathrm{j}\varphi_1 \log(\mathrm{e}) = 1,2559417+\mathrm{j}1,1090101 = 1,6754978\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}0,72334912}.$$

3.12. Funkcja eksponencjalna:

$$\mathrm{e}^{\underline{z}_1} = \mathrm{e}^{(-15+\mathrm{j}10)} = \mathrm{e}^{-15}\mathrm{e}^{\mathrm{j}10} = 3,0990232\cdot 10^{-7}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}10} = (-2,5667393 - \mathrm{j}1,6641733)\cdot 10^{-7}.$$

3.13. Funkcje trygonometryczne:

$$\underline{s} = \sin(\underline{z}_1) = \sin(-15)\cosh(10) + \mathrm{j}\cos(-15)\sinh(10 = -7161,7714 - \mathrm{j}8366,6199,$$

$$\underline{c} = \cos(\underline{z}_1) = \cos(-15)\cosh(10) - \mathrm{j}\sin(-15)\sinh(10) = -8366,6199 + \mathrm{j}7161,7714.$$

Można sprawdzić, że $\underline{s}^2 + \underline{c}^2 = 1$.

3.14. Funkcje hiperboliczne:

$$\underline{sh} = \sinh(-15 + \mathrm{j}10) = \sinh(-15)\cos(10) + \mathrm{j}\cosh(-15)\sin(10) = 1371469,7 - \mathrm{j}889207,23,$$

$$\underline{ch} = \cosh(-15 + \mathrm{j}10) = \cosh(-15)\cos(10) + \mathrm{j}\sinh(-15)\sin(10) = -1371469,7 + \mathrm{j}889207,23.$$

Można sprawdzić, że $\underline{ch}^2 - \underline{sh}^2 = 1$.

4. Rozwiązywanie równań w zbiorze liczb zespolonych

Zgodnie z podstawowym twierdzeniem algebry, każdy wielomian stopnia n ma n miejsc zerowych (licząc krotności) i rozkłada się na iloczyn wielomianów stopnia pierwszego

$$W(x) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k).$$

Jeżeli współczynniki wielomianu są rzeczywiste, to każdemu zespolonemu miejscu zerowemu towarzyszy miejsce zerowe zespolone sprzężone.

Dla wielomianu drugiego stopnia

$$W(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

dla którego

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}, \quad x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2},$$

$$x_2 = x_1^*,$$

jeżeli $\quad a_1^2 - 4a_2 a_0 < 0.$

Przykład 4

4.1. Dla liczb $\underline{z}_1 = 2 + \mathrm{j}3$ i $\underline{z}_2 = 1 + \mathrm{j}2$ skonstruować wielomian czwartego stopnia o współczynnikach rzeczywistych.

$$w(x) = (x - \underline{z}_1)(x - \underline{z}_1^*)(x - \underline{z}_2)(x - \underline{z}_2^*) = x^4 - 6x^3 + 26x^2 - 46x + 65.$$

4.2. Dobrać wartość współczynnika a tak, aby pierwiastki równania $4x^2 + a\,x + 5 = 0$ były:

a. rzeczywiste,

b. zespolone.

Wyróżnik równania $\Delta = a^2 - 4*4*5 = a^2 - 80$.

a. Pierwiastki równania będą rzeczywiste, jeżeli $a^2 - 80 > 0$, tj.

$$a < -8,94427 \;\vee\; a > 8,94427.$$

b. Pierwiastki równania będą zespolone, jeżeli $a^2 - 80 < 0$, tj.

$$-8,94427 < a < 8,94427.$$

W tym przypadku pierwiastki będą zespolone, wzajemnie sprzężone.

5. Przedstawienie symboliczne przebiegów sinusoidalnych

Niech

$$f(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Dla takiego przebiegu można utworzyć przebieg zespolony

$$\underline{f}(t) = F_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \sqrt{2}\,\frac{F_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} e^{j\omega t}.$$

Jeżeli wprowadzić zespoloną wartość skuteczną przebiegu sinusoidalnego

$$\underline{F} = \frac{F_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi},$$

to

$$\underline{f}(t) = \sqrt{2}\,\underline{F}\, e^{j\omega t},$$

i wtedy

$$f(t) = \mathrm{Im}\{\underline{f}(t)\} = F_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Widać więc, że aby jednoznacznie reprezentować symbolicznie przebieg sinusoidalny, wystarczy podać dwie liczby: zespoloną wartość skuteczną $\underline{F}$ oraz pulsację przebiegu:

$$F_m \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{F}, \omega, \quad \underline{F} = \frac{F_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}.$$

Jeżeli wiadomo, że liczby $\underline{F}$ oraz ω reprezentują symbolicznie przebieg sinusoidalny, to przebieg sinusoidalny można odtworzyć drogą następującej operacji

$$\underline{F}, \omega \Rightarrow f(t) = \mathrm{Im}\{\sqrt{2}\,\underline{F}\, e^{j\omega t}\} = F_m \sin(\omega t + \varphi),$$

$$F_m = \sqrt{2}\,|\,\underline{F}\,|, \;\; \varphi = \arg(\underline{F}).$$

Przebieg kosinusoidalny można reprezentować symbolicznie po zamianie go na przebieg sinusoidalny:

$$F_m \cos(\omega t + \varphi) = F_m \sin(\omega t + \varphi + \tfrac{\pi}{2}) \Rightarrow \underline{F} = \frac{F_m}{\sqrt{2}} e^{j(\varphi+\pi/2)}.$$

Przykład 5

5.1. Przebiegi $f_1(t) = 325{,}3\sin(\omega t + 40^0)$ i $f_2(t) = 50\cos(10^3 t + 20^0)$ zapisać w postaci symbolicznej.

$$\underline{F}_1 = \frac{325{,}3}{\sqrt{2}} e^{j40^0} = 176{,}19 + j147{,}84, \;\; \omega=314 \;\text{rad/s}.$$

$$\underline{F}_2 = \frac{50}{\sqrt{2}} e^{j110^0} = -12{,}09 + j33{,}23, \;\; \omega=10^3 \;\text{rad/s}.$$

5.2. Wiadomo, że liczba $\underline{F} = -5 + j6$ przy pulsacji $\omega = 10^4$ rad/s reprezentuje przebieg sinusoidalny. Zapisać ten przebieg.

$$\underline{F} = 7{,}81 e^{j129{,}81^0}, \omega = 10^4 \;\text{rad/s}.$$

$$f(t) = \mathrm{Im}\{\sqrt{2}\,7{,}81 e^{j129{,}81^0} e^{j10^4 t} = 11{,}05\cos(10^4 t + 39{,}81^0).$$

5.3. Różnicę przebiegów $f_1(t) = 100\sin(\omega t + 20^0)$ i $f_2(t) = 200\cos(\omega t - 20^0)$ zapisać jako jeden przebieg sinusoidalny.

$$\underline{F} = (66{,}4463 + j24{,}1844) - (48{,}369 + j132{,}8926) = 110{,}201 e^{-j80{,}565},$$

$$f(t) = f_1(t) - f_2(t) = 155{,}848\sin(\omega t - 80{,}56^0).$$