2. PRZEKSZTAŁCENIE LAPLACE'A

Obliczanie transformat Laplace'a

2.1. Sprawdzić, czy niżej podane funkcje są transformowalne w sensie przekształcenia Laplace'a:

a) t^n, b) e^{t^2}, c) e^{-t^2}, d) $\frac{\sin t}{2t}$, e) t^{t^2}, f) $\operatorname{tg} 5t$.

Wynik:

a) tak, b) nie, c) tak, d) tak, e) nie, f) nie.

2.2. Na podstawie definicji przekształcenia Laplace'a obliczyć transformaty następujących funkcji:

a) $e^{-2t}1(t)$, b) $e^{-2(t-1)}1(t)$, c) $e^{-2t}\,1(t-1)$, d) $e^{-2(t-1)}\cdot 1(t-1)$.

Wynik:

a) $\frac{1}{s+2}$, b) $\frac{e^2}{s+2}$, c) $\frac{e^{-s-2}}{s+2}$, d) $\frac{e^{-s}}{s+2}$.

2.3. Obliczyć transformaty następujących funkcji:

a) $(t+1)\,e^{-t}\,1(t)$, b) $(t+2)^2\,1(t-1)$, c) $e^{-at}\sinh bt\cdot 1(t)$.

Wynik:

a) $\frac{s+2}{s^2+2s+1}$, b) $e^{-s}\,\frac{9s^2+6s+2}{s^3}$, c) $\frac{b}{(s+a)^2-b^2}$.

2.4. Obliczyć transformaty Laplace'a następujących dystrybucji:

a) $e^{-5t}\left[1(t)-1(t-5)\right]$, d) $t^n\,\delta^{(n)}(t)$,

b) $(t^2+5t+6+\cos^2 t)\,\delta(t)$, e) $\delta(t) * \sin t$,

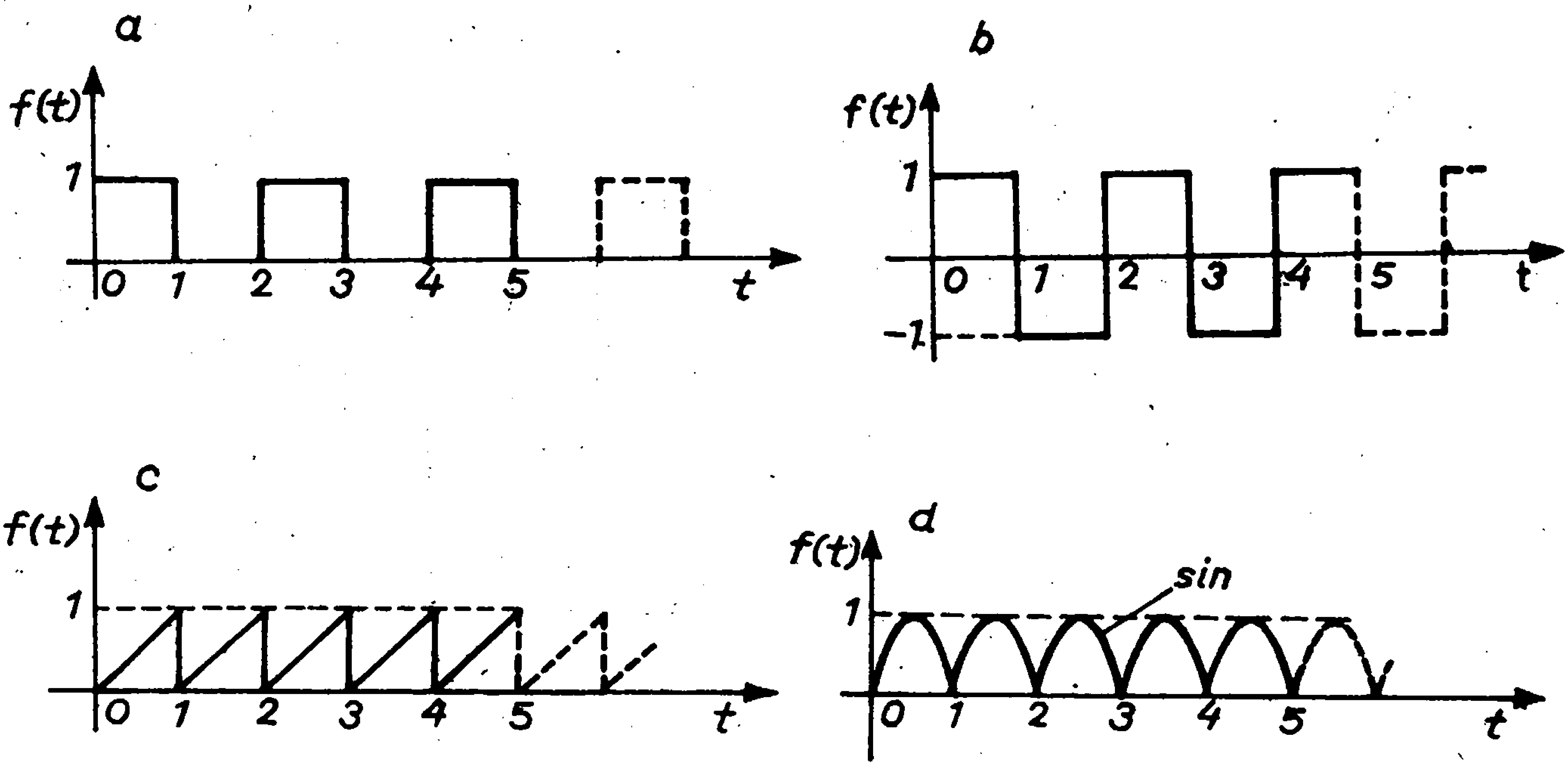
c) $\sum_{k=0}^{n} A_k\,\delta^{(k)}(t)$, f) $\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)$.

W y n i k:

a) $\dfrac{1 - e^{-5s} - 25}{s + 5}$, c) $\sum\limits_{k=0}^{n} A_k s^k$, e) $\dfrac{1}{s^2 + 1}$,

b) 7, d) $(-1)^n n!$, f) $\dfrac{1}{1 - e^{-sT}}$.

2.5. Wyznaczyć transformaty Laplace'a funkcji okresowych przedstawionych na rysunku 2.1.



Rys. 2.1.

W y n i k:

a) $\dfrac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})}$, c) $\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})}$,

b) $\dfrac{1}{s} \operatorname{tgh} \dfrac{s}{2}$, d) $\dfrac{1}{s^2 + 1} \operatorname{ctgh} \dfrac{s}{2}$.

2.6. Obliczyć stranformaty Laplace'a funkcji przedstawionych na rysunku 2.2.

R o z w i ą z a n i e:

a) Przedstawioną na rysunku funkcję schodkową można zapisać w postaci szeregu:

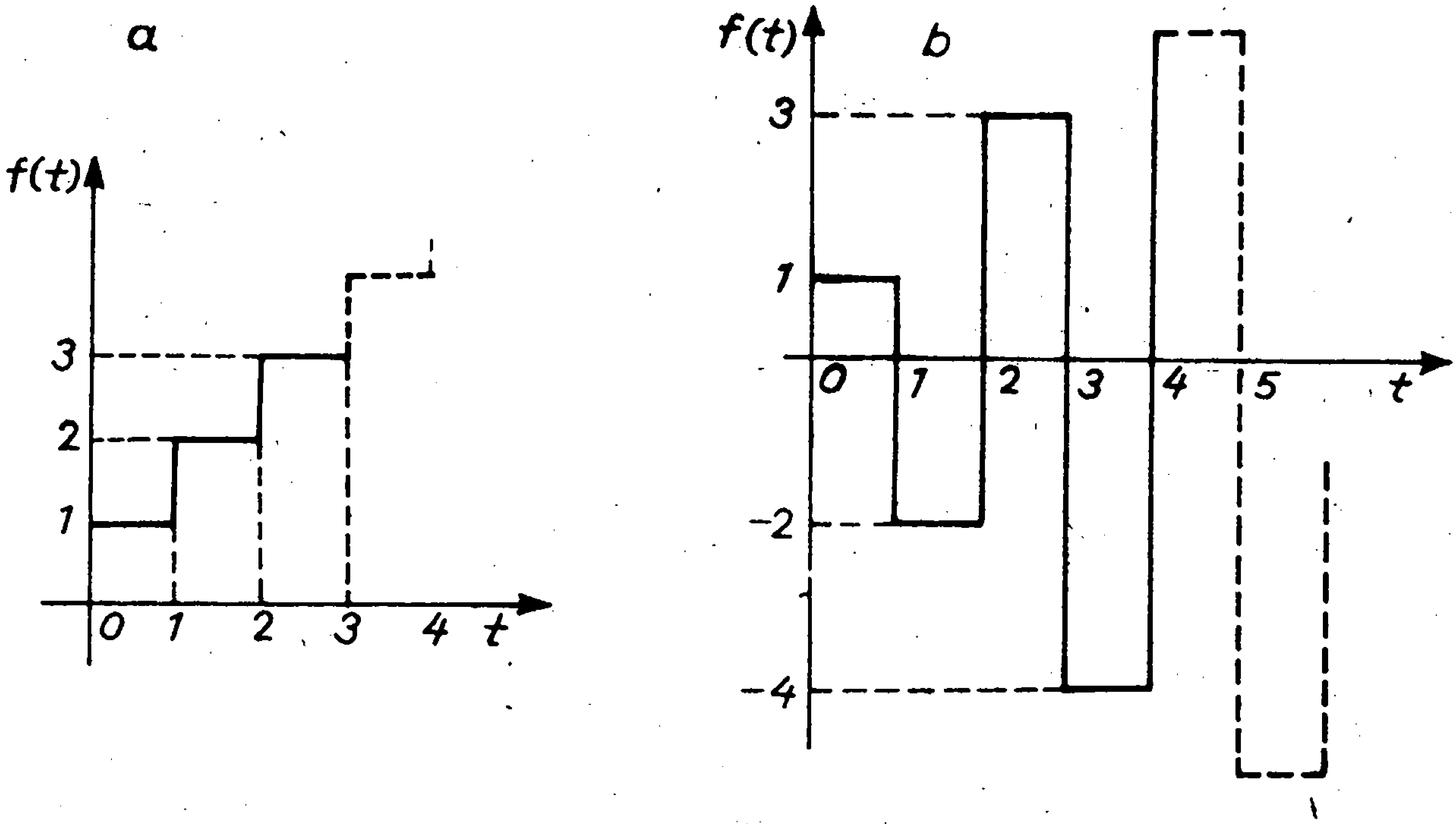
$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 1(t - n).$$

Transformata Laplace'a tego szeregu równa się

$$F(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ns} .$$

Po zastosowaniu znanego wzoru na sumę postępu geometrycznego otrzymuje się ostatecznie:

$$F(s) = \frac{1}{s(1 - e^{-s})} .$$



Rys. 2.2

b) Przedstawioną na rysunku funkcję można zapisać następująco

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \,(2k + 1)\; 1(t - k).$$

Transformata Laplace'a tego szeregu ma postać

$$F(s) = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \,(2k + 1)\, e^{-ks} .$$

2.7. Za pomocą podstawowych własności przekształcenia Laplace'a wyznaczyć transformaty następujących funkcji:

a) $\cos(\omega_0 t + \varphi)\; 1(t)$, c) $t \sin(\omega_0 t + \varphi)\, 1(t)$,

b) $\cos(\omega_0 t - \alpha)\; 1\left(t - \frac{\alpha}{\omega_0}\right)$, d) $\frac{\sin t}{t}$.

W y n i k:

a) $\dfrac{s\cos\varphi - \omega_0 \sin\varphi}{s^2 + \omega_0^2}$, c) $\dfrac{(s^2 - \omega_0^2)\sin\varphi + 2s\,\omega_0 \cos\varphi}{s^2 + \omega_0^2}$,

b) $e^{-\frac{\alpha}{\omega_0} s} \dfrac{s}{s^2 + \omega_0^2}$, d) $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{s}$.

2.8. Za pomocą własnosci przekształcenia Laplace'a obliczyć transformaty funkcji:

a) $t \cdot e^{10t} \cdot 1(t)$, c) $\sqrt{t}\, 1(t)$, e) $\dfrac{d^3[t^2\, 1(t)]}{dt^3}$.

b) $\dfrac{1}{\sqrt{t}}\, 1(t)$, d) $\dfrac{e^{-3t}}{\sqrt{t-3}}\, 1(t-3)$,

W y n i k:

a) $\dfrac{1}{s^3(s-10)}$, c) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} s^{-\frac{3}{2}}$, e) 2.

b) $\sqrt{\dfrac{\pi}{s}}$, d) $e^{-3s+9}\sqrt{\dfrac{\pi}{s+3}}$,

2.9. Niech $f(t)$ oznacza dowolną funkcję okresową o okresie T, transformowalną w sensie przekształcenia Laplace'a.

a) Wykazać, że $f(t) = f_T(t) * \delta_T(t)$,

gdzie

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 & t > T \end{cases},$$

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT).$$

b) Korzystając z wyniku zadania 2.9a wyprowadzić wzór na transformatę funkcji okresowej.

Wyznaczanie transformat odwrotnych

2.10. Obliczyć transformaty odwrotne następujących funkcji:

a) $\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$, c) $\dfrac{1 + e^{-\pi s}}{1 + s^2}$, e) $\dfrac{5}{1 - e^{-s}}$,

b) $\dfrac{s+1}{s^2(s+2)}$, d) $\sum_{k=0}^{n} A_k s^k$, f) $\dfrac{s-1}{s^2+1}$.

W y n i k:

a) $(t \sin t)1(t)$,

b) $\left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2} - \frac{e^{-2t}}{4}\right) 1(t)$,

c) $[1(t) - 1(t - \pi)] \sin t$,

d) $\sum_{k=0}^{n} A_k \delta^{(k)}(t)$.

e) $5 \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k)$,

f) $\sqrt{2}\, 1(t) \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

2.11. Metodą rozkładu na ułamki proste wyznaczyć transformaty odwrotne następujących funkcji wymiernych:

a) $\frac{2s + 3}{s^2 + 3s + 2}$, c) $\frac{5s^3 + s^2 - s + 4}{s^4 + 2s^3 - s^2 - 2s}$, e) $\frac{s^2 - 2s + 2}{s^3 + s^2 + 4s + 4}$.

b) $\frac{s + 2}{s^3 - s}$, d) $\frac{3s^2 + 12s + 11}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$,

W y n i k:

a) $(e^{-t} + e^{-2t})\, 1(t)$,

b) $(-2 + 0{,}5e^{t} + 1{,}5e^{-t})\, 1(t)$,

c) $(-2 + 0{,}5e^{t} + 1{,}5e^{-t} + 5e^{-2t})\, 1(t)$

d) $(e^{-t} + e^{-2t} + e^{-3t})\, 1(t)$.

R o z w i ą z a n i e:

e) Najpierw znajdujemy bieguny zadanej funkcji: $s_1 = -1$, $s_2 = 2j$, $s_3 = -2j$. Jest zatem możliwy następujący rozkład tej funkcji na ułamki proste:

$$F(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^3 + s^2 + 4s + 4} = \frac{c_1}{s + 1} + \frac{c_2}{s - 2j} + \frac{c_3}{s + 2j}.$$

Współczynniki c_i wyznacza się z następującego wzoru

$$c_i = \lim_{s \to s_i} F(s)(s - s_i).$$

$$c_1 = \lim_{s \to -1} \frac{s^2 - 2s + 2}{s^2 + 4} = 1,$$

$$c_2 = \lim_{s \to 2j} \frac{s^2 - 2s + 2}{(s + 1)(s + 2j)} = 0{,}5j,$$

$$c_3 = \lim_{s \to -2j} \frac{s^2 - 2s + 2}{(s + 1)(s - 2j)} = -0{,}5j.$$

Po uwzględnieniu tych wyników otrzymuje się

$$F(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{0{,}5j}{s - 2j} + \frac{-0{,}5j}{s + 2j} = \frac{1}{s + 1} - \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Transformata odwrotna do zadanej funkcji jest zatem następująca

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (e^{-t} - \sin 2t)\, 1(t).$$

2.12. Obliczyć odwrotne przekształcenie Laplace'a następujących funkcji wymiernych zawierających bieguny wielokrotne:

$$a)\ \frac{s^2 + 2s + 1}{(s + 2)^3}, \quad b)\ \frac{1}{(s + 1)(s + 3)^2}.$$

R o z w i ą z a n i e:

a) Pierwszą funkcję rozkładamy na ułamki proste w następujący sposób

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{(s + 2)^3} = \frac{c_1}{s + 2} + \frac{c_2}{(s + 2)^2} + \frac{c_3}{(s + 2)^3}.$$

Współczynniki c_k obliczamy według zależności

$$c_k = \lim_{s \to s_o} \frac{1}{(n - k)!} \frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}} \left[F(s)(s - s_o)^n\right].$$

W rozwiązanym przykładzie $s_o = -2$, $n = 3$, $k = 1,2,3$, wobec tego

$$c_1 = \lim_{s \to -2} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} (s^2 + 2s + 1) = 1,$$

$$c_2 = \lim_{s \to -2} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} (s^2 + 2s + 1) = -2,$$

$$c_3 = \lim_{s \to -2} \frac{1}{0!} (s^2 + 2s + 1) = 1.$$

Ostatecznie otrzymuje się rozwiązanie

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{s_o t}\right] 1(t) = (1 - 2t + 0{,}5\, t^2) e^{-2t}\, 1(t).$$

b) Drugą funkcję rozłożymy na ułamki proste metodą Goldstone'a. W tym celu do zadanej funkcji

$$F(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 3)^2}$$

wprowadzimy nową zmienną $p = s + 3$. Wówczas

$$F(p - 3)p^2 = \frac{1}{p - 2} = -0{,}5 - 0{,}25p + 0{,}25 \frac{p^2}{p - 2},$$

$$F(s) = -0{,}5 \frac{1}{(s + 3)^2} - 0{,}25 \frac{1}{s + 3} + 0{,}25 \frac{1}{s + 1}.$$

Transformata odwrotna funkcji $F(s)$ ma postać

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = (-0,5te^{-3t} - 0,25e^{-3t} + 0,25e^{-t})\,1(t).$$

2.13. Obliczyć transformaty odwrotne następujących funkcji wymiernych zawierających bieguny wielokrotne:

a) $\dfrac{1}{(s+5)^2}$,

b) $\dfrac{2s+5}{s^2+8s+16}$,

c) $\dfrac{1}{(s^2+1)^2}$,

d) $\dfrac{s^2+21s+112}{(s+10)^2}$,

e) $\dfrac{2s^2+9s+11}{s^3+7s^2+11s+5}$,

f) $\dfrac{s^4+9s^3+46s^2+115s+155}{(s^2+25)(s+1)^3}$,

g) $\dfrac{s+1}{s^2(s+2)}$.

W y n i k:

a) $te^{-5t}\,1(t)$,

b) $\left(2e^{-4t} + te^{-4t}\right)1(t)$,

c) $\left(\frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t\right)1(t)$,

d) $\delta(t) + \left(e^{-10t} + 2te^{-10t}\right)1(t)$,

e) $\left(e^{-5t} + e^{-t} + te^{-t}\right)1(t)$,

f) $\left(\sin 5t + e^{-t} + 2te^{-t} + 1,5t^2e^{-t}\right)1(t)$,

g) $\left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right)1(t)$.

2.14. Stosując przekształcenie Laplace'a rozwiązać następujące równania różniczkowe:

a) $x'''(t) - x'(t) = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$,

b) $x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 1$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$.

W y n i k:

a) $x(t) = -1 + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}$,

b) $x(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{t}$.

2.15. Dana jest transformata pewnej funkcji $f(t)$: $f(t) = \frac{s+1}{s^3 - s}$. Obliczyć $f(0+)$ oraz $f'(0+)$.

W y n i k:

$f(0+) = 0, \quad f'(0+) = 1.$

2.16. Sprawdzić, które z podanych funkcji zmiennej s są transformatami Laplace'a okresowych funkcji czasu oraz obliczyć te funkcje.

a) $\frac{1 - e^{-0,5s}}{s(1 + e^{-0,5s})}$, c) $\frac{1}{s(1 - e^{-2s})}$,

b) $\frac{\pi(1 + e^{-s})}{(s^2 + \pi^2)(1 - e^{-s})}$, d) $\frac{s + 2}{(s^2 + 2s + 1)(1 - e^{-5s})}$.

W y n i k:

a) $f(t) = 1(t) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\, 1(t - k)$,

b) $f(t) = |\sin \pi t|\, 1(t)$,

c), d) – nie są to transformaty funkcji okresowych.

2.17. Za pomocą metody operatorowej obliczyć splot funkcji:

a) $1(t) * 1(t)$,

b) $(\sin t)1(t) * (\sin t)1(t)$.

W y n i k:

a) $t1(t)$,

b) $\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)\, 1(t)$.

Stany nieustalone w obwodach RLCM

2.18. Sporządzić operatorowy schemat zastępczy obwodu przedstawionego na rysunku 2.3. Warunki początkowe uwzględnić w postaci źródeł napięciowych.

D a n e: $R = 2$, $e(t) = \sin t$,

$L_1 = 1$, $i_1(0-) = 2$,

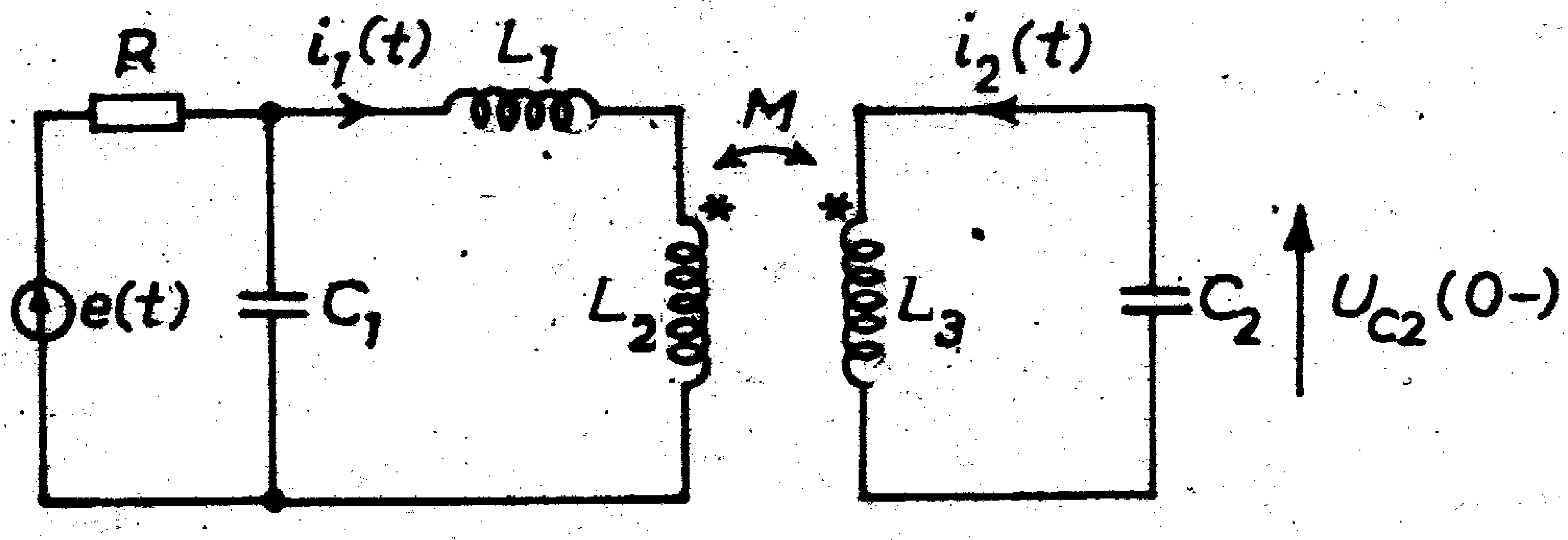
$L_2 = 2$, $i_2(0-) = 4$,

$L_3 = 3$, $u_{C1}(0-) = 0$,

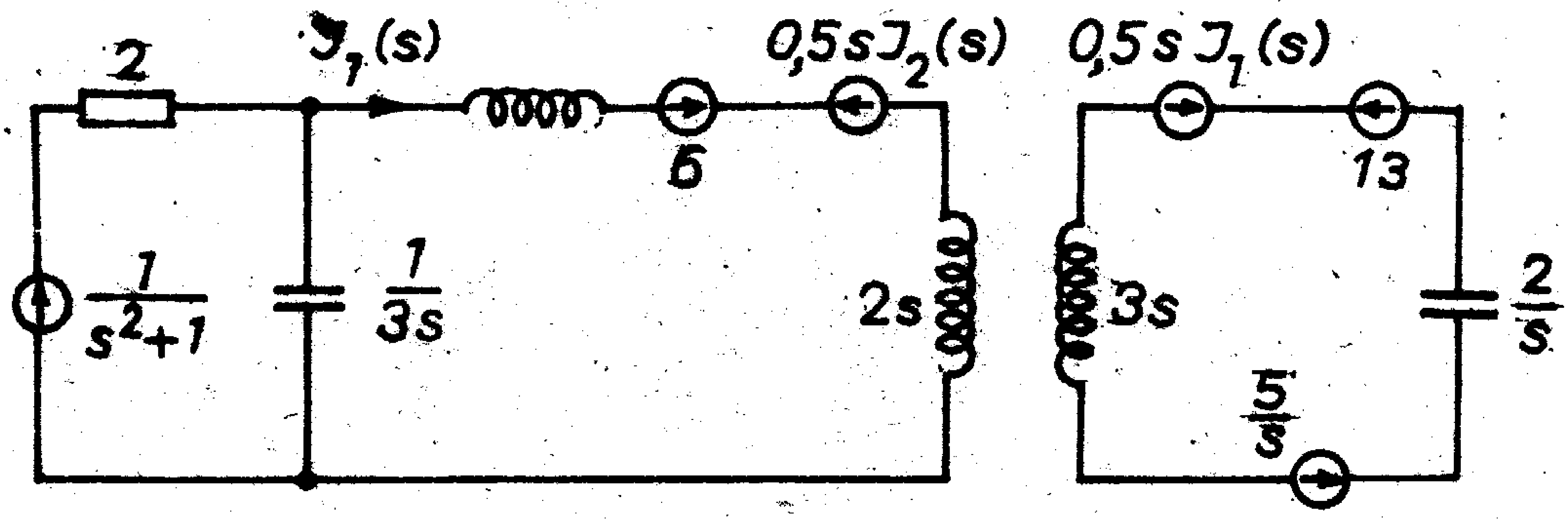
$M = 0,5$, $u_{C2}(0-) = 5$,

$C_2 = 0,5$, $C_1 = 3$.

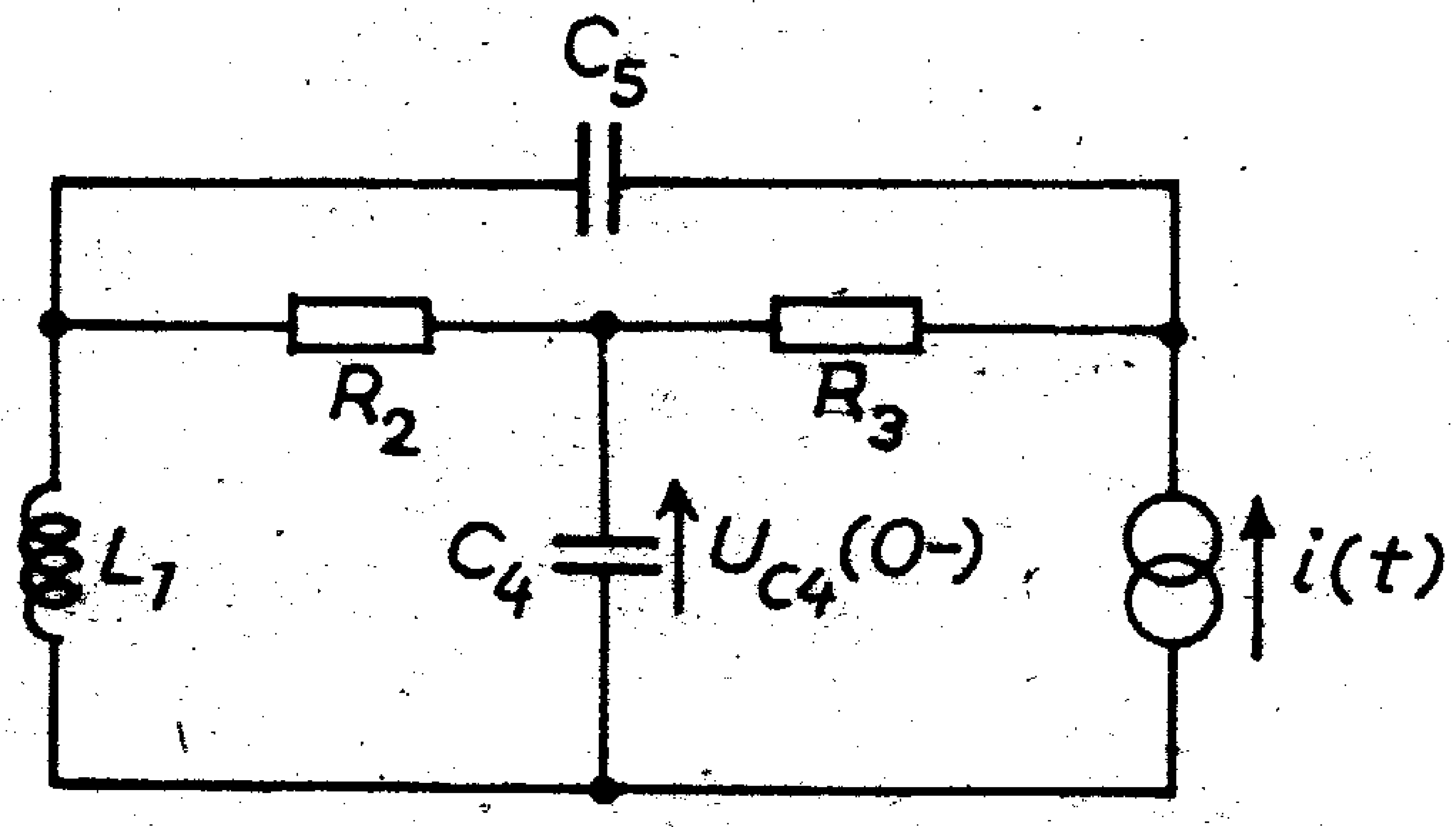
Wynik przedstawiono na rysunku 2.4.



Rys. 2.3

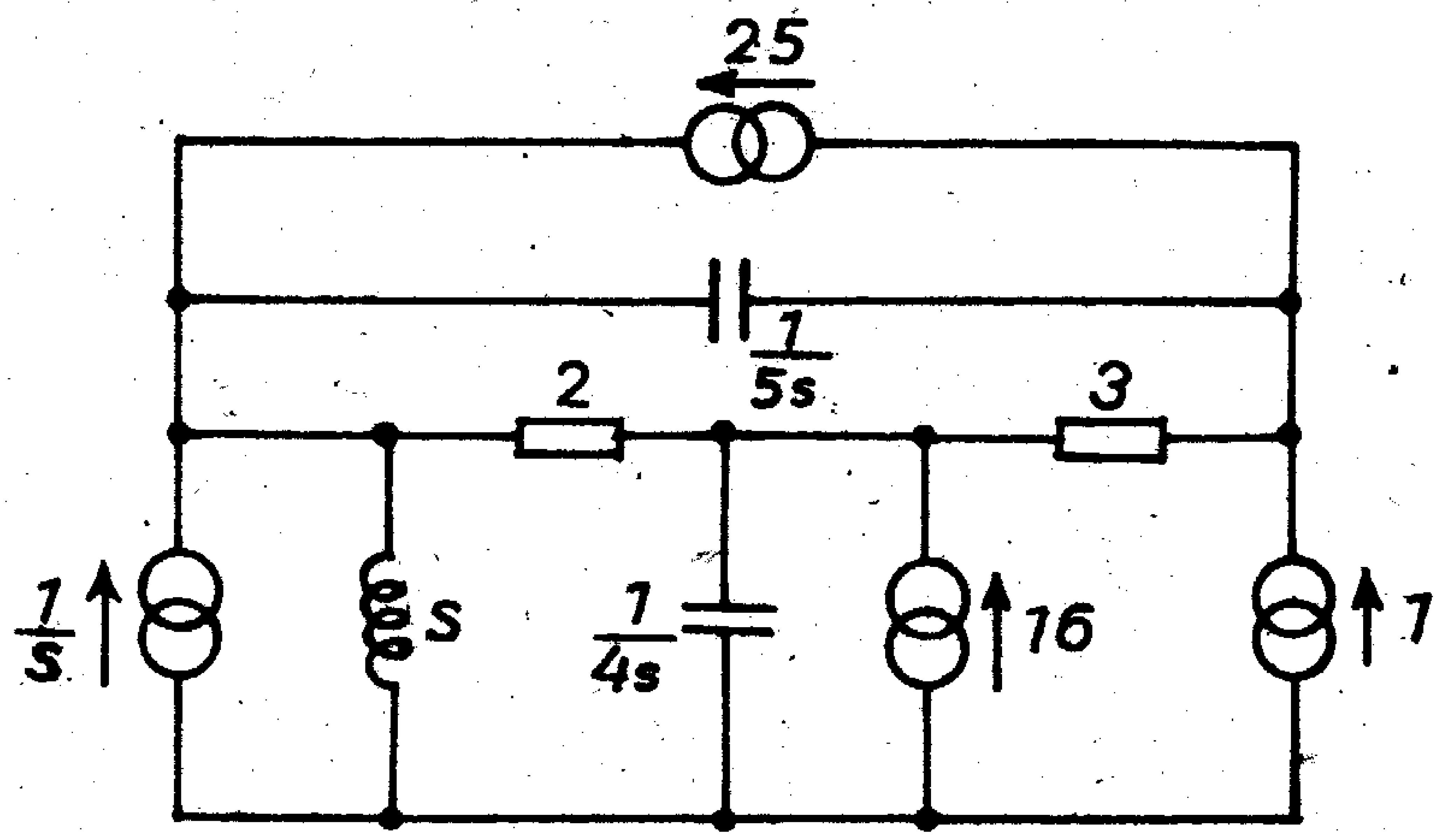


Rys. 2.4

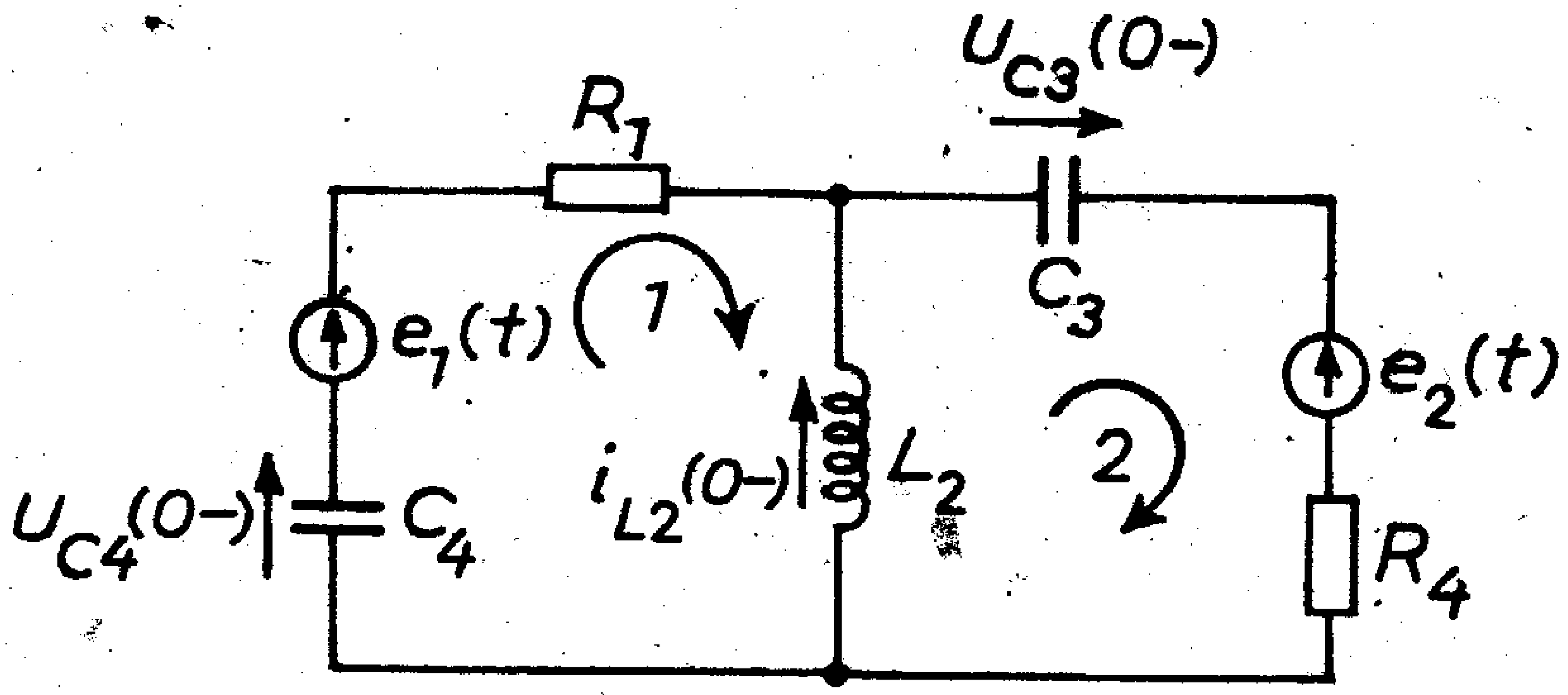


Rys. 2.5

2.19. Sporządzić operatorowy schemat zastępczy obwodu przedstawionego na rysunku 2.5. Warunki początkowe uwzględnić w postaci źródeł prądowych.



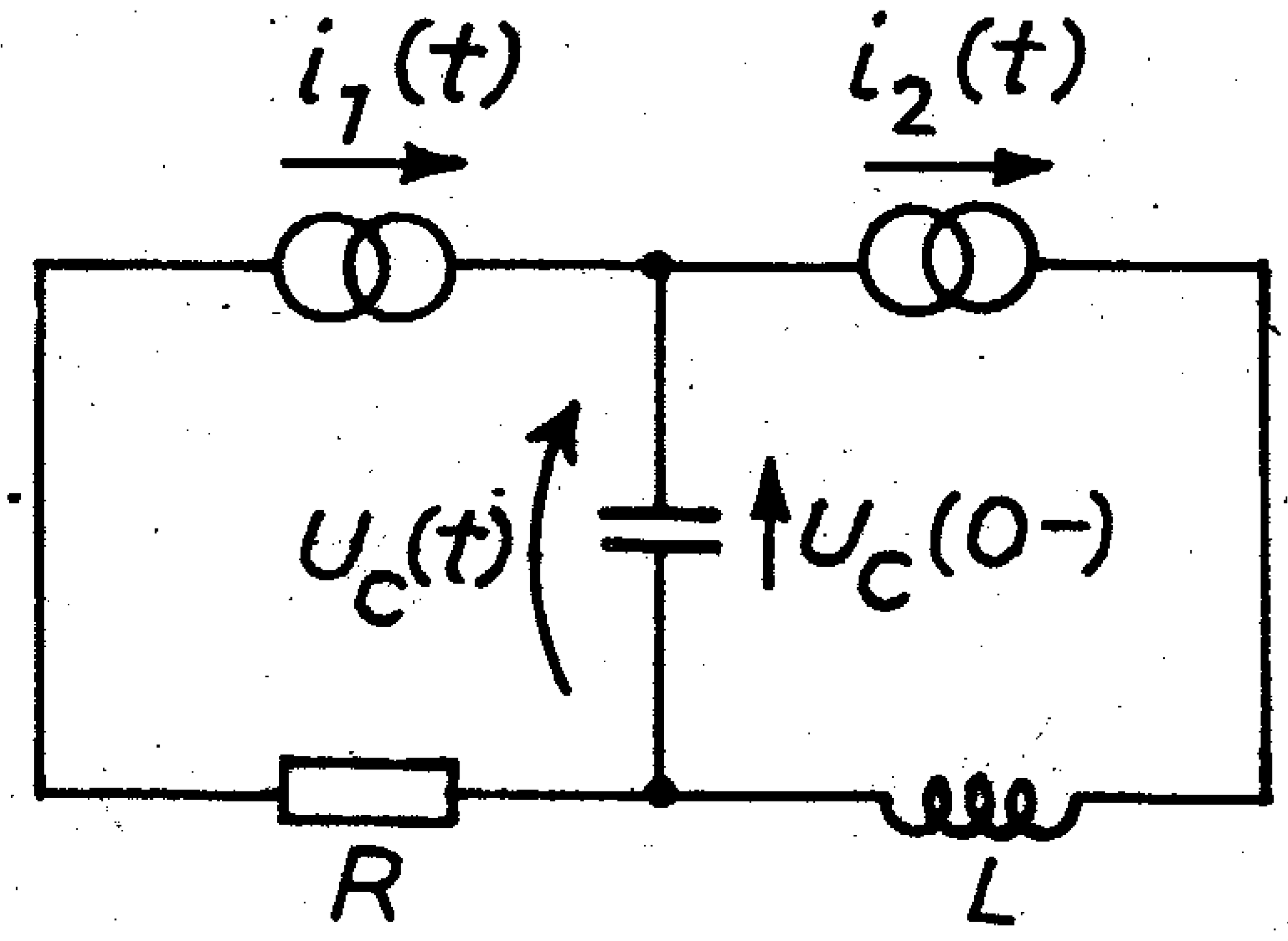
Rys. 2.6



Rys. 2.7

D a n e: $L_1 = 1$, $i_{L1}(0-) = 1$,
$R_2 = 2$, $u_{C4}(0-) = 4$,
$R_3 = 3$, $u_{C5}(0-) = 5$,
$C_4 = 4$, $i(t) = \delta(t)$.
$C_5 = 5$,

Wynik przedstawiono na rysunku 2.6.



Rys. 2.8

2.20. Sporządzić schemat operatorowy obwodu jak na rysunku 2.7. Warunki początkowe uwzględnić w postaci źródeł napięciowych. Wypisać równania wynikające z II prawa Kirchhoffa dla oczka 1 i 2.

W y n i k:

$$\left(R_1 + sL_2 + \frac{1}{sC_4}\right)I_1(s) - sL_2I_2(s) - E_1(s) - \frac{u_{C4}(0-)}{s} - L_2i_{L2}(0-) = 0,$$

$$-sL_2I_1(s) + \left(R_4 + sL_2 - \frac{1}{sC_3}\right)I_2(s) + E_2(s) - \frac{u_{C3}(0-)}{s} - L_2I_{L2}(0-) = 0.$$

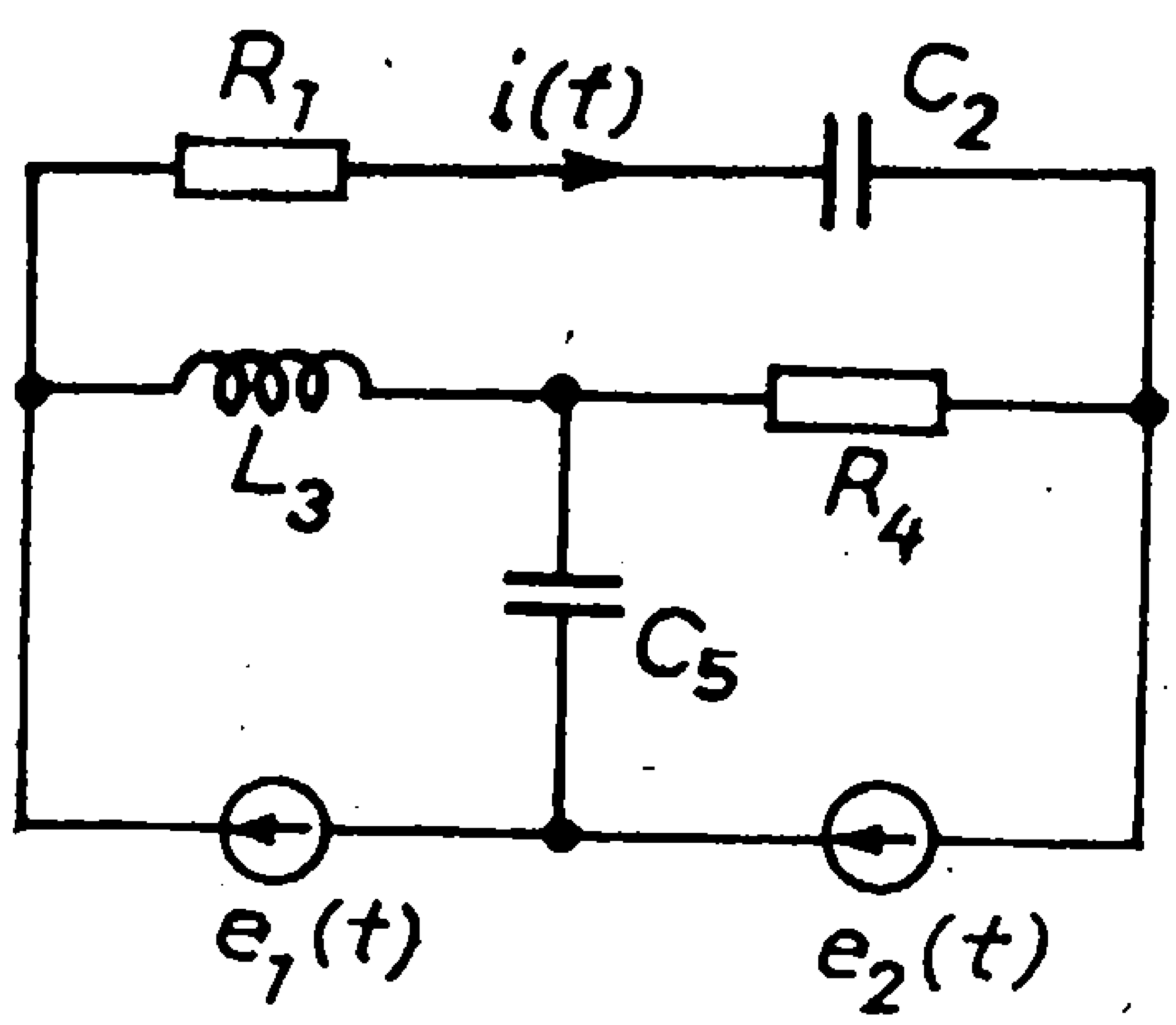
2.21. W układzie z rysunku 2.8 znaleźć przebieg czasowy napięcia $u_C(t)$.

D a n e: $i_1(t) = i_2(t) = \sin t\, 1(t)$, $R = L = 1$,
$u_C(0-) = -1$, $C = 2$.

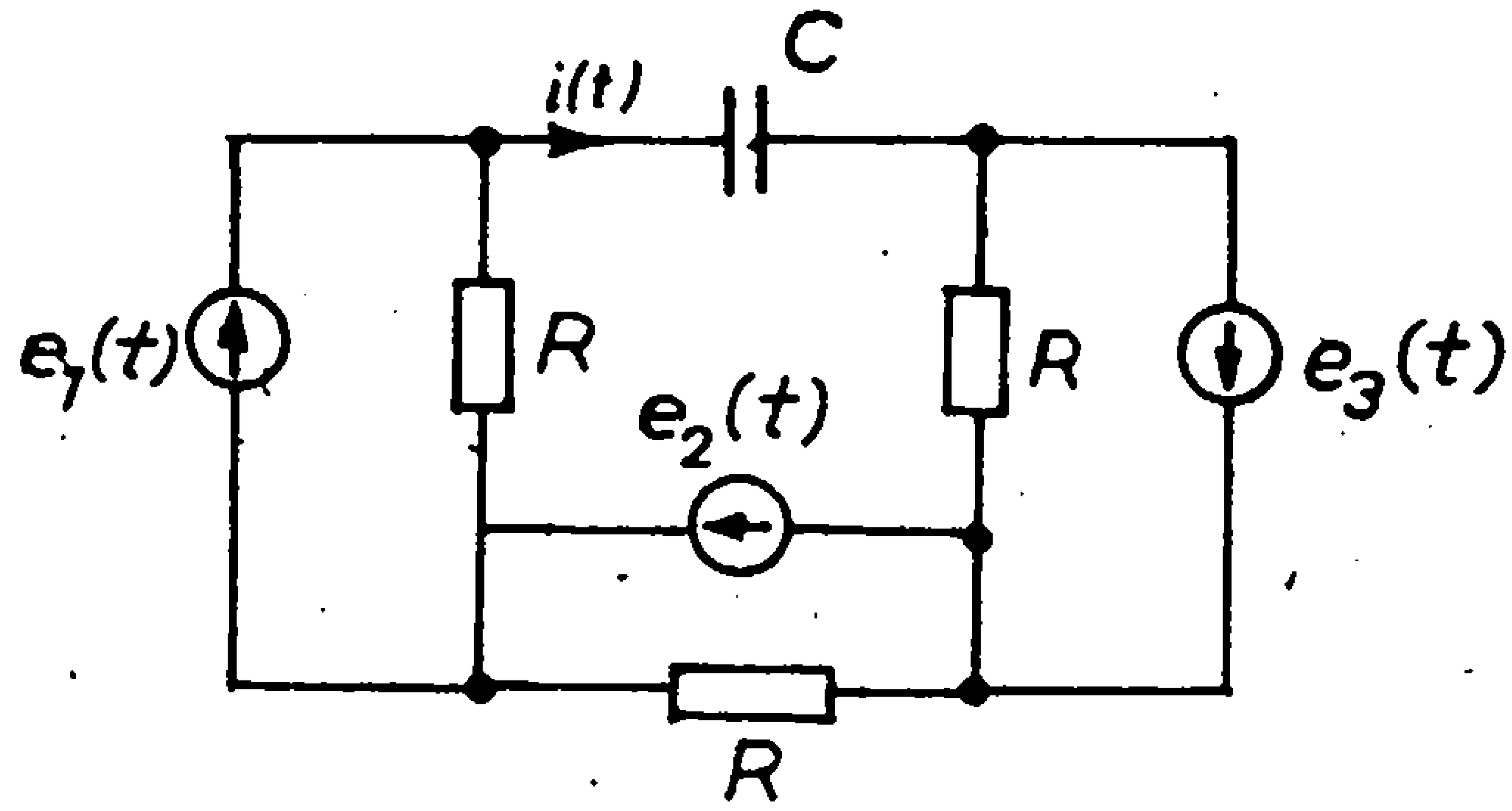
W y n i k:

$$u(t) = -1(t)\cos t\,.$$

2.22. Obliczyć prąd i(t) w obwodzie przedstawionym na rysunku 2.9.



Rys. 2.9



Rys. 2.10

D a n e: $R_1 = 1$, $C_5 = 4$,
$C_2 = 1$, $e_1(t) = 1(t)$,
$L_3 = 2$, $e_2(t) = e^{-t}\,1(t)$,
$R_4 = 3$,

warunki początkowe zerowe.

W y n i k:

$$i(t) = (2 - t)e^{-t}\,1(t).$$

2.23. W układzie z rysunku 2.10 wyznaczyć prąd i(t).

D a n e: $R = C = 5$, $e_2(t) = e^{-t}\,1(t)$,
$u_C(0-) = 0$, $e_3(t) = e^{-2t}\,1(t)$.
$e_1(t) = 1(t)$,

W y n i k:

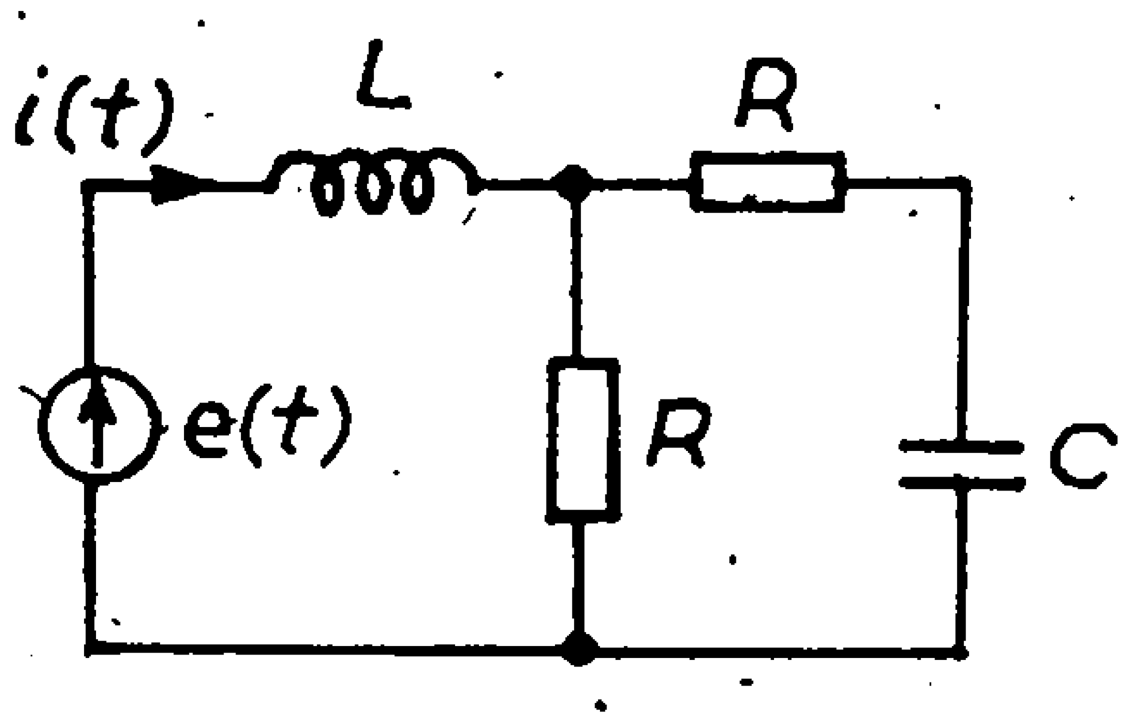
$$i(t) = 15\delta(t) - 5e^{-t}\,1(t) - 10e^{-2t}\,1(t).$$

2.24. Dany jest obwód jak na rysunku 2.11, przy czym $e(t) = \delta(t)$, $R = L = C = 1$, warunki początkowe są zerowe. Sporządzić schemat operatorowy dla tego obwodu, wyznaczyć prąd $I(s)$ oraz $i(t)$.

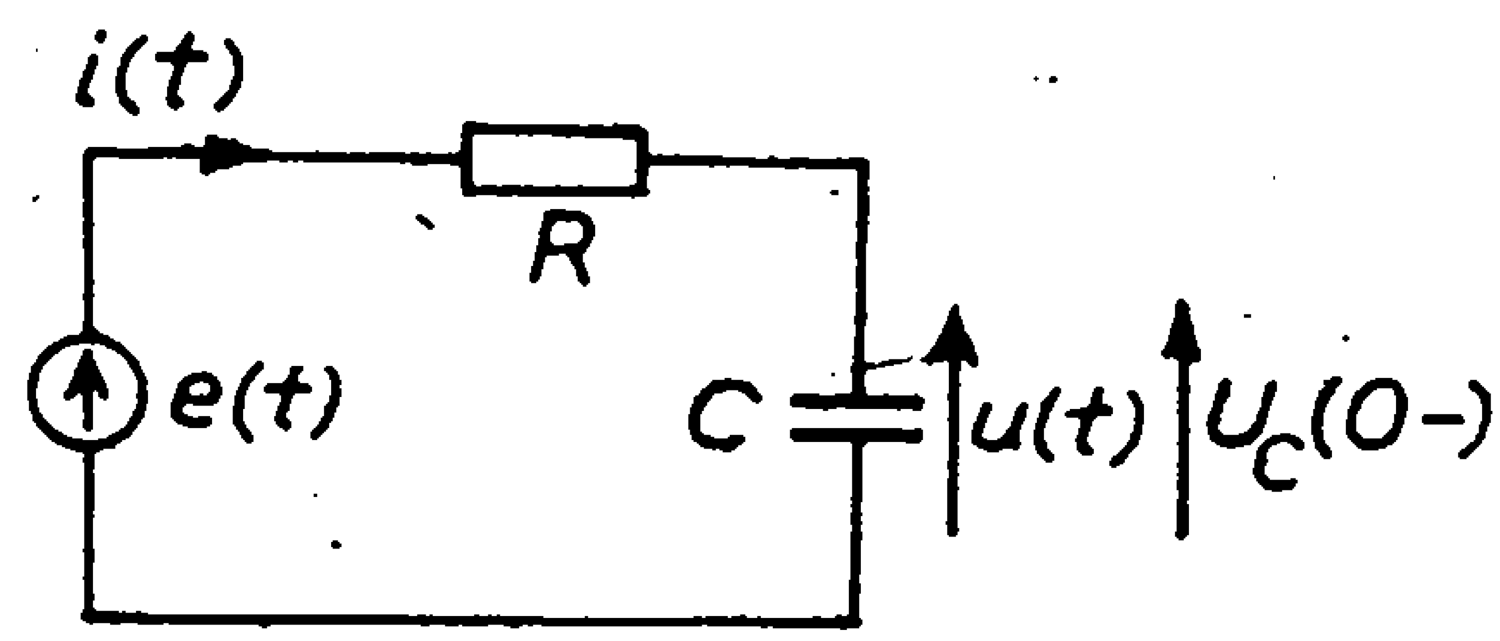
W y n i k:

$$I(s) = \frac{2s + 1}{2s^2 + 2s + 1},$$

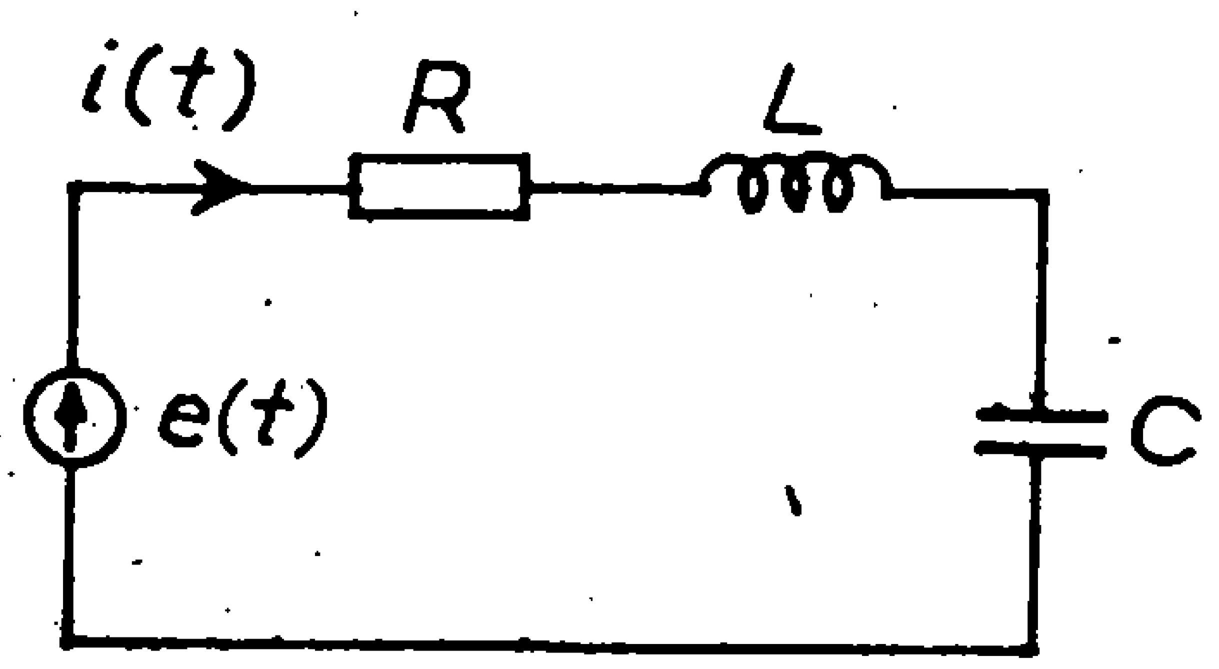
$$i(t) = \left(e^{-0,5t} \cos 0,5t\right) 1(t).$$



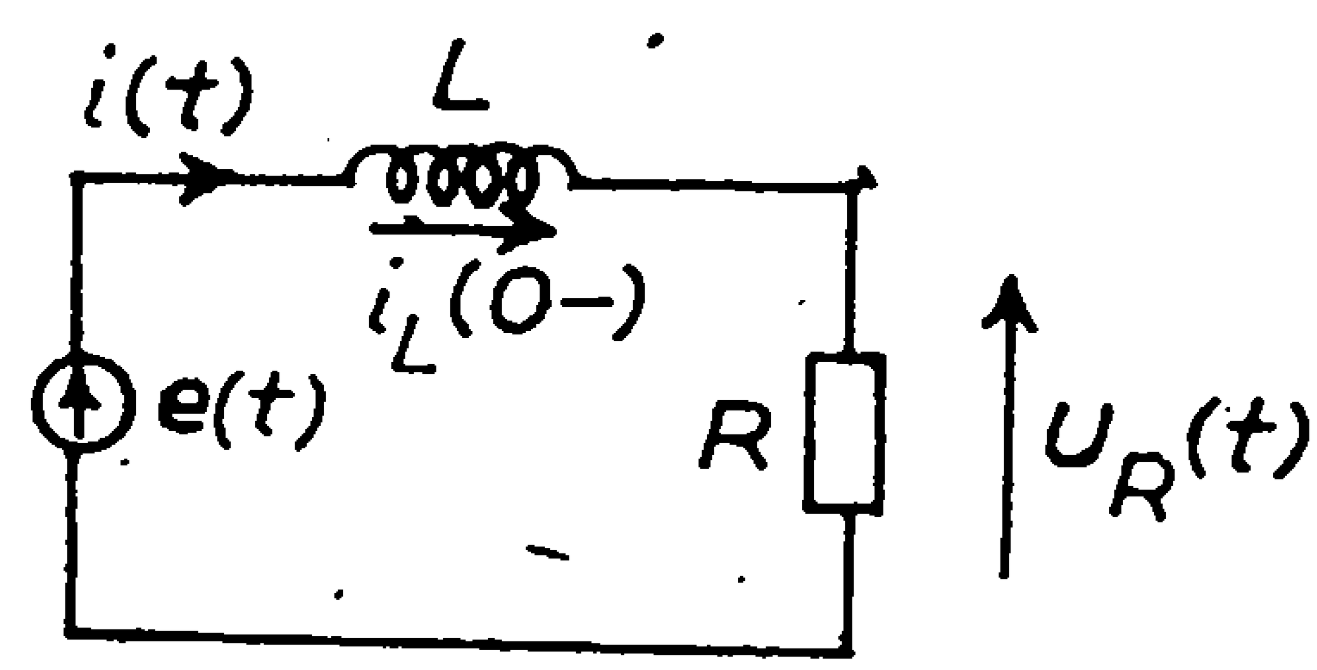
Rys. 2.11



Rys. 2.12



Rys. 2.13



Rys. 2.14

2.25. W układzie z rysunku 2.12 wyznaczyć prąd $i(t)$ oraz napięcie $u(t)$.

D a n e: $R = 1$, $e(t) = 1(t)$,
$C = 1$, $u_c(0-) = 5$.

W y n i k:

$$i(t) = -4e^{-t}\, 1(t),$$

$$u(t) = 1(t) + 4e^{-t}\, 1(t).$$

2.26. Dla jakich wartości znormalizowanej rezystancji R prąd $i(t)$ płynący w obwodzie przedstawionym na rysunku 2.13

a) jest przebiegiem okresowym,

b) ma postać drgań tłumionych,

c) jest przebiegiem nieokresowym.

Wyznaczyć te przebiegi.

D a n e: $e(t) = 1(t)$, $L = C = 1$.

W y n i k:

a) $R = 0$, $i(t) = \sin t$,

b) $R < 2$, $i(t) = \left(\frac{1}{a_1} e^{-bt} \sin a_1 t\right) 1(t)$,

c) $R = 2$, $i(t) = t\, e^{-bt}\, 1(t)$,

$R > 2$, $i(t) = \left(\frac{1}{a_2} e^{-bt} \sinh a_2 t\right) 1(t)$,

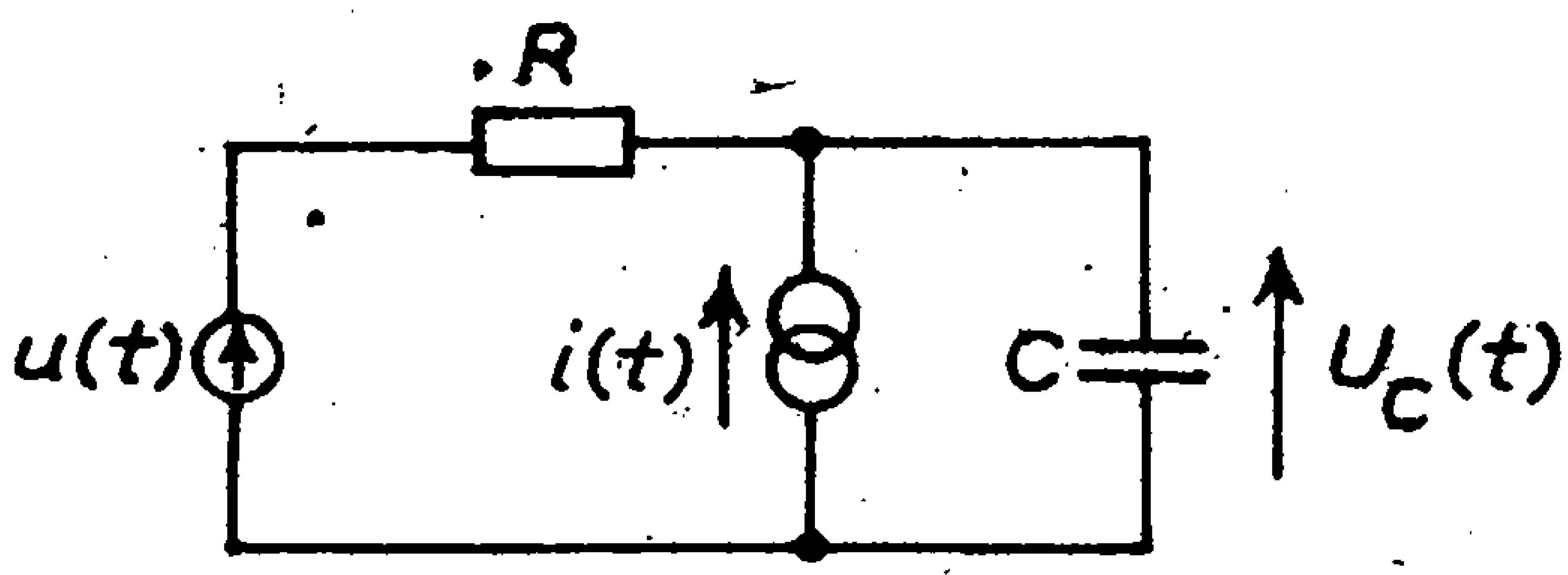
gdzie: $a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - 4}$, $a_1 = -ja_2$, $b = \frac{R}{2}$.

2.27. Wyznaczyć przebieg czasowy napięcia $u_R(t)$ w układzie z rysunku 2.14.

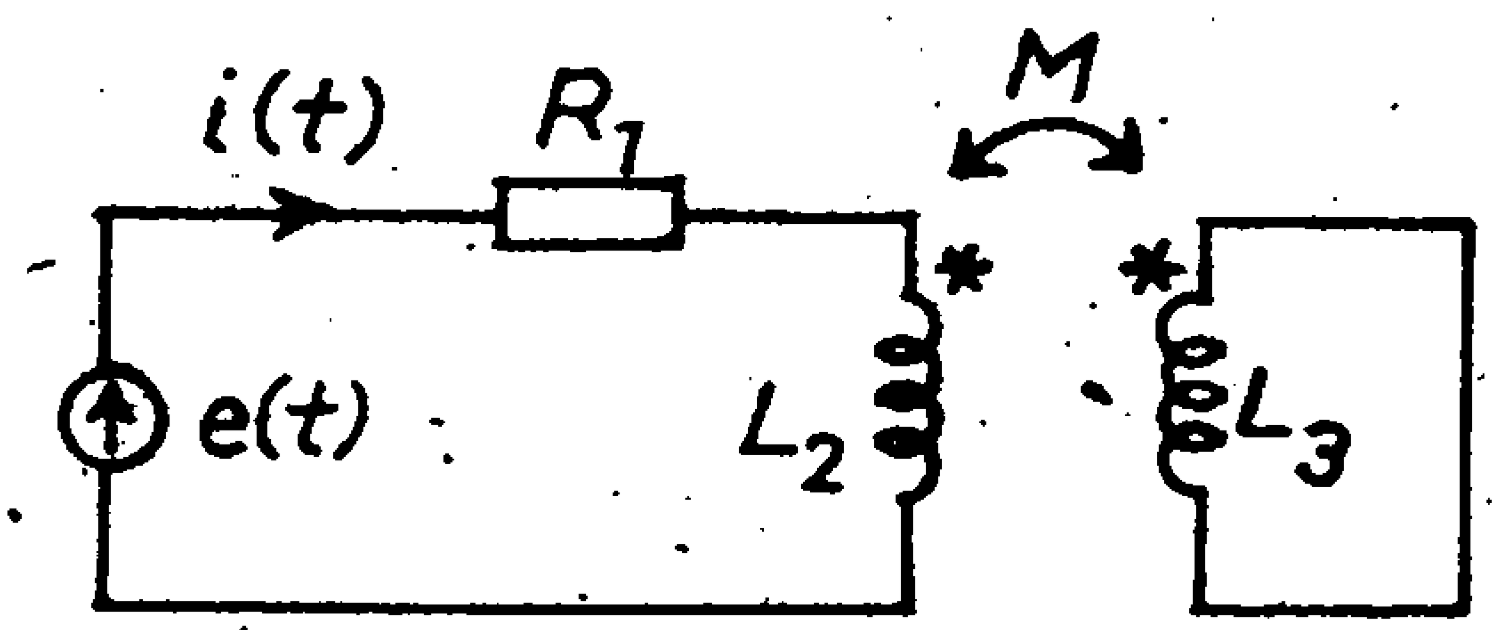
D a n e: $e(t) = 1(t) + \delta(t)$, $L = 8$, $R = 4$, $i_L(0-) = 5$.

W y n i k:

$$u_R(t) = 1(t) + \frac{39}{2} e^{-\frac{1}{2}t}\, 1(t).$$



Rys. 2.15



Rys. 2.16

2.28. Dany jest układ jak na rysunku 2.15. Wyznaczyć napięcie na kondensatorze $u_C(t)$ przyjmując następujące dane:

$u(t) = 10\delta(t)$, $R = 10$,

$i(t) = \delta(t)$, $C = 10$.

$u_C(0-) = 0$,

W y n i k:

$$u_C(t) = 0,2\, e^{-0,01\, t}\, 1(t).$$

2.29. Wyznaczyć prąd $i(t)$ w układzie przedstawionym na rysunku 2.16.

D a n e: $e(t) = 1(t)$, $i_{L2}(0-) = 0$,

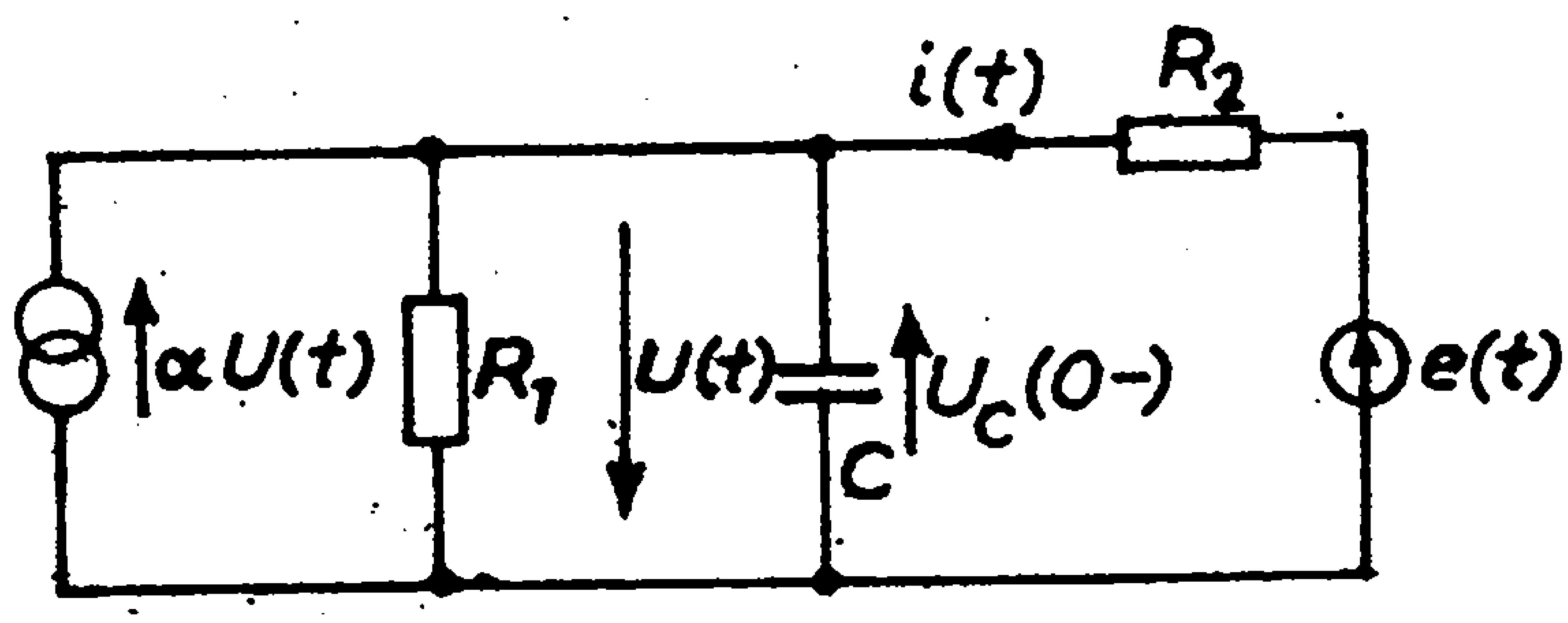
$R_1 = L_2 = L_3 = 1$, $i_{L3}(0-) = 0$.

$M = 0,5$,

W y n i k:

$$i(t) = \frac{1}{R_1}\left[1 - e^{-\left(\frac{R_1 L_3}{L_2 L_3 - M^2}\right)t}\right] 1(t) = \left(1 - e^{-\frac{4}{3}t}\right) 1(t).$$

2.30. Wyznaczyć prąd i(t) płynący w układzie przedstawionym na rysunku 2.17

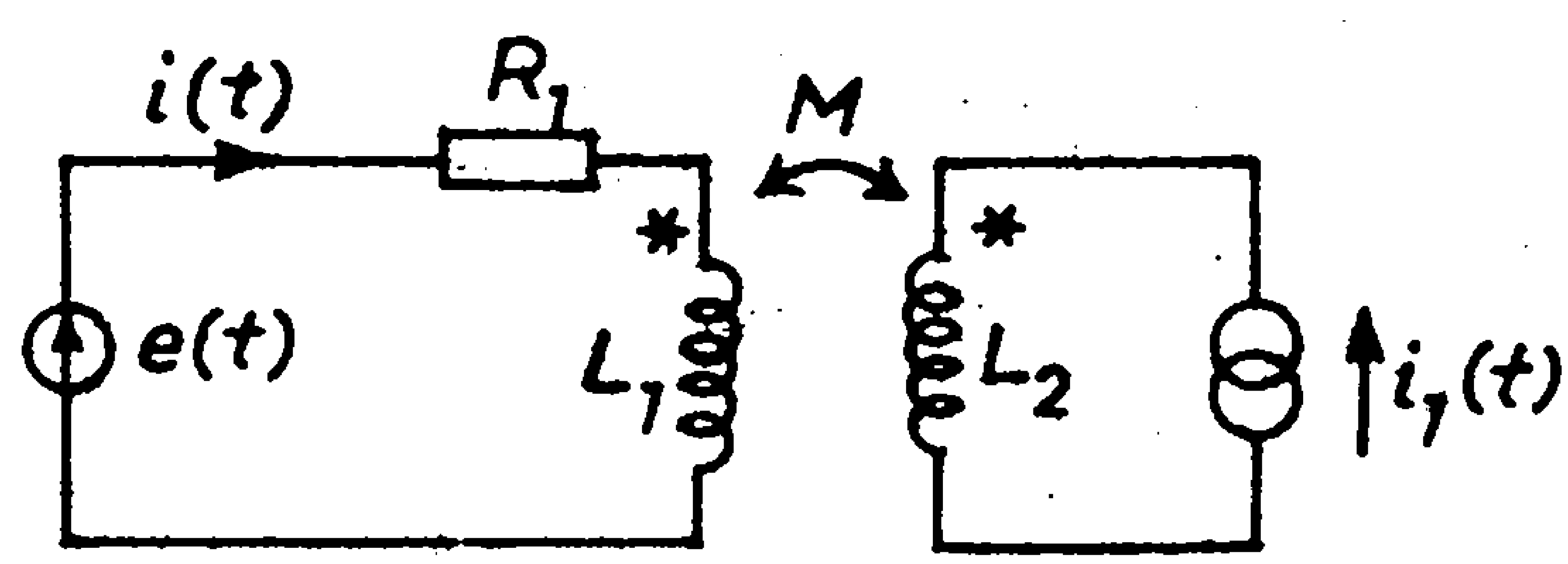


Rys. 2.17

D a n e: $R_1 = 2$, $\alpha = \frac{1}{2}$,
$R_2 = 1$, $u_C(0-) = 1$,
$e(t) = 1(t)$, $C = 2$.

W y n i k:

$$i(t) = \frac{1}{2}\, 1(t) - \frac{1}{2}\, e^{-t}\, 1(t).$$



Rys. 2.18

2.31. W układzie z rysunku 2.18 wyznaczyć prąd i(t).

D a n e: $R_1 = 3$, $e(t) = 1(t-1)$,
$L_1 = 2$, $i_1(t) = 2 \cdot 1(t)$,
$M = 0{,}5$, $i(0-) = 0$.

R o z w i ą z a n i e:

$$E(s) = \frac{e^{-s}}{s}, \quad I_1(s) = \frac{2}{s}.$$

Z II prawa Kirchhoffa dla lewego oczka otrzymuje się:

$$E(s) = (R_1 + sL_1)\, I(s) + sM\, I_1(s).$$

Wyliczając I(s) i wstawiając wartości elementów otrzymuje się

$$I(s) = \frac{\frac{e^{-s}}{s} - 1}{s + 3} = \frac{e^{-s}}{3s} - \frac{e^{-s}}{3(s + 3)} - \frac{1}{s + 3}.$$

Szukany prąd wynosi więc

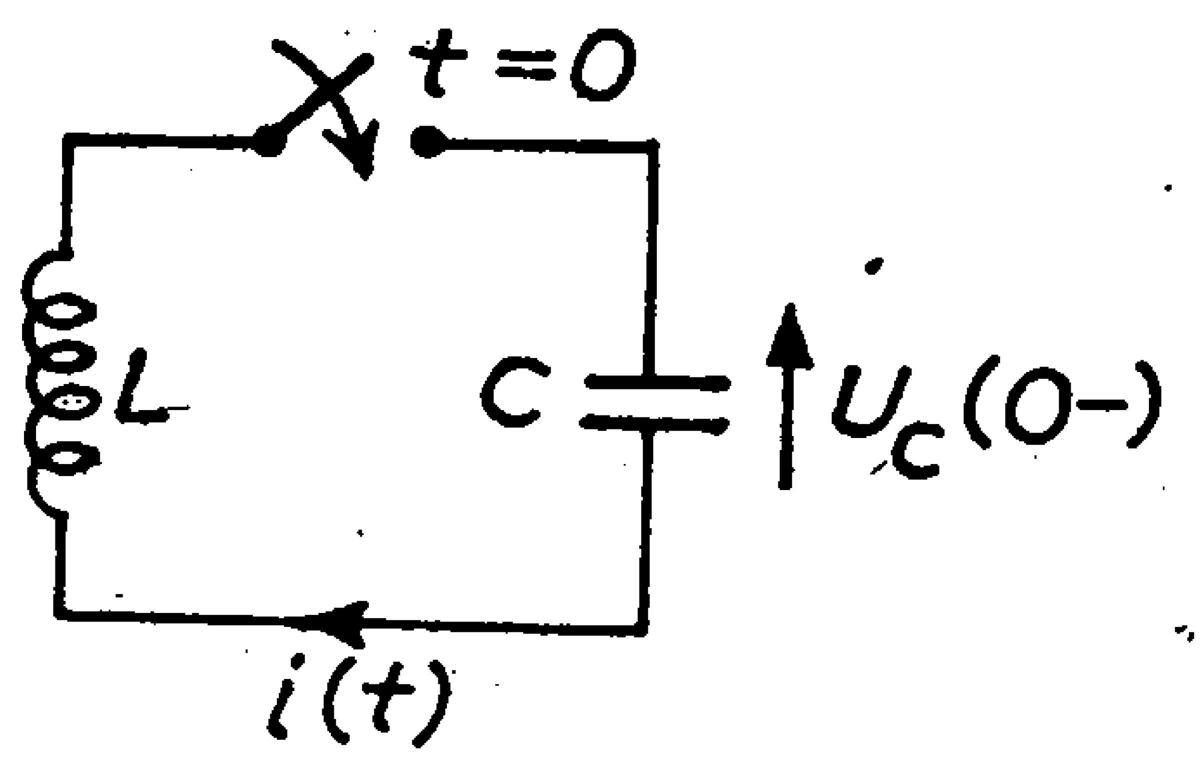
$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[I(s)\right] = \frac{1}{3}\left[1(t - 1) - e^{-3(t-1)}1(t - 1)\right] - e^{-3t}\,1(t).$$

2.32. Dany jest obwód jak na rysunku 2.19. Obliczyć prąd i(t) przyjmując następujące wartości:

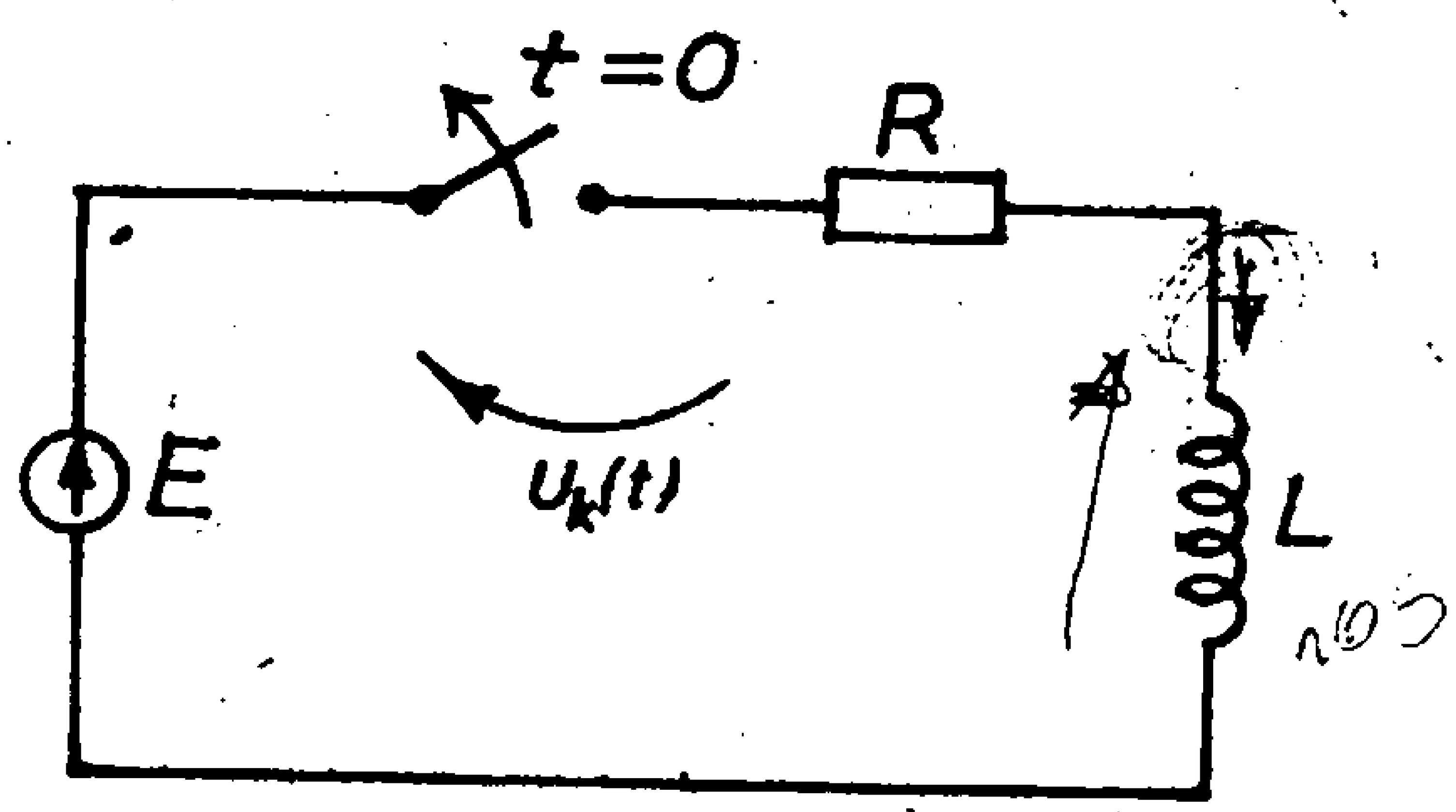
$i_L(0-) = 0$, $L = 1$,
$u_C(0-) = 1$, $C = 1$.

W y n i k:

$$i(t) = -(\sin t)\, 1(t).$$



Rys. 2.19



Rys. 2.20

2.33. Przełącznik w układzie z rysunku 2.20 był nieskończenie długo zwarty. W chwili t = 0 przełącznik rozwarto. Znaleźć napięcie na przełączniku $u_k(t)$.

D a n e: $L = 10$, $R = 10$, $E = 5$.

W y n i k:

$$u_k(t) = 5\left[1(t) + \delta(t)\right].$$

2.34. Dany jest obwód jak na rysunku 2.21, przy czym $L = \frac{4}{9}$, $C = 1$, $R = 0{,}2$. Obliczyć składową swobodną i wymuszoną napięcia u(t) jeżeli:

a) $i(t) = 1(t)$,

b) $i(t) = e^{-t}\,1(t)$,

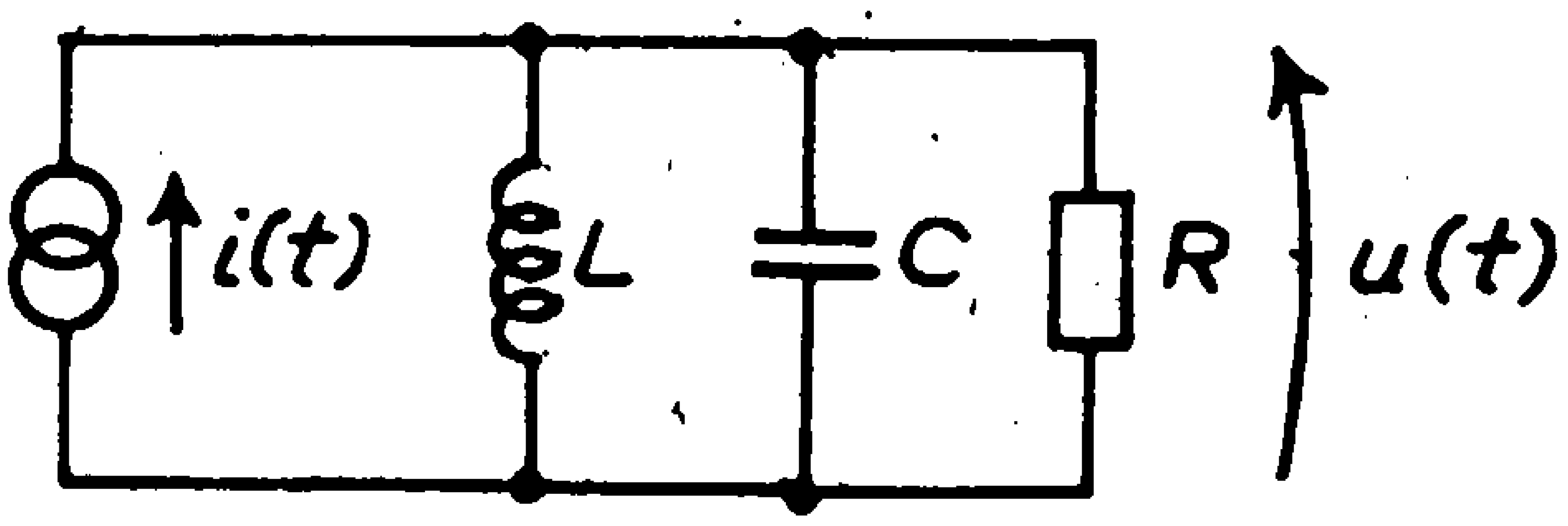
c) $i(t) = e^{-\frac{t}{2}}\,1(t)$.

W y n i k:

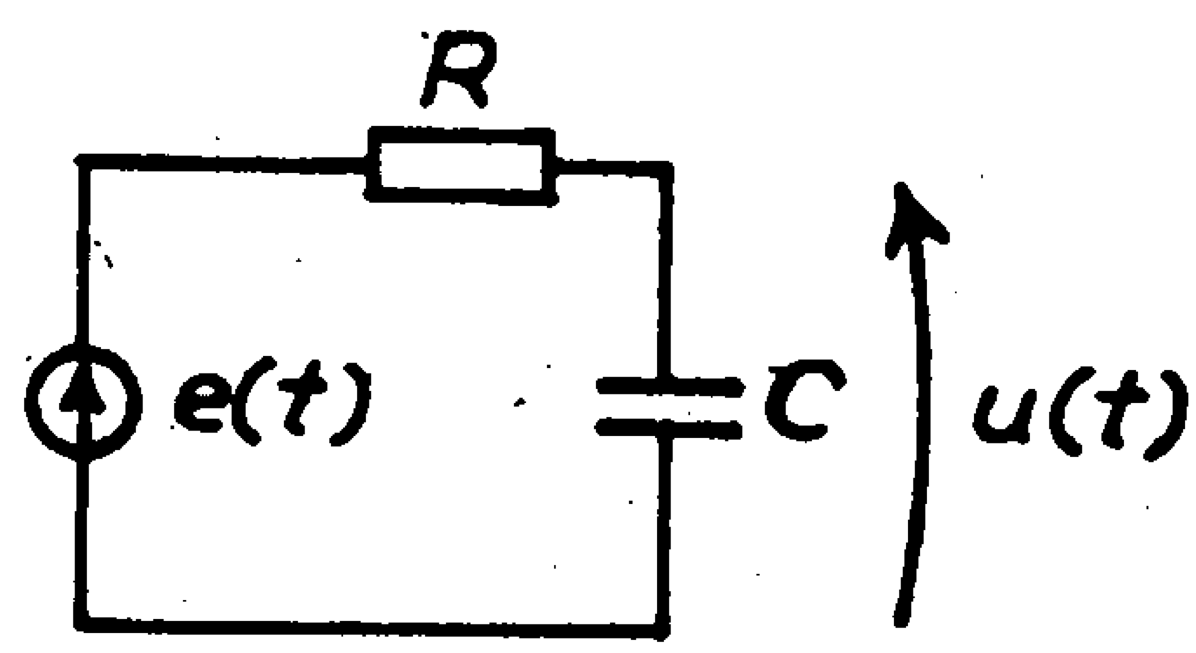
a) $u_s(t) = \left(\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2} t} - e^{-\frac{9}{2} t}\right) 1(t)$, $\quad u_w(t) = 0$,

b) $u_s(t) = -\left(\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2} t} + \frac{9}{56} e^{-\frac{9}{2} t}\right) 1(t)$, $\quad u_w(t) = \frac{4}{7} e^{-t}\,1(t)$,

c) wydzielenie składowej swobodnej i wymuszonej nie jest możliwe.



Rys. 2.21



Rys. 2.22

2.35. W obwodzie z rysunku 2.22 znaleźć składową przejściową i ustaloną napięcia u(t), jeżeli: R = 1, C = 1, warunki początkowe zerowe, oraz

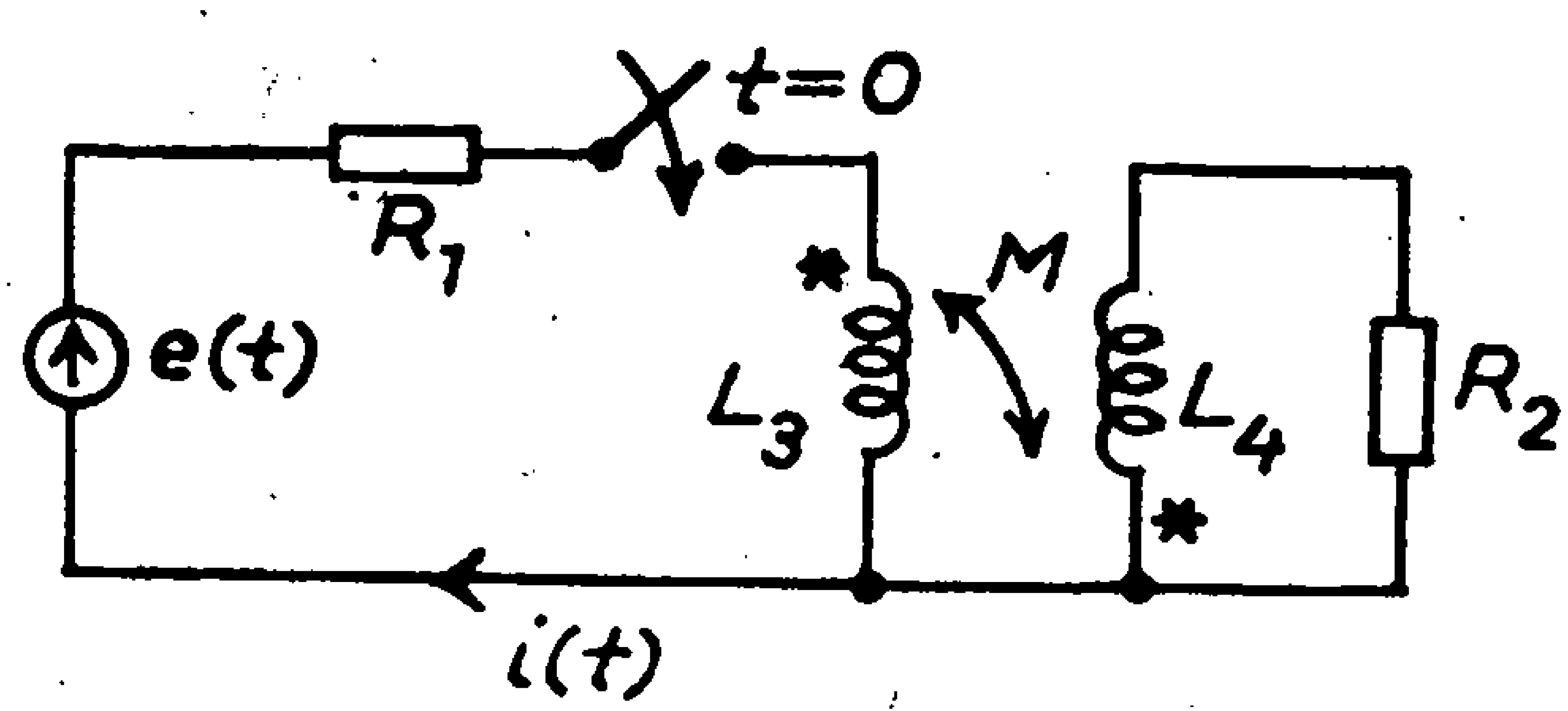
a) $e(t) = 1(t)$,

b) $e(t) = (\sin t)\,1(t)$.

W y n i k:

a) $u_p(t) = -e^{-t}\,1(t)$, $\quad u_u(t) = 1(t)$,

b) $u_p(t) = \frac{1}{2} e^{-t}\,1(t)$, $\quad u_u(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) 1(t)\right]$.



Rys. 2.23

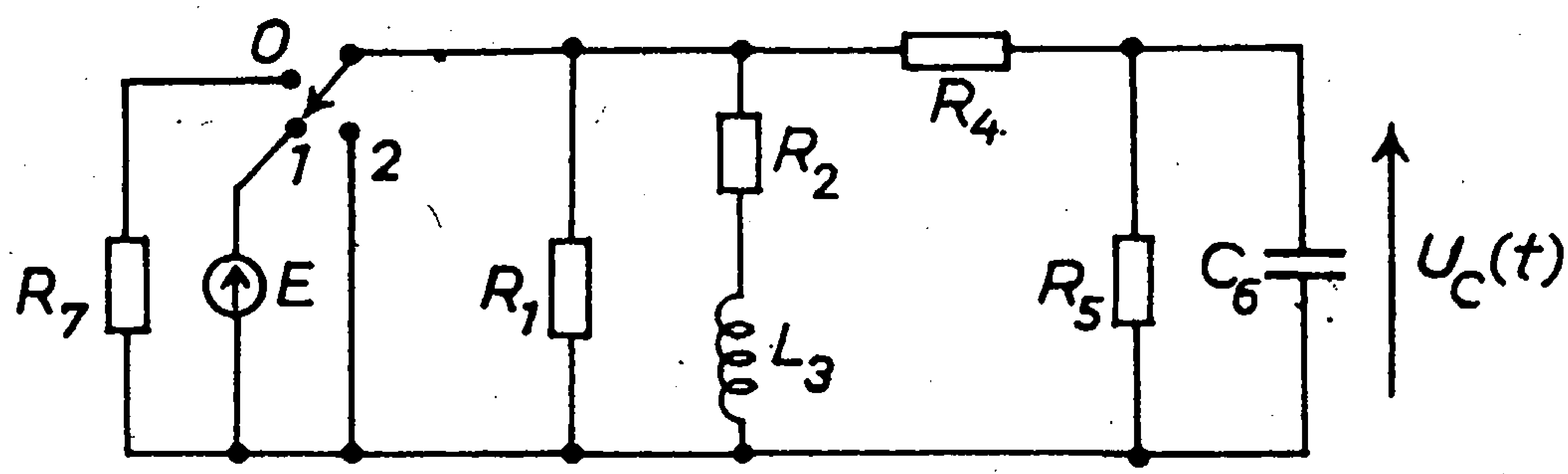
2.36. W układzie z rysunku 2.23 w chwili t = 0 zwarto wyłącznik. Znaleźć przebieg prądu i(t), wyodrębnić składową przejściową i ustaloną.

D a n e: $R_1 = 2$, $L_4 = 5$,
$R_2 = 3$, $M = 2$,
$L_3 = 1$, $e(t) = \sin t$,
warunki początkowe zerowe.
W y n i k:

$$i_p(t) = (0{,}1\, e^{-t} + 0{,}05\, e^{-6t})\, 1(t),$$

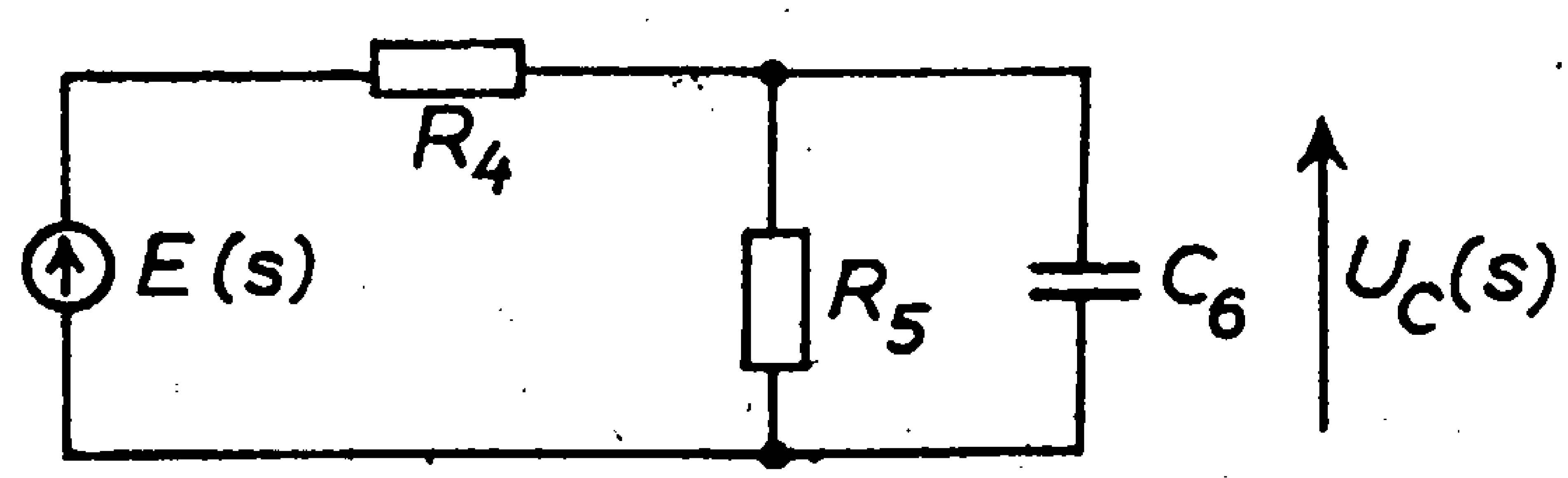
$$i_u(t) = \left[0{,}38 \sin(t - 23{,}2^{\circ})\right] 1(t).$$

2.37. Przełącznik w układzie z rysunku 2.24 znajdował się nieskończenie długo w pozycji 0. W chwili t = 0 został przestawiony do pozycji



Rys. 2.24

1, a w chwili t = 2 przestawiono go do pozycji 2. Znaleźć reakcję $u_c(t)$, wyodrębnić składową swobodną i wymuszoną tej reakcji.
D a n e: $E = R_1 = R_2 = L_3 = R_4 = R_5 = C_6 = 1$.



Rys. 2.25

R o z w i ą z a n i e:

Dwójnik zbudowany z elementów R_1, R_2 i L_3 jest połączony równolegle ze źródłem napięciowym, nie wpływa więc na reakcję $u_C(t)$ i można go usunąć z układu. Trójpozycyjny przełącznik i źródło napięcia stałego można zastąpić jednym tylko źródłem napięciowym o sile elektromotorycznej $e(t) = 1(t) - 1(t-2)$. Wobec tego schemat operatorowy obwodu uprości się do postaci przedstawionej na rysunku 2.25, przy czym $E(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s}$.

Transformata poszukiwanego napięcia wynosi

$$U_C(s) = T(s)E(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s(s+2)} = \frac{1}{2s}\left(1 - e^{-2s}\right) + \frac{1}{2(s+2)}\left(e^{-2s} - 1\right).$$

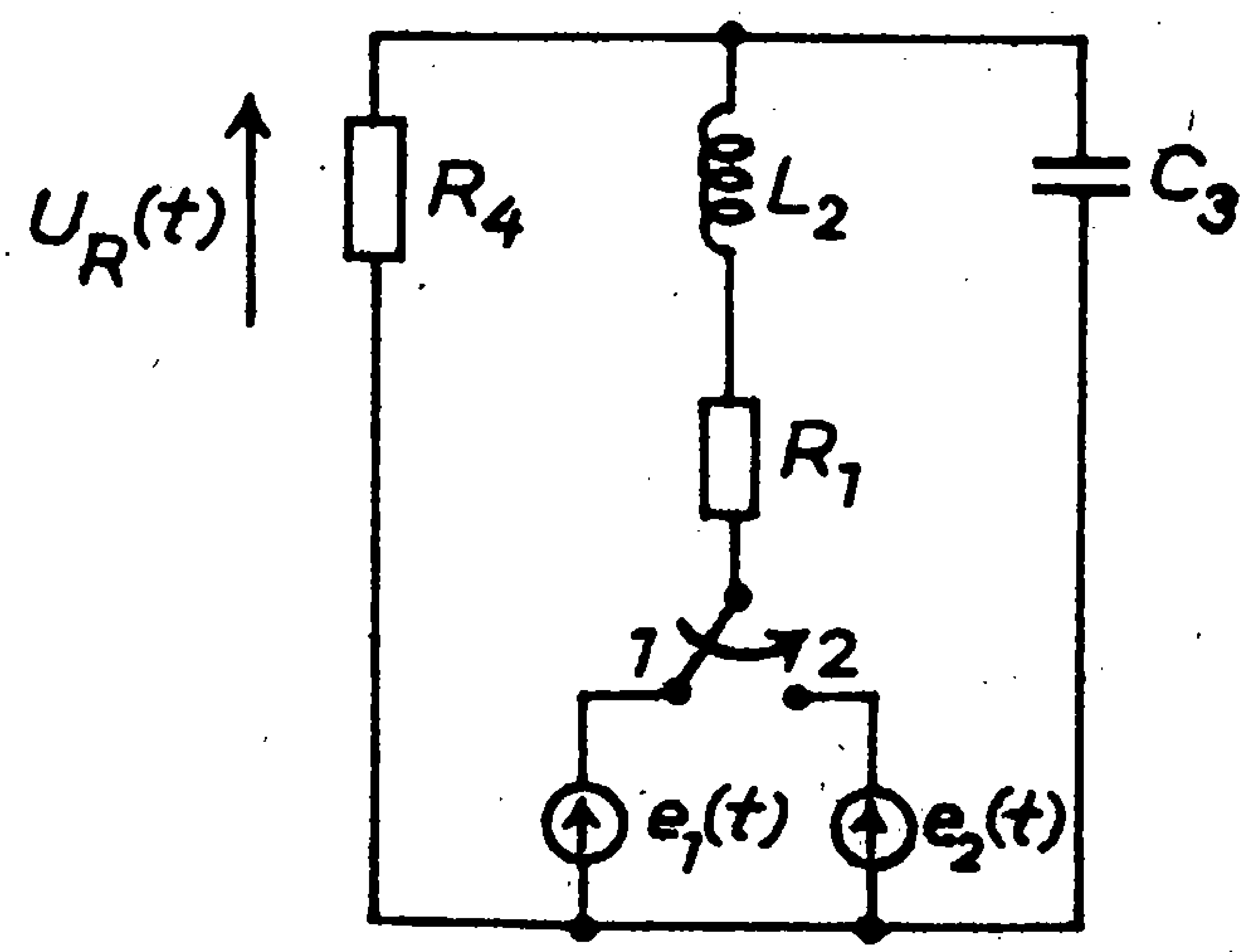
Pierwszy składnik sumy zawiera tylko biegun pobudzenia, transformata odwrotna tej funkcji jest zatem składową wymuszoną:

$$u_{Cw}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2s}\left(1 - e^{-2s}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[1(t) - 1(t-2)\right].$$

Z kolei, drugi składnik $U_C(s)$ zawiera tylko biegun transmitancji, jego transformata odwrotna jest zatem składową swobodną:

$$u_{Cs}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2(s+2)}\left(e^{-2s} - 1\right)\right] = \frac{1}{2}\left[e^{-2t+4}\,1(t-2) - e^{-2t}\,1(t)\right].$$

2.38. W układzie z rysunku 2.26 przełącznik znajdował się nieskończenie długo w pozycji 1. W chwili t = 0 przełącznik przestawiono do pozycji 2. Wyznaczyć przebieg czasowy napięcia $u_R(t)$ począwszy od momentu komutacji.



Rys. 2.26

D a n e: $e_1(t) = E = 4$, $L_2 = 1$,

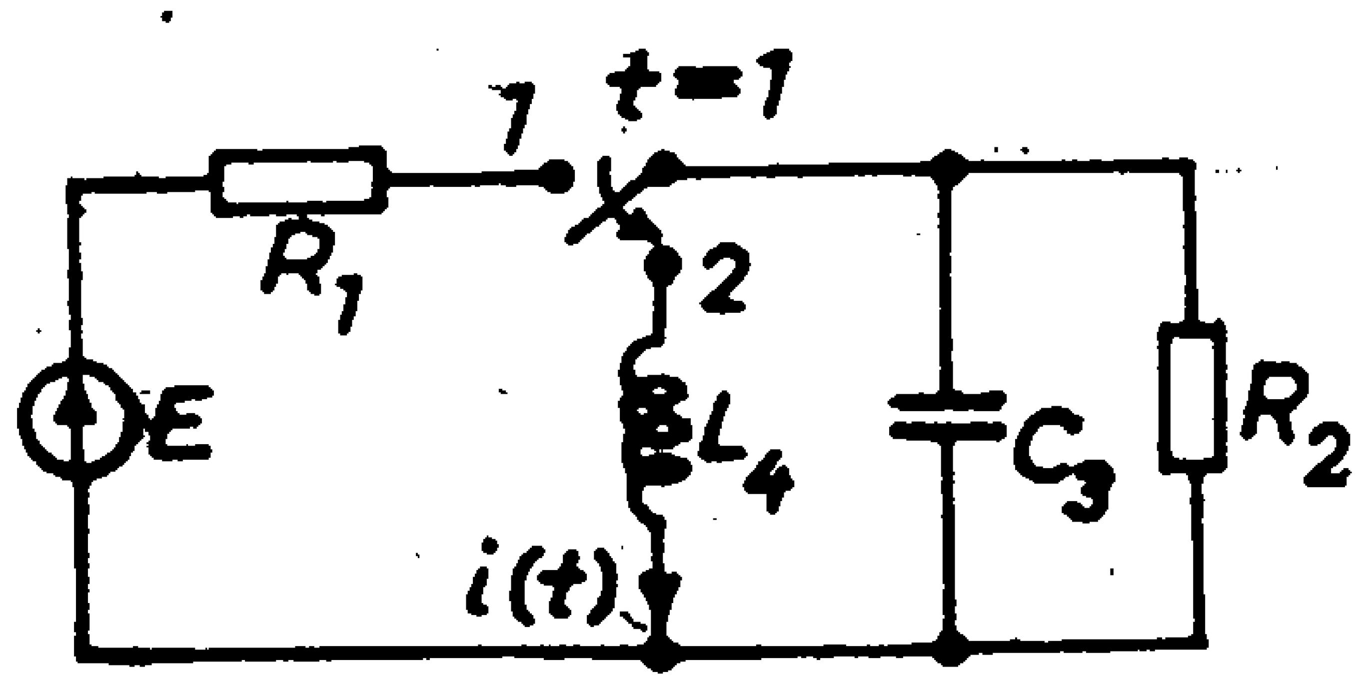
$e_2(t) = 5e^{-t}$, $C_3 = \frac{1}{3}$,

$R_1 = 1$, $R_4 = \frac{2}{3}$.

W y n i k:

$$u_R(t) = \left(5e^{-t} - \frac{33}{4}e^{-2t} + \frac{19}{4}e^{-4t}\right)1(t).$$

2.39. W chwili t = 1 przestawiono przełącznik z pozycji 1 do pozycji 2 (rys. 2.27). Znaleźć prąd i(t).



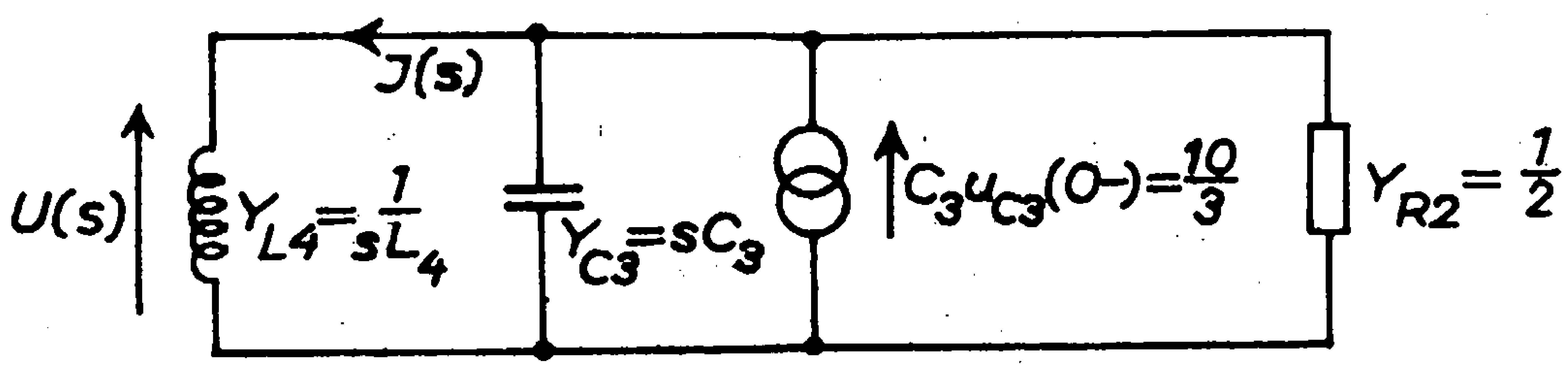
Rys. 2.27

D a n e: $R_1 = 1$, $L_4 = 2$,
$R_2 = 2$, $E = 5$.
$C_3 = 1$,

R o z w i ą z a n i e:

Najpierw dokonamy zamiany zmiennych podstawiając $t' = t - 1$. Można zauważyć, że komutacja następuje w chwili $t' = 0$. Schemat operatorowy obwodu przedstawiono na rysunku 2.28. Z I prawa Kirchhoffa otrzymuje się:

$$C_3\, U_{C3}(0-) = U(s)\left(\frac{1}{sL_4} + sC_3 + \frac{1}{R_2}\right).$$



Rys. 2.28

Po wyliczeniu U(s) i wstawieniu wartości elementów otrzymuje się

$$U(s) = \frac{10}{3}\,\frac{s}{s^2 + 0{,}5\,s + 0{,}5}.$$

Z prawa Ohma wynika, że

$$I(s) = U(s)\,\frac{1}{sL_4} = \frac{5}{3}\,\frac{1}{s^2 + 0{,}5\,s + 0{,}5} = \frac{20}{3\sqrt{7}}\,\frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}.$$

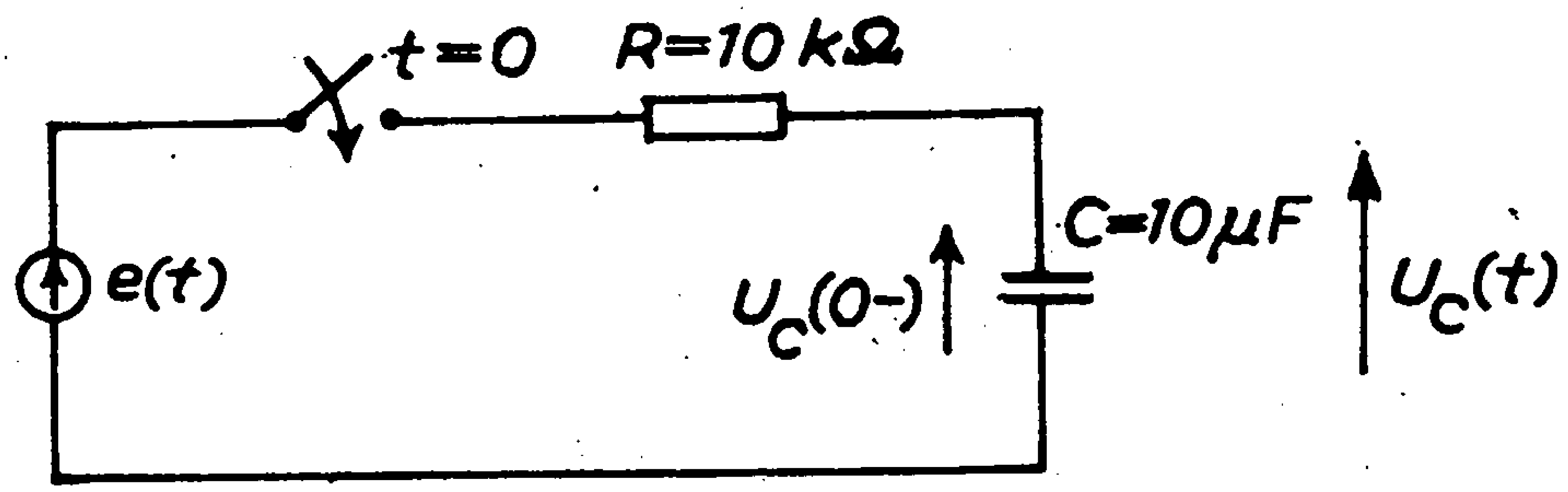
Zatem

$$i(t') = \left(\frac{20}{3\sqrt{7}}\, e^{-\frac{1}{4}t'} \sin\frac{\sqrt{7}}{4}t'\right) 1(t').$$

Wracamy teraz do poprzedniej zmiennej podstawiając $t' = t - 1$ i otrzymujemy ostatecznie

$$i(t) = \left[\frac{20}{3\sqrt{7}}\, e^{-\frac{1}{4}(t-1)} \sin\frac{\sqrt{7}}{4}(t-1)\right] 1(t-1).$$

2.40. Napięciowe źródło $e(t) = 20 \sin(10t + \alpha)$V włączono w chwili $t = 0$ do obwodu RC (rys. 2.29). Do chwili przyłączenia źródła kondensator C był naładowany i napięcie między okładkami tego kondensatora wynosiło $u_C(0-) = -5$ V. Obliczyć napięcie $u_C(t)$ oraz fazę początkową α, dla której nie wystąpi stan nieustalony po zwarciu klucza.



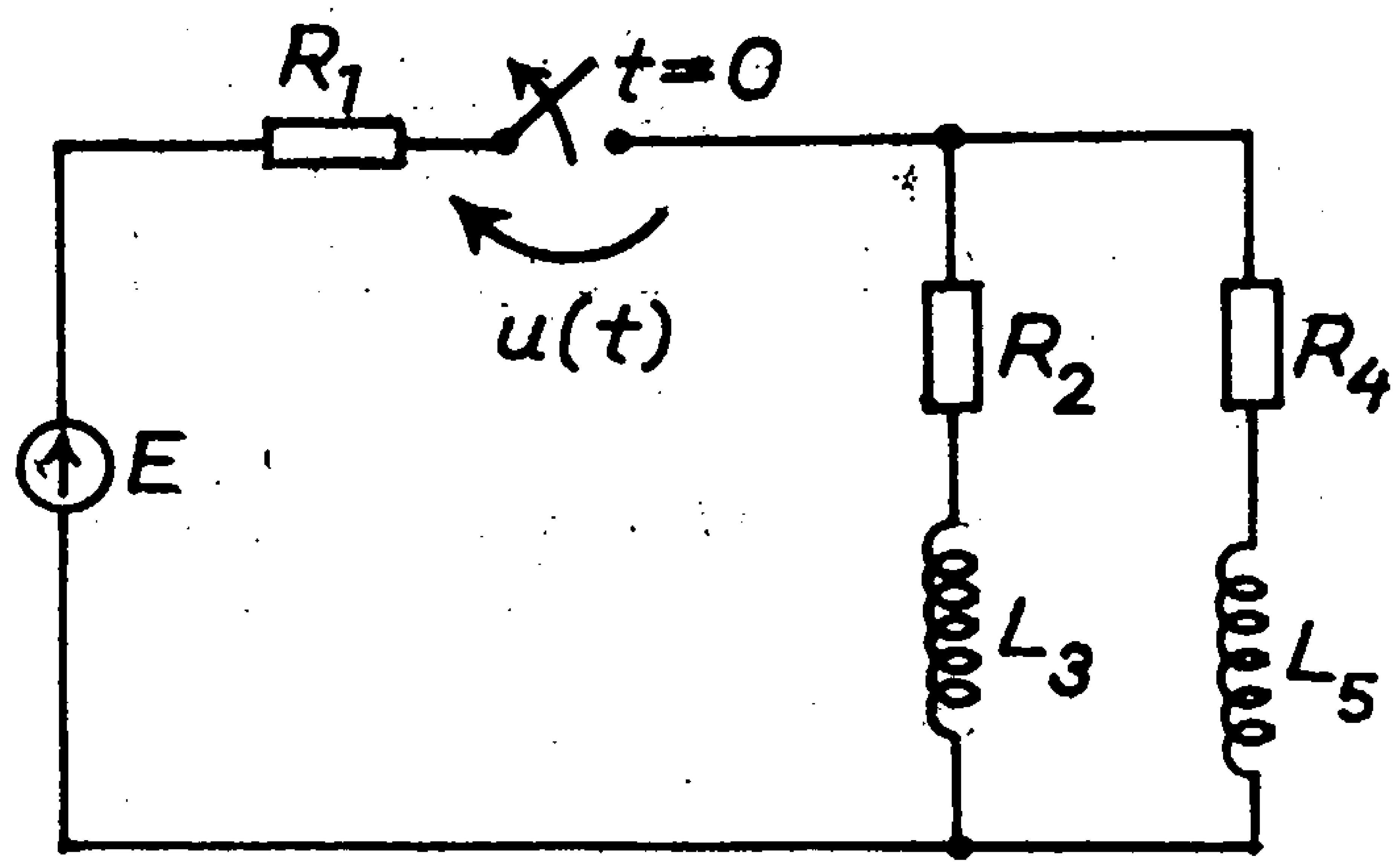
Rys. 2.29

W y n i k:

$$u_C(t) = \left\{\frac{20}{\sqrt{2}}\left[\sin(10t + \alpha - 45^\circ) - \left[\sin(\alpha - 45^\circ)\right]e^{-10t}\right] - 5e^{-10t}\right\} 1(t),$$

stan nieustalony nie wystąpi dla $\alpha = 24{,}3^\circ \pm k\ 360^\circ$ lub $\alpha = -114{,}3^\circ \pm$ $\pm k\ 360^\circ$,
gdzie $k = 0,1,2,3,\ldots$

2.41. Wyłącznik w układzie z rysunku 2.30 był nieskończenie długo zwarty. W chwili $t = 0$ wyłącznik rozwarto. Obliczyć napięcie $u(t)$.



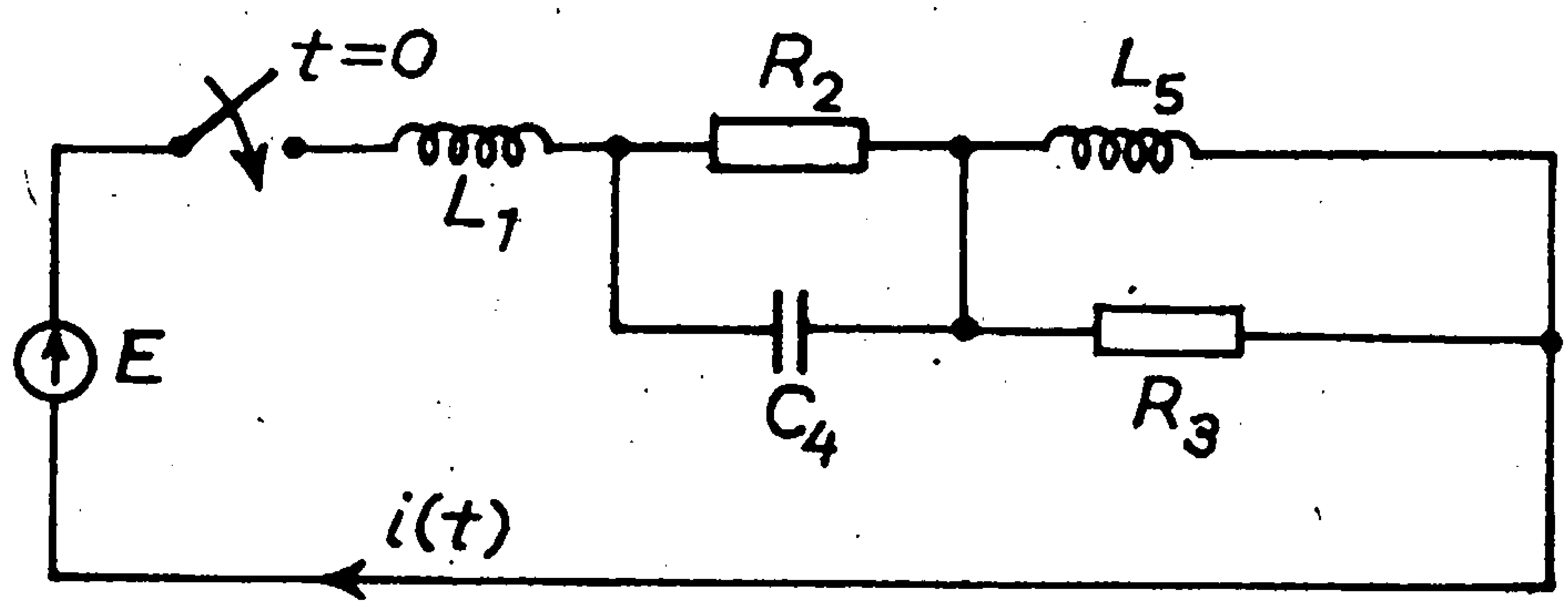
Rys. 2.30

D a n e: $R_1 = R_2 = L_3 = 1$, $R_4 = L_5 = 2$, $E = 3$.

W y n i k:

$$u(t) = 3[1(t) + \delta(t)] .$$

2.42. W chwili $t = 0$ zwarto wyłącznik (rys. 2.31). Obliczyć prąd $i(t)$.



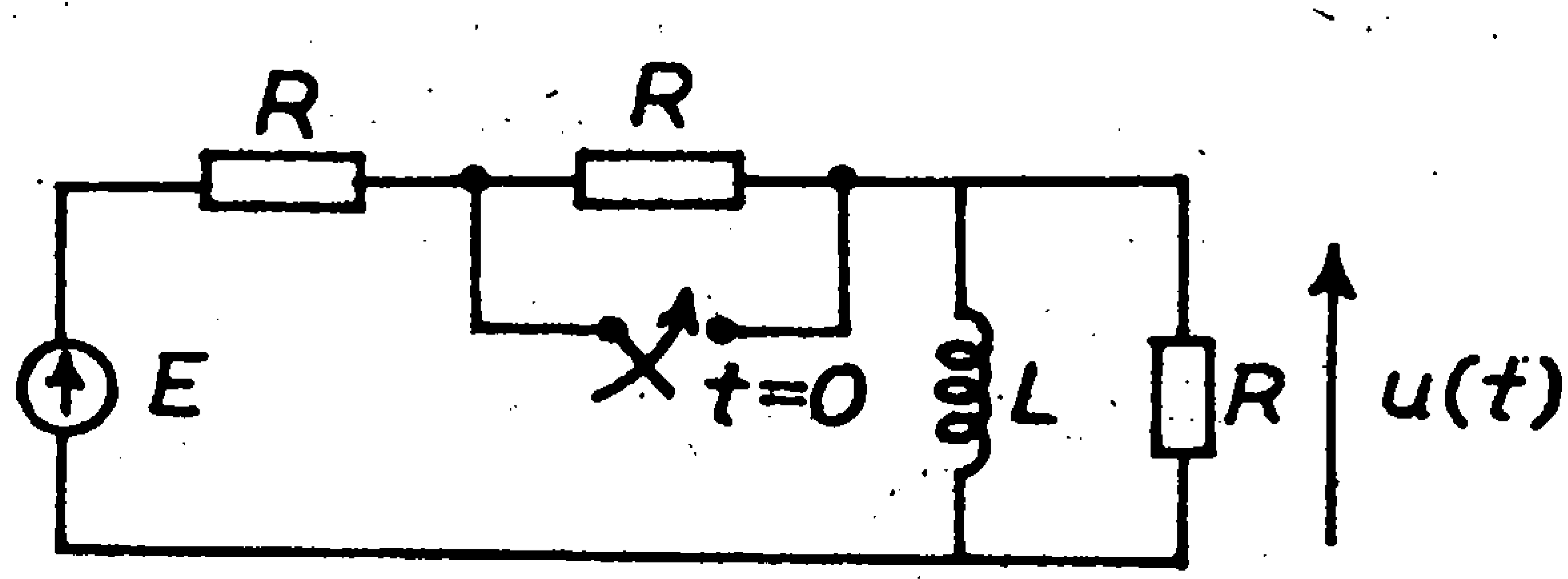
Rys. 2.31

D a n e: $L_1 = R_2 = R_3 = 1,$
$C_4 = L_5 = 2$
$E = 2.$

W y n i k:

$$i(t) = 2(1 - e^{-t})1(t).$$

2.43. W chwili $t = 0$ zwarto wyłącznik w układzie przedstawionym na rysunku 2.32. Obliczyć napięcie $u(t)$.



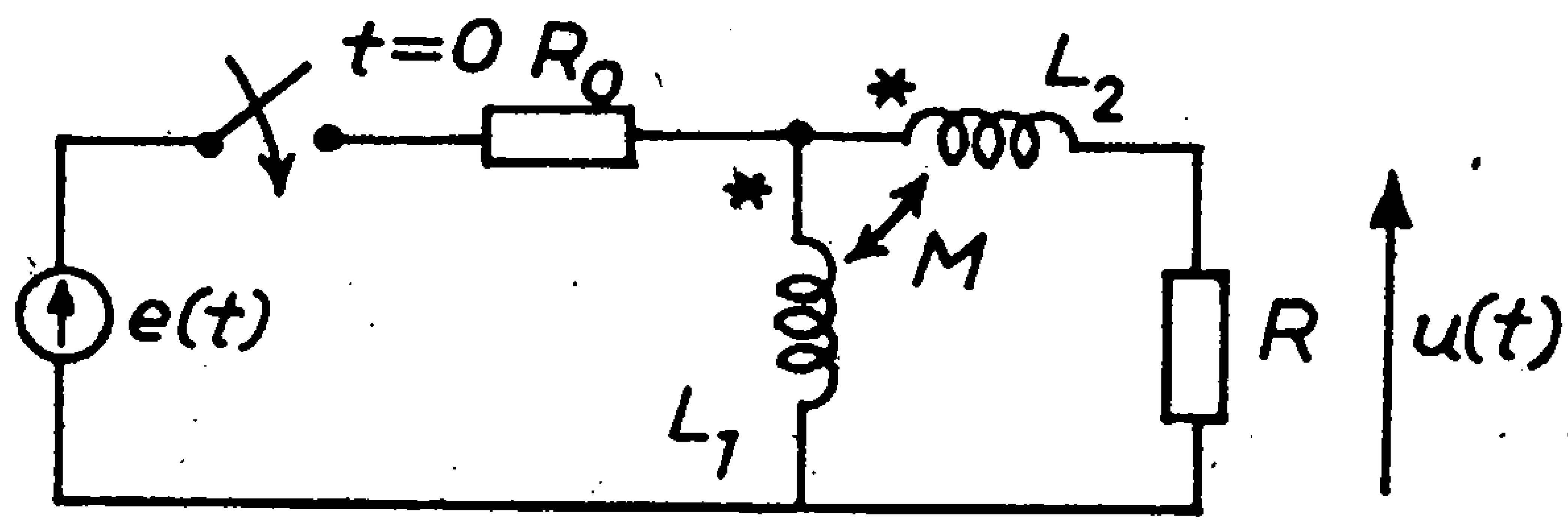
Rys. 2.32

D a n e: $E = 100,$ $L = 5.$
$R = 10,$

W y n i k:

$$u(t) = \frac{E}{4} e^{-\frac{R}{2L}t} 1(t) = 25 e^{-t} 1(t).$$

2.44. W chwili t = 0 zwarto wyłącznik w obwodzie przedstawionym na rysunku 2.33. Znaleźć przebieg czasowy napięcia u(t).



Rys. 2.33

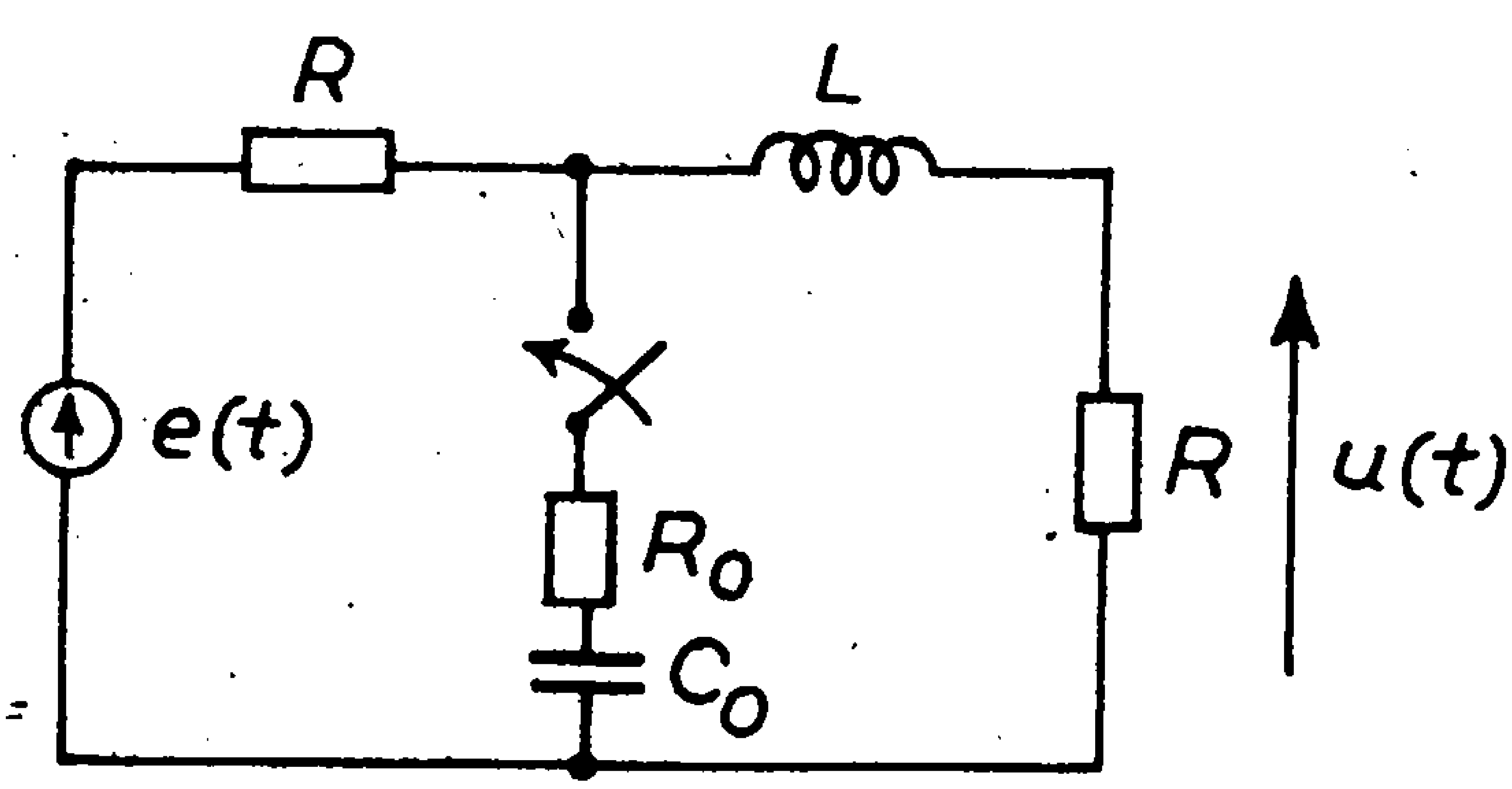
D a n e: $L_1 = 1$, $R = 3$,
$L_2 = 5$, $R_o = 2$
$M = 2$,
oraz: a) $e(t) = 1(t)$,
b) $e(t) = \sin 2t$.

W y n i k:

a) $u(t) = \left(0{,}6\ e^{-6t} - 0{,}6\ e^{-t}\right)1(t)$,

b) $u(t) = \left[-0{,}4242\ \sin(2t + 8^{o}10') + 0{,}24\ e^{-t} + 0{,}18\ e^{-6t}\right] 1(t)$.

2.45. W chwili t = 0 wyłącznik (rys. 2.34) został zwarty. Obliczyć u(t).

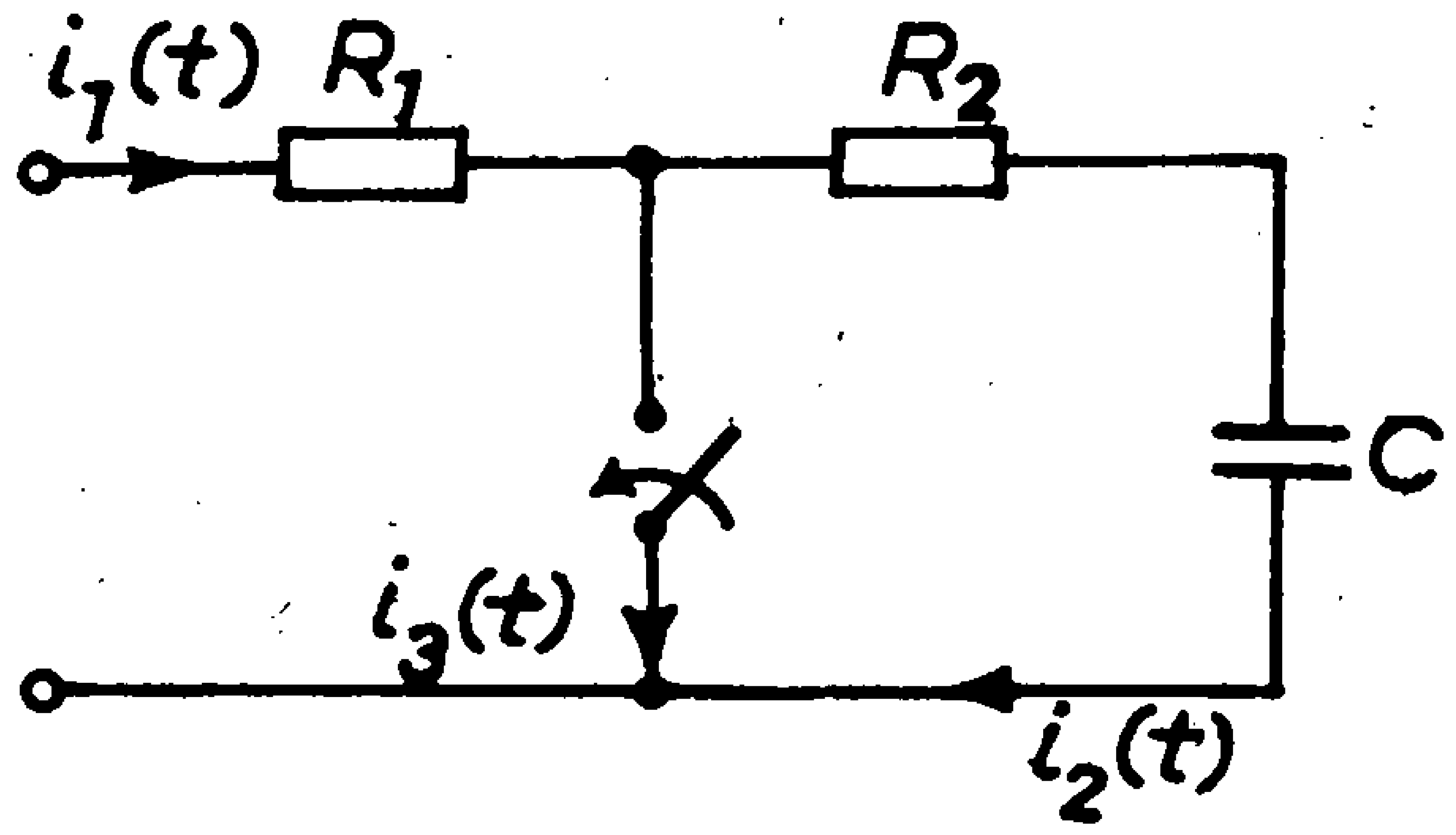


Rys. 2.34

D a n e: $e(t) = 2 \sin 2t$, $C_o = 0{,}25$,
$R = 1$, $L = 1$.
$R_o = 0{,}5$,

W y n i k:

$$u(t) = \left[0{,}885\, e^{-t} \sin(1{,}15\, t + 63^{\circ}50') + 0{,}69 \sin(2t - 68^{\circ})\right] 1(t).$$



Rys. 2.35

2.46. W obwodzie przedstawionym na rysunku 2.35 płynie w stanie ustalonym prąd sinusoidalny o amplitudzie I_m i pulsacji ω. Znaleźć funkcje czasowe prądów $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ w następujących przypadkach:

a) klucz zostaje zwarty, gdy $i_1(t) = 0$,

b) klucz zostaje zwarty, gdy $i_1(t) = I_m$.

W y n i k:

a) $$i_1(t) = \frac{I_m}{R_1}\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \sin(\omega t + \varphi)\, 1(t),$$

$$i_2(t) = \frac{I_m}{R_2 \omega C}\, e^{-\frac{t}{RC}}\, 1(t),$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left[-\frac{1}{\omega C(R_1 + R_2)}\right],$$

$$i_3(t) = i_1(t) - i_2(t),$$

b) $$i_2(t) = 0,$$

$$i_1(t) = i_3(t) = \frac{I_m}{R_1}\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \sin(\omega t \pm \frac{\pi}{2})\, 1(t).$$