



Politechnika Wrocławska

## Filtry aktywne

# Filtry aktywne - wprowadzenie

## Definicja.

Filtrami aktywnymi nazywamy układy elektroniczne złożone z elementu aktywnego (zazwyczaj wzmacniacza operacyjnego) pojemności i rezystancji. Układy te służą do wydzielenia z widma częstotliwościowego sygnału wejściowego filtru sygnałów o określonym paśmie częstotliwości. Filtry aktywne stosuje się w zakresie małych i średnich częstotliwości czyli do około 100kHz.

# Filtry aktywne - wprowadzenie

## Rodzaje filtrów aktywnych

Ze względu na sposób działania filtry aktywne dzielimy na:

- filtry o pracy ciągłej (ang. continous time filters)
- filtry C przełączane (ang. switched capacitor)

Ze względu na rodzaj charakterystyki częstotliwościowej filtry dzielimy na:

- dolnoprzepustowe
- górnoprzepustowe
- pasmowo - przepustowe
- pasmowo - zaporowe

# Filtry aktywne - wprowadzenie

## Rodzaje filtrów aktywnych

Ze względu na sposób aproksymacji charakterystyki częstotliwościowej filtry dzielimy na:

- Butterwortha
- Czebyszewa
- Bessela (Thompsona)
- Butterwortha - Thompsona

Można także podzielić filtry ze względu na ich rząd (pierwszego, drugiego, trzeciego, n-tego rzędu).

# Filtry aktywne - wprowadzenie

Przykładowy wybór charakterystyki filtru. Ważne czynniki:

- postać sygnału poddawanego filtracji
- właściwości czasowe i częstotliwościowe sygnału przefiltrowanego
- złożoność układu
- koszt układu

# Filtry aktywne - wprowadzenie

Transmitancja filtru:

$$H(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{a_m}{b_n} \frac{\prod_i (s - z_i)}{\prod_j (s - p_j)}$$

$a_i, b_j$  – rzeczywiste współczynniki filtru

$z_i, p_j$  – zera i bieguny funkcji transmitancji

$$H(s) = |H(\omega)| \exp[j\varphi(\omega)]$$

$|H(s)|$  - charakterystyka częstotliwościowa modułu

$\varphi(s)$  – charakterystyka częstotliwościowa fazy

# Filtry aktywne - wprowadzenie

Podział transmitancji na sekcje:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \prod_k H_k(s) = \prod_k \frac{N_k(s)}{M_k(s)}$$

$$N_k(s) \leq \text{stopień } M_k(s) \leq 2$$

Dla  $M_k(s) = 2$  sekcja tzw. bikwadratowa:

$$H_k(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{N_k(s)}{M_k(s)}$$

# Filtry aktywne - wprowadzenie

Transmitancję bikwadratową można zapisać w postaci:

$$H_k(s) = \frac{N_k(s)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} = \frac{N_k(s)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

gdzie:  $p_1, p_2$  – są biegunami transmitancji

Dla dobroci  $Q > 1/2$  bieguny są zespolone

$$p_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} + j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = \sigma_p \pm j\omega_p$$



# Filtry aktywne - wprowadzenie

Części rzeczywista i urojona biegunów:

$$\sigma_p = -\frac{\omega_0}{2Q} \quad \omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Pulsacja charakterystyczna i dobroć filtru:

$$\omega_0 = \sqrt{\sigma_p^2 + \omega_p^2} \quad Q = \frac{\sqrt{\sigma_p^2 + \omega_p^2}}{2|\sigma_p|} = \frac{\omega_0}{2|\sigma_p|}$$

Współczynnik tłumienia:

$$\alpha = \frac{1}{2Q}$$

# Filtry aktywne - wprowadzenie

Zapisując mianownik transmitancji w postaci:

$$s^2 + b_1 s + b_0 = s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0$$

Otrzymujemy zależności na dobroć i pulsację:

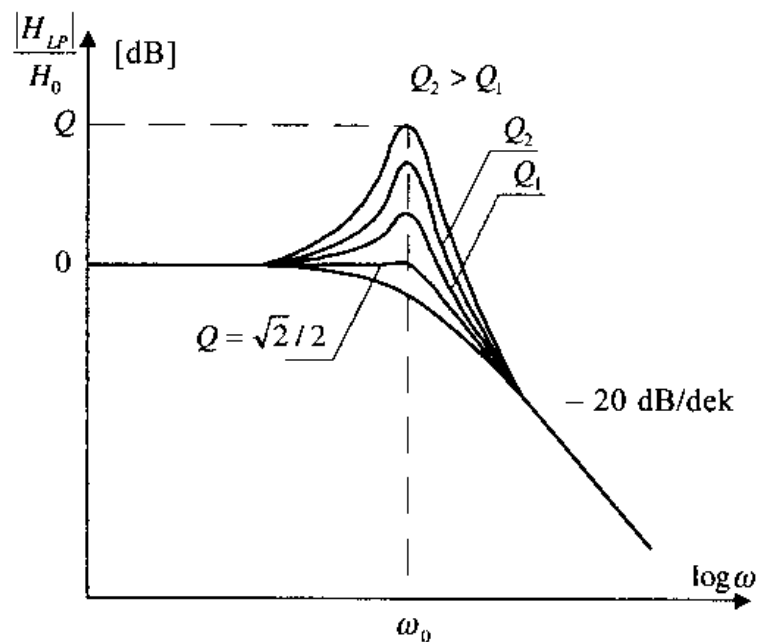
$$Q = \frac{\sqrt{b_0}}{b_1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{b_0}$$

$b_0, b_1$  – rzeczywiste współczynniki wielomianu mianownika transmitancji filtru

# Filtry aktywne - wprowadzenie

Filtr dolnoprzepustowy (LP) (ang. lowpass filter)



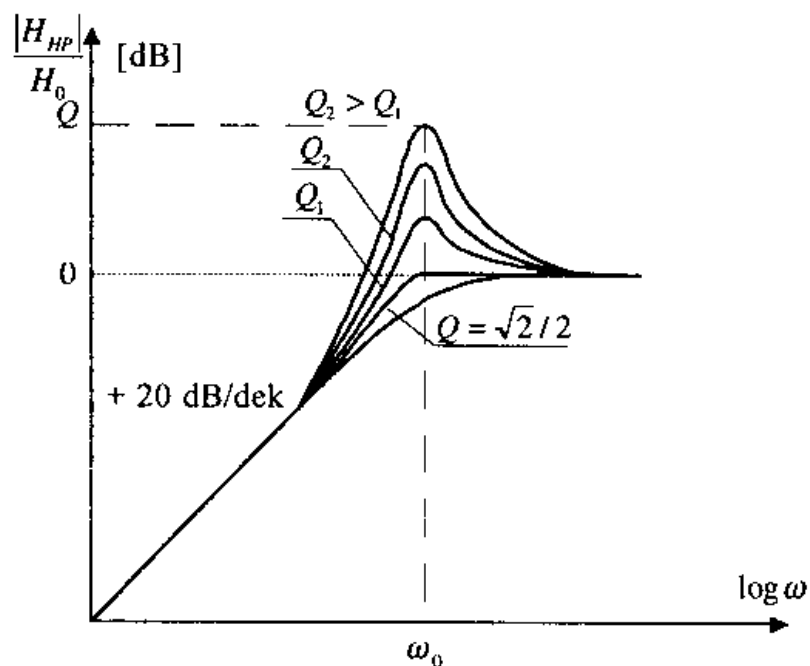
Transmitancja napięciowa filtra:

$$H_{LP}(s) = H_0 \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

Rys. 1. Charakterystyki amplitudowe filtra dolnoprzepustowego

# Filtry aktywne - wprowadzenie

Filtr górnoprzepustowy (HP) (ang. highpass filter)



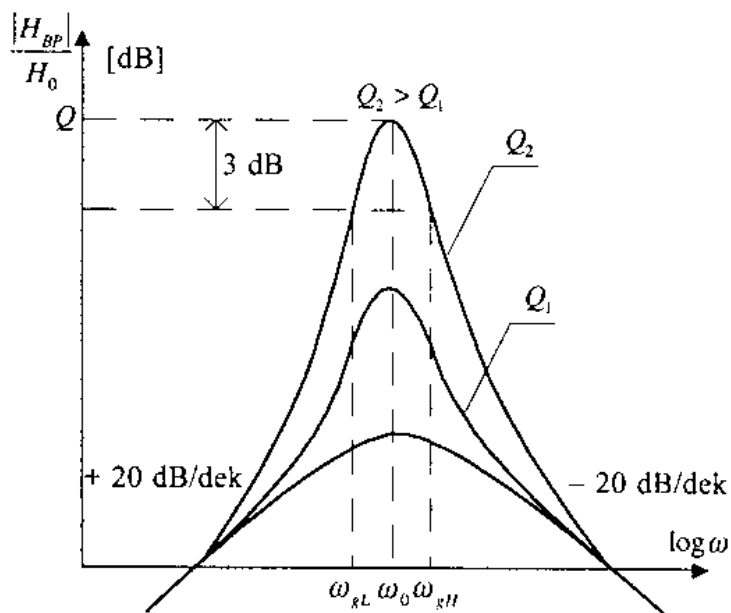
Transmitancja napięciowa filtru:

$$H_{HP}(s) = H_0 \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

Rys. 2. Charakterystyki amplitudowe filtru górnoprzepustowego

# Filtry aktywne - wprowadzenie

Filtr pasmowoprzepustowy (BP) (ang. bandpass filter)



Rys. 3. Charakterystyki amplitudowe filtra pasmowoprzepustowego

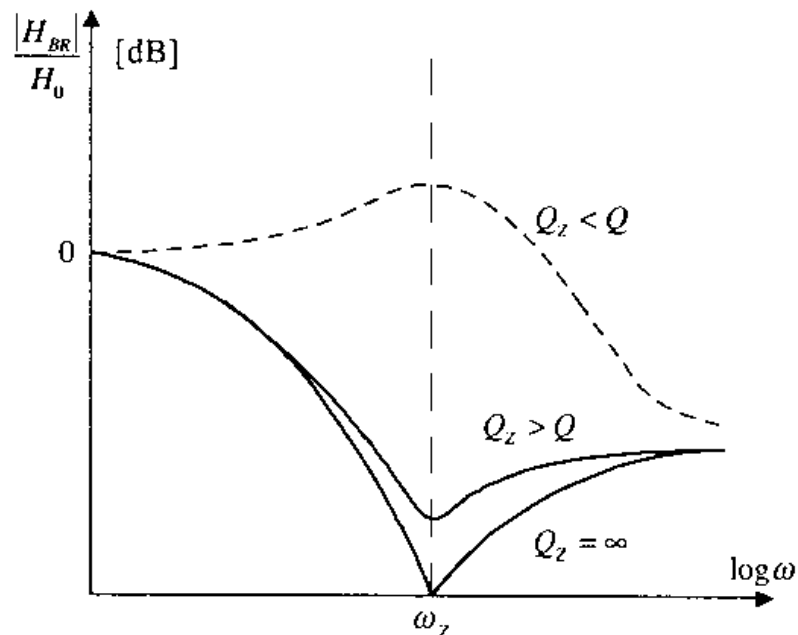
Transmitancja napięciowa filtra:

$$H_{BP}(s) = H_0 \frac{\omega_0 s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

$$\begin{aligned} B_{3dB} &= \Delta\omega_{3dB} = \omega_{gH} - \omega_{gL} \\ &= 2\pi\Delta f_{3dB} = 2\left|\sigma_p\right| \end{aligned}$$

# Filtry aktywne - wprowadzenie

Filtr pasmowozaporowy (BR) (ang. bandreject filter)



Rys. 4. Charakterystyki amplitudowe filtra pasmowozaporowego

Transmitancja napięciowa filtra:

$$H_{BR}(s) = H_0 \frac{s^2 + \frac{\omega_z}{Q_z} s + \omega_z^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

# Filtry aktywne - wprowadzenie

Dla  $Q_z = \infty$  otrzymujemy filtr eliptyczny o transmitacji:

$$H_{BR}(s) = H_0 \frac{\omega_z^2}{\omega_0^2} \frac{\frac{s^2}{\omega_z^2} + 1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q\omega_0} + 1}$$

Transmitancja filtrów aktywnych jest wrażliwa na zmiany wartości elementów pasywnych i wzmacnienie elementów aktywnych. Parametr – wrażliwość –  $S$  (ang. sensitivity).

# Filtry aktywne - wprowadzenie

Częstotliwości charakterystyczne i graniczne. Zafalowania charakterystyk częstotliwościowych filtrów. Współczynniki korekcyjne.

Tabela 1. Współczynniki korekcyjne dla filtrów dolno i górno przepustowych

Typ charakterystyki	Współczynnik tłumienia $\alpha$	Współczynniki korekcyjne	
		$k_{lp}$	$k_{alp}$
$\varepsilon = 0.5$ dB Czebyszewa	1.158	0.574	1.158
$\varepsilon = 1$ dB Czebyszewa	1.054	0.673	1.240
$\varepsilon = 2$ dB Czebyszewa	0.886	0.779	1.333
$\varepsilon = 3$ dB Czebyszewa	0.766	0.841	1.389
Bessela	1.732	0.786	
Butterwortha	1.414	1	



# Filtry aktywne - wprowadzenie

## Filtr dolnoprzepustowy

Charakterystyka Butterwortha:

$$\omega_g = \omega_0$$

Charakterystyka Bessela:

$$\omega_g = \omega_0 k_{lp}$$

Charakterystyka Czebyszewa:

$$\omega_{\max} = \omega_0 k_{lp}$$

$$\omega_g = \omega_0 k_{alp}$$

# Filtry aktywne - wprowadzenie

## Filtr górnoprzepustowy

Charakterystyka Butterwortha:

$$\omega_g = \omega_0$$

Charakterystyka Bessela:

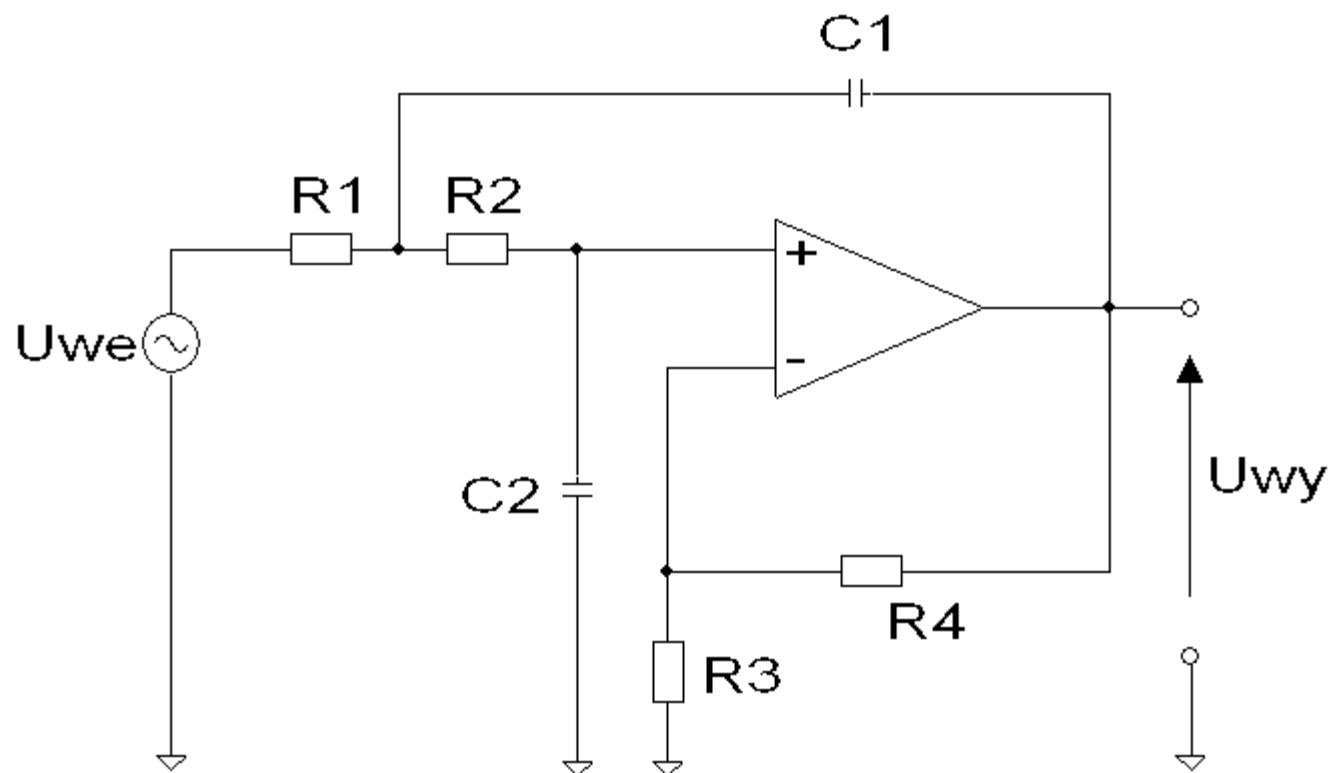
$$\omega_g = \frac{\omega_0}{k_{lp}}$$

Charakterystyka Czebyszewa:

$$\omega_{\max} = \frac{\omega_0}{k_{lp}}$$

$$\omega_g = \frac{\omega_0}{k_{alp}}$$

# Filtry aktywne - układ Sallena - Key'a



Rys. 5. Dolnoprzepustowy filtr Sallena – Key'a

# Filtry aktywne - układ Sallena - Key'a

Transmitancja filtru dolnoprzepustowego Sallena – Key'a:

$$H_{LP}(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{\frac{K_U}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-K_U}{R_2 C_2} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

gdzie:  $K_U = H_0 = 1 + \frac{R_4}{R_3}$

Pulsacja charakterystyczna układu:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$

# Filtry aktywne - układ Sallen'a - Key'a

Dobroć filtru:

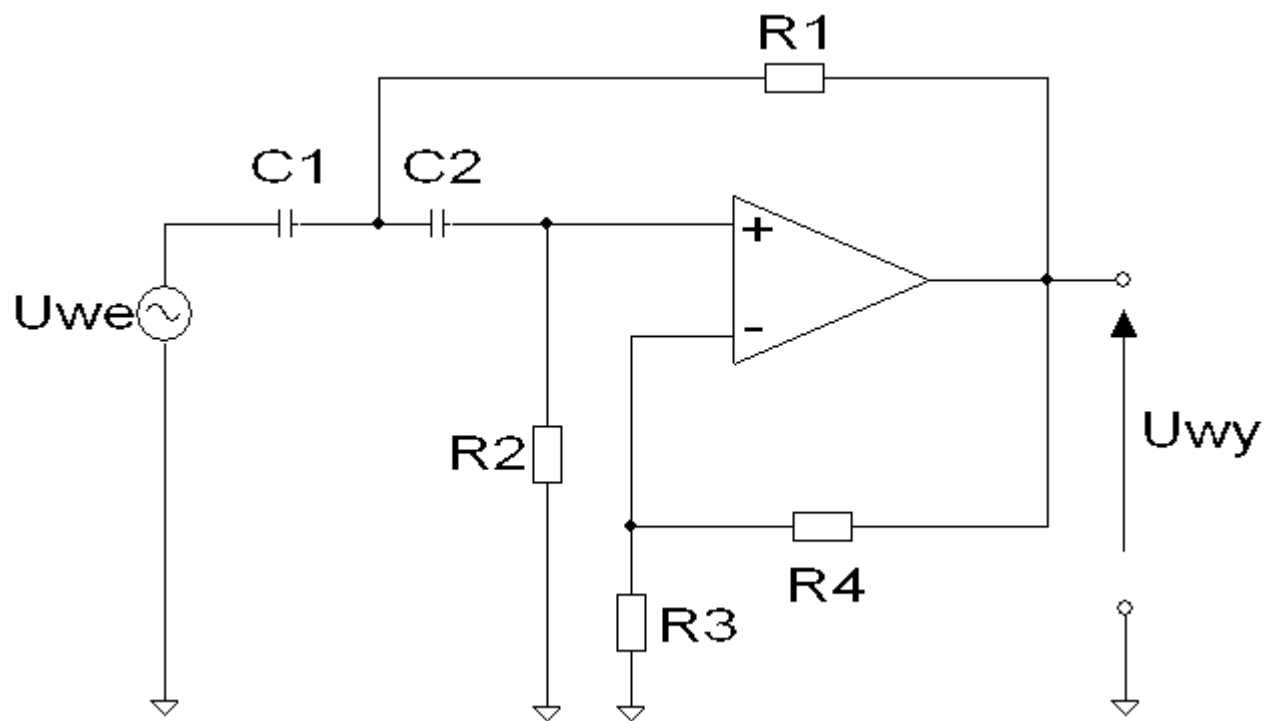
$$Q = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2} \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1 - K_U}{R_2 C_2} \right)}$$

Dla  $K_U = 1$  i  $R_1 = R_2 = R$

pojemności można wyznaczyć z zależności:

$$C_1 = \frac{2Q}{\omega_0} \quad C_2 = \frac{1}{2Q\omega_0}$$

# Filtry aktywne - układ Sallena - Key'a



Rys. 6. Górnoprzepustowy filtr Sallena – Key'a

# Filtry aktywne - układ Sallena - Key'a

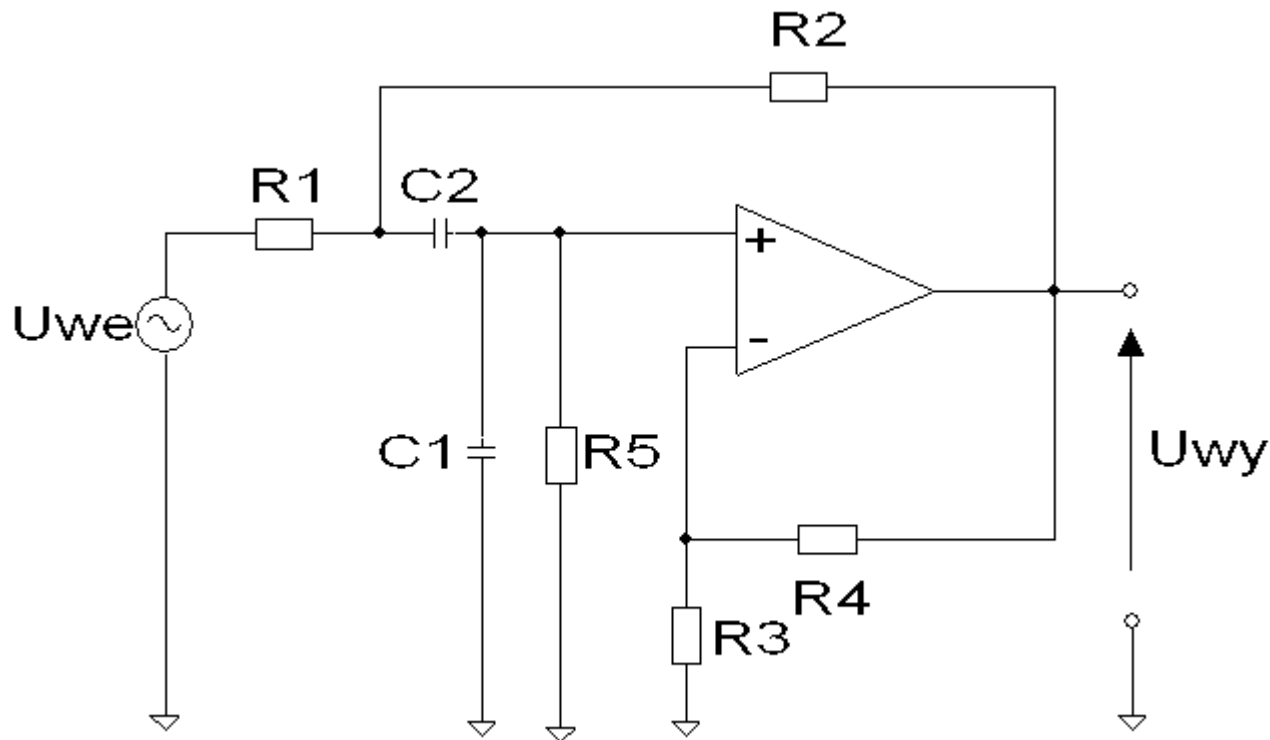
Transmitancja filtru górnoprzepustowego Sallena – Key'a:

$$H_{HP}(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{K_U s^2}{s^2 + \left( \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1 - K_U}{R_1 C_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

Dla  $C_1 = C_2 = C$  i  $K_u = 1$ :

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}}$$

# Filtry aktywne - układ Sallena - Key'a



Rys. 7. Pasmowoprzepustowy filtr Sallena – Key'a



# Filtry aktywne - układ Sallena - Key'a

Transmitancja filtru pasmowopustowego Sallena – Key'a:

$$H_{BP}(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{\frac{K_U}{R_1 C_1} s}{s^2 + \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1 - K_U}{R_2 C_1} \right) s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

Częstotliwość środkowa filtru:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

# Filtry aktywne - układ Sallenena - Key'a

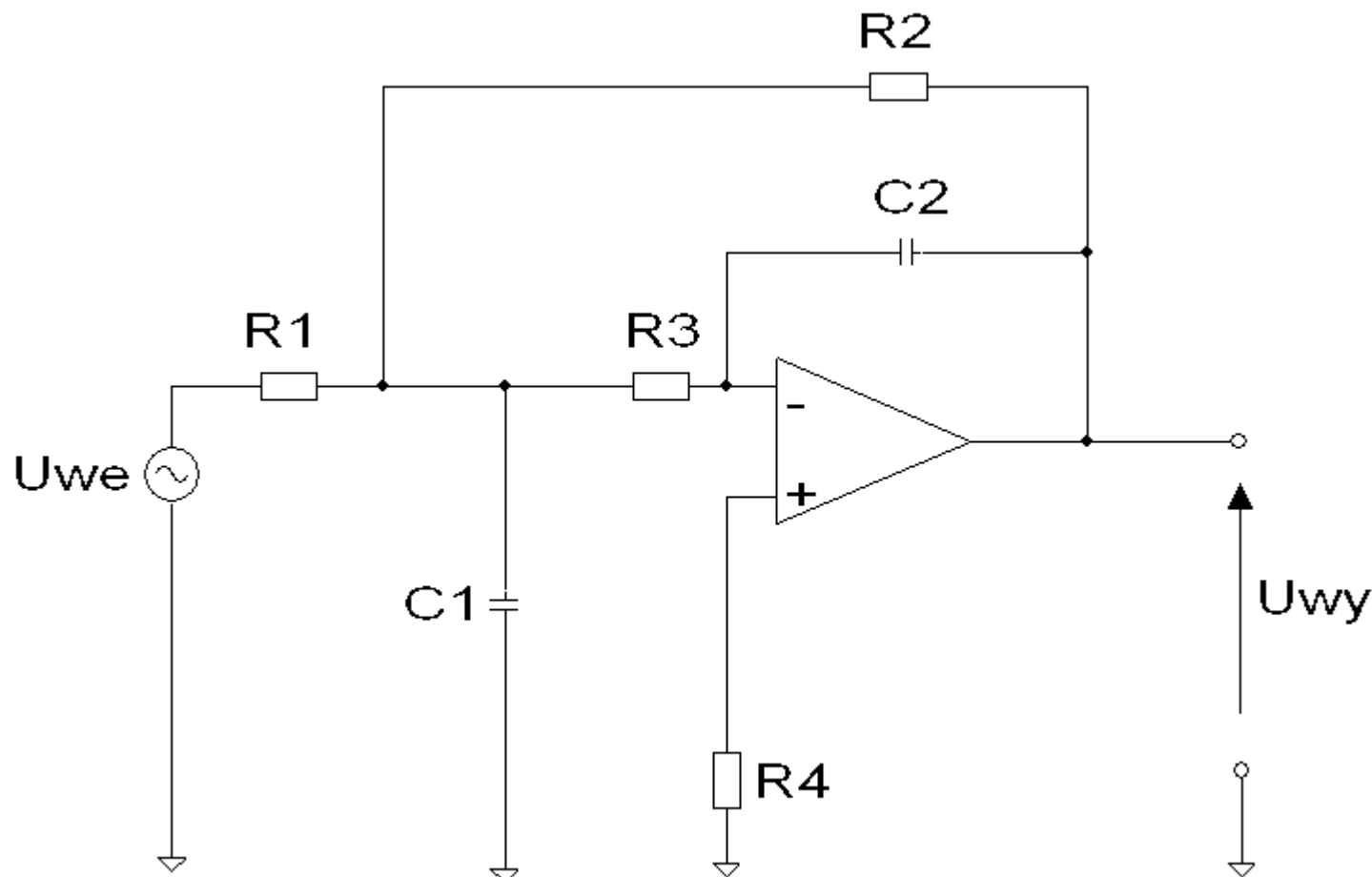
Dobroć filtru:

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}}{\left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1 - K_U}{R_2 C_1} \right)}$$

Transmitancja  $H_0$ :

$$H_0 = \frac{\frac{K_U}{R_1 C_1}}{\left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} + \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1 - K_U}{R_2 C_2} \right)}$$

# Filtry aktywne - wielokrotne, ujemne sprzężenie zwrotne



Rys. 8. Dolnoprzepustowy filtr z wielokrotnym ujemnym SZ

# Filtry aktywne - wielokrotne, ujemne sprzężenie zwrotne

Transmitancja filtru:

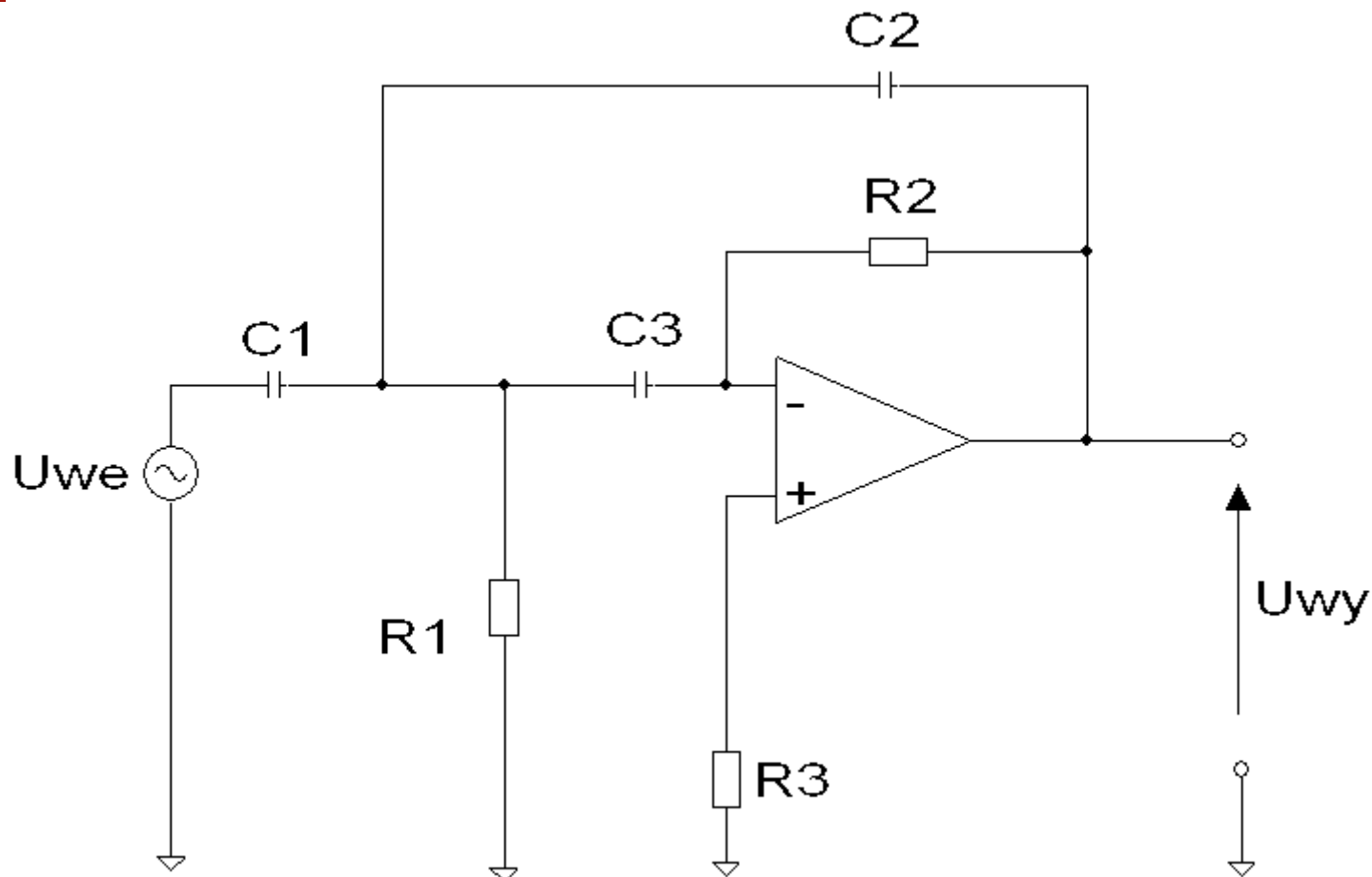
$$H_{LP}(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{-\frac{K_U}{R_2 R_3 C_1 C_2}}{s^2 + \frac{s}{C_1} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

gdzie:  $K_U = H_0 = -\frac{R_2}{R_1}$

Pulsacja charakterystyczna i dobroć:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_3 C_1 C_2}} \quad Q = \left[ \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} \left( \sqrt{\frac{R_3}{R_2}} + \sqrt{\frac{R_2}{R_3}} + \frac{\sqrt{R_2 R_3}}{R_1} \right) \right]^{-1}$$

# Filtry aktywne - wielokrotne, ujemne sprzężenie zwrotne



Rys. 9. Górnoprzepustowy filtr z wielokrotnym ujemnym SZ

# Filtry aktywne - wielokrotne, ujemne sprzężenie zwrotne

Transmitancja filtru:

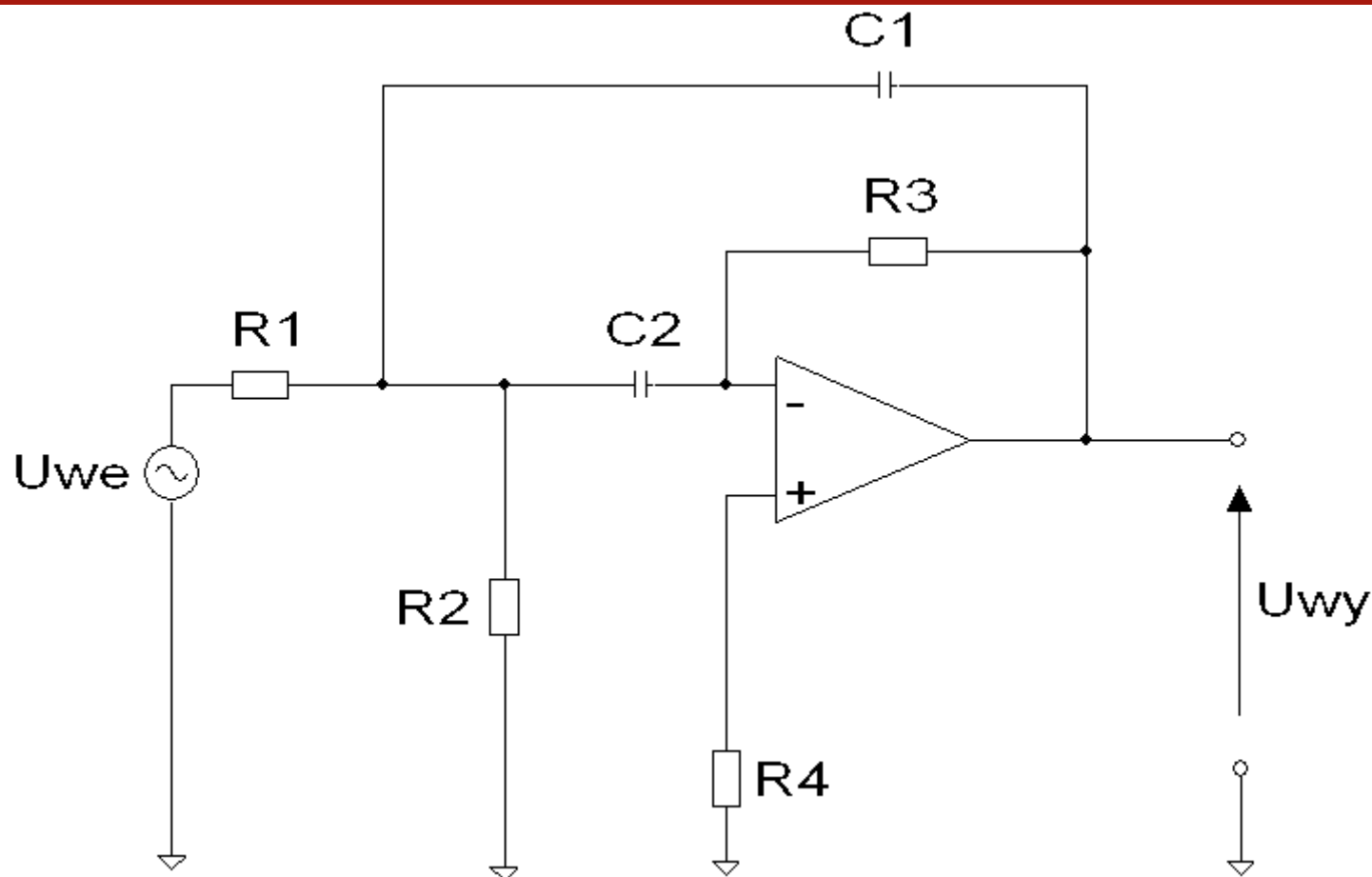
$$H_{HP}(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{K_U s}{s^2 + \frac{s}{R_2} \left( \frac{C_1}{C_2 C_3} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_2 C_3}}$$

gdzie:  $K_U = H_0 = -\frac{C_1}{C_2}$

Pulsacja charakterystyczna i dobroć:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_2 C_3}} \quad Q = \left[ \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \left( \frac{C_1}{\sqrt{C_2 C_3}} + \sqrt{\frac{C_3}{C_2}} + \sqrt{\frac{C_2}{C_3}} \right) \right]^{-1}$$

# Filtry aktywne - wielokrotne, ujemne sprzężenie zwrotne



Rys. 10. Pasmowoprzepustowy filtr z wielokrotnym ujemnym SZ

# Filtry aktywne - wielokrotne, ujemne sprzężenie zwrotne

Transmitancja filtru:

$$H_{BP}(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{-\frac{s}{R_1 C_1}}{s^2 + s \left( \frac{1}{R_3 C_1} + \frac{1}{R_3 C_2} \right) + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C_1 C_2}}$$

Dla:  $C_1 = C_2 = C$

$$Q = \frac{\omega_0 R_2 C}{2} = \frac{\omega_0}{\omega_{gH} - \omega_{gL}}$$



# Filtry aktywne - wielokrotne, ujemne sprzężenie zwrotne

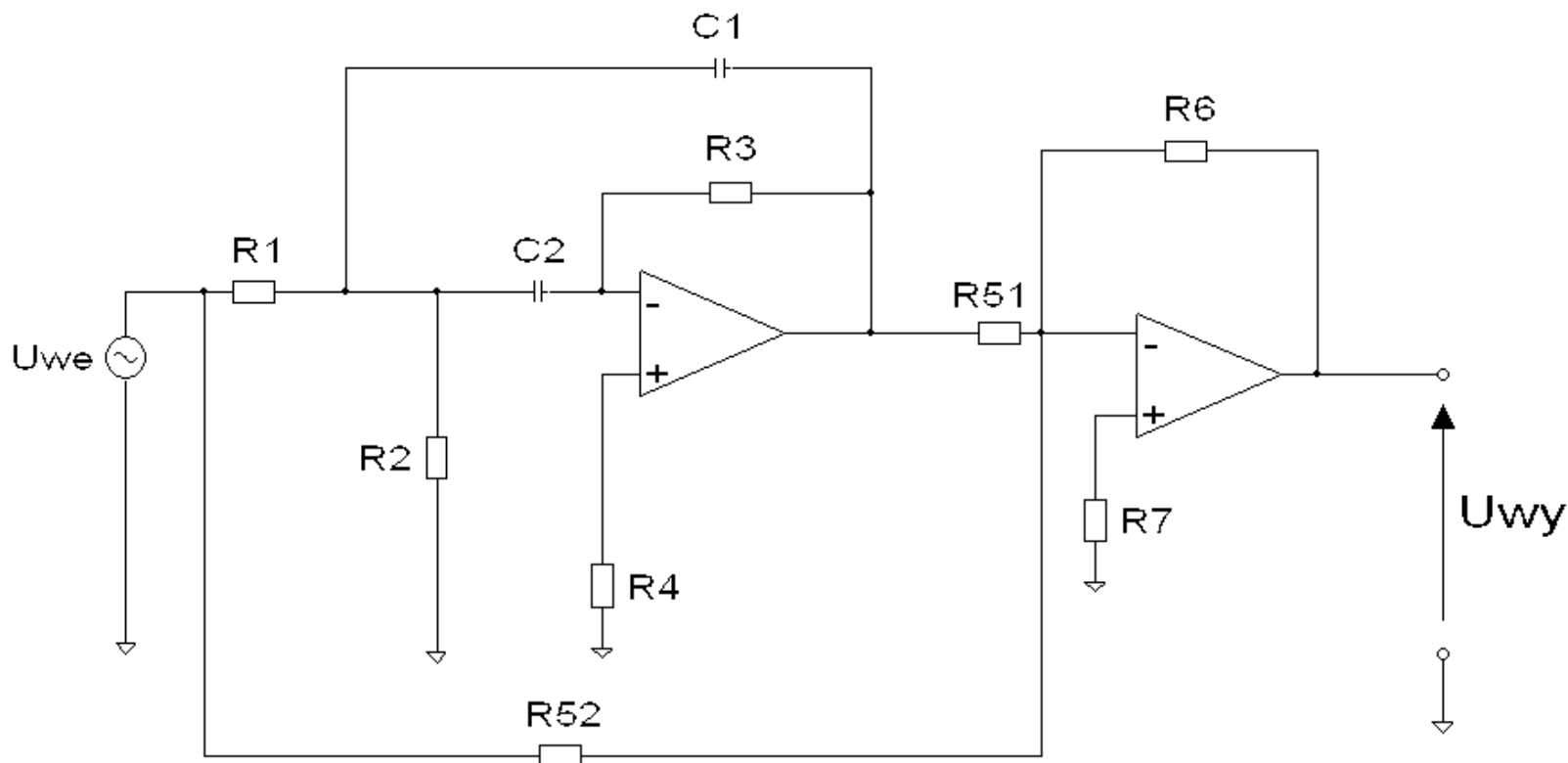
Pulsacja środkowa:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3 C^2}} = \sqrt{\omega_{gL} \omega_{gH}}$$

Dla pulsacji  $\omega = \omega_0$

$$H_0 = 2Q^2$$

# Filtry aktywne - wielokrotne, ujemne sprzężenie zwrotne



Rys. 11. Pasmowozaporowy filtr z wielokrotnym ujemnym SZ i sumatorem odwracającym

# Filtry aktywne - wielokrotne, ujemne sprzężenie zwrotne

Transmitancja filtru:

$$H_{BR}(s) = - \left( \frac{R_6}{R_{51}} H_{BP}(s) + \frac{R_6}{R_{52}} \right)$$

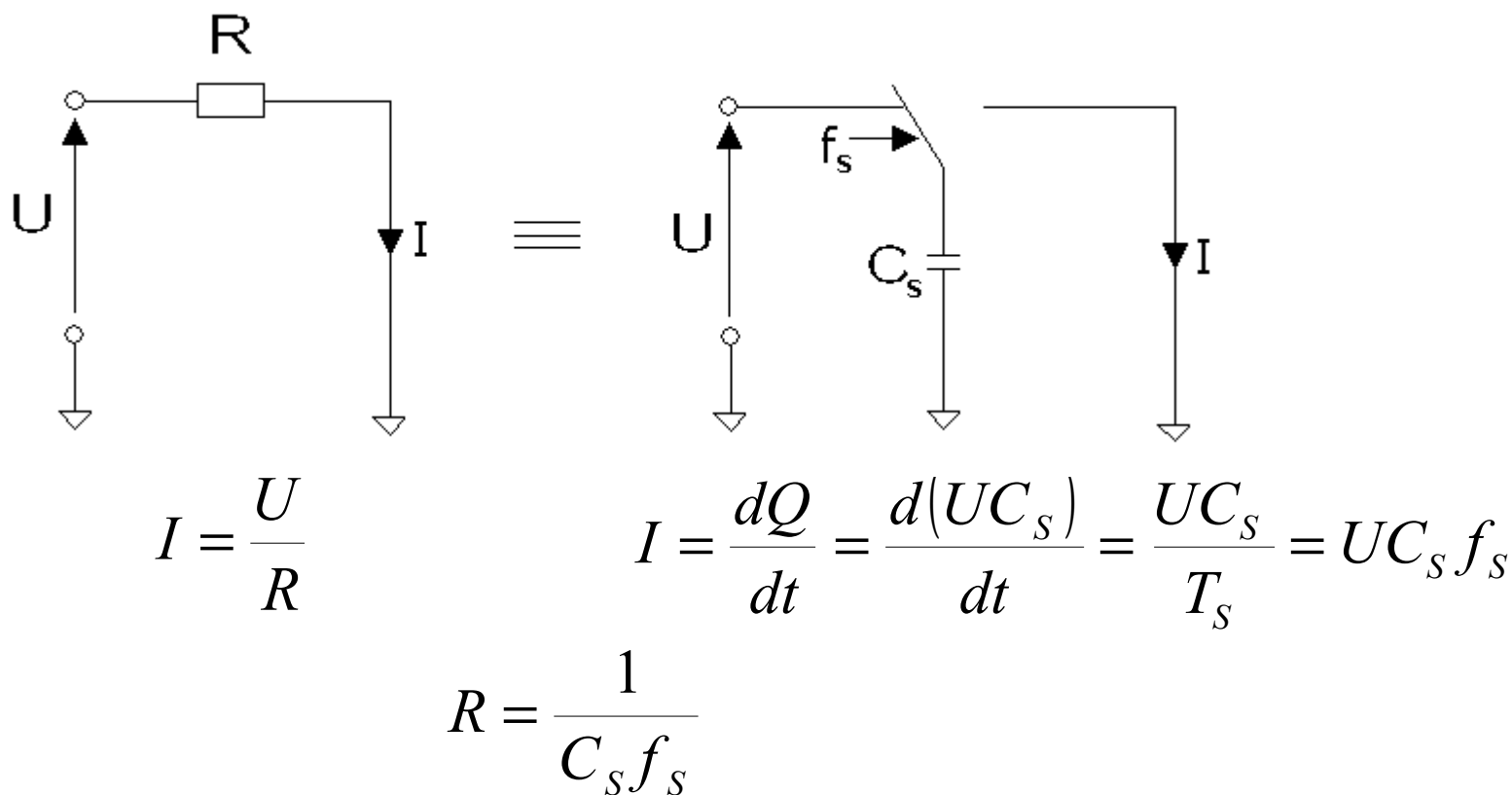
Przy częstotliwości środkowej  $\omega = \omega_0$

$$\left. \begin{array}{l} |H_{BP}(\omega = \omega_0)| = 1 \frac{V}{V} \\ \varphi(\omega = \omega_0) = \pi \end{array} \right\} H_{BP} = -1 \frac{V}{V}$$

Dla:  $R_{51} = R_{52} = R$

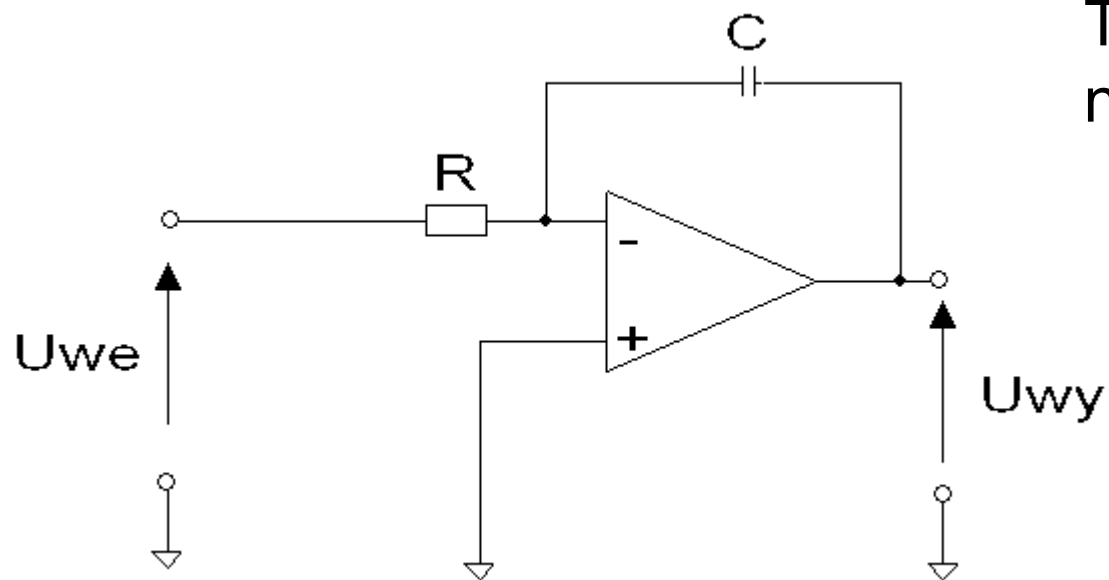
$$H_{BR}(\omega = \omega_0) = 0$$

# Filtry aktywne - filtry C przełączane



Rys. 12. Symulowanie rezystancji za pomocą przełączanej pojemności

# Filtry aktywne - filtry C przełączane



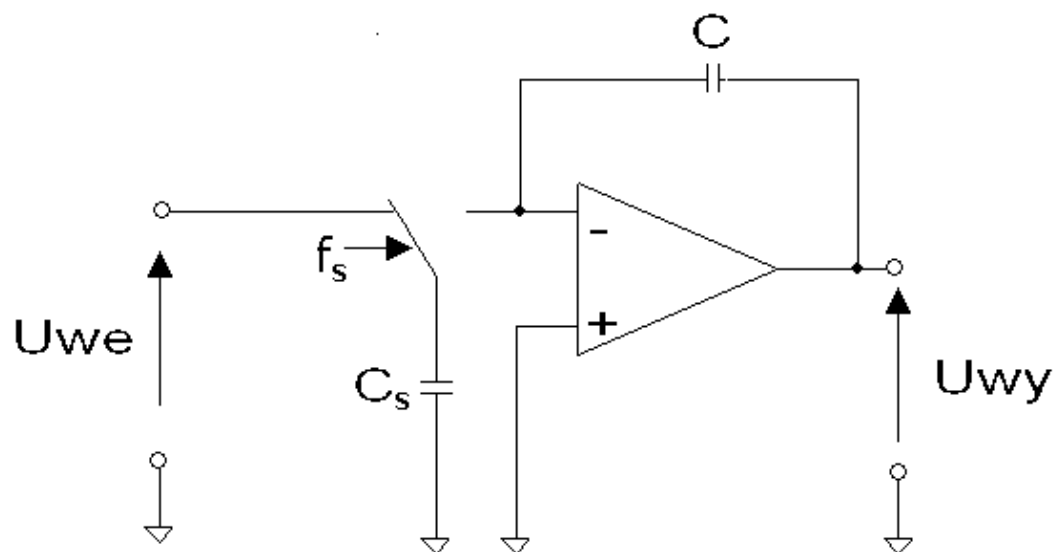
Transmitancja  
napięciowa układu:

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = -\frac{1}{\tau s}$$

gdzie:  $\tau = RC$

Rys. 13. Układ podstawowy  
integratora

# Filtry aktywne - filtry C przełączane



Rys. 14. Układ odwracającego integratora z przełączaną pojemnością

Transmitancja napięciowa układu:

$$\frac{U_{wy}}{U_{we}} = -\frac{1}{\tau s}$$

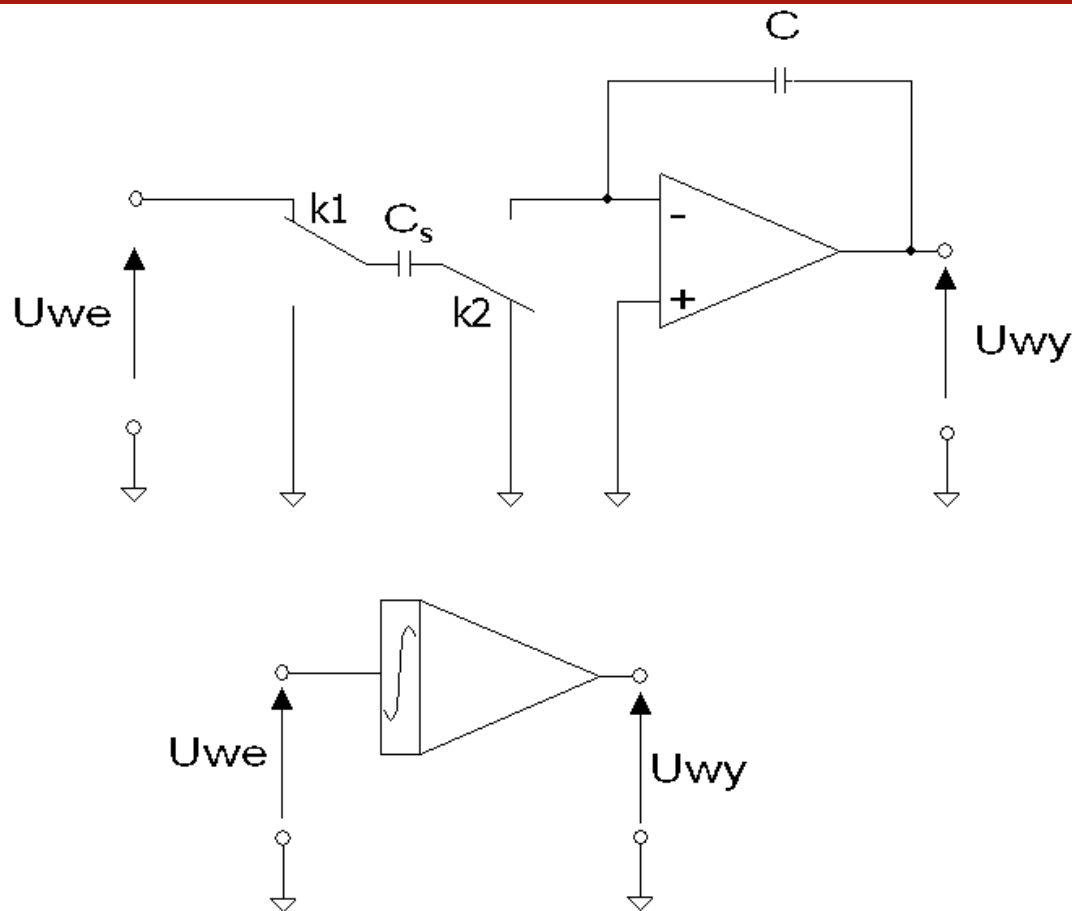
gdzie:

$$\tau = CR_{ZAST} = \frac{C}{f_s C_s} = \frac{\eta}{2\pi f_s}$$

$$\frac{\eta}{2\pi} = \frac{C}{C_s}$$

$$\eta = (50 \div 200)$$

# Filtry aktywne - filtry C przełączane



Rys. 15. Układ integratora nieodwracającego z przełączaną pojemnością i jego symbol

# Filtry aktywne - filtry C przełączane

Transmitancja napięciowa układu:

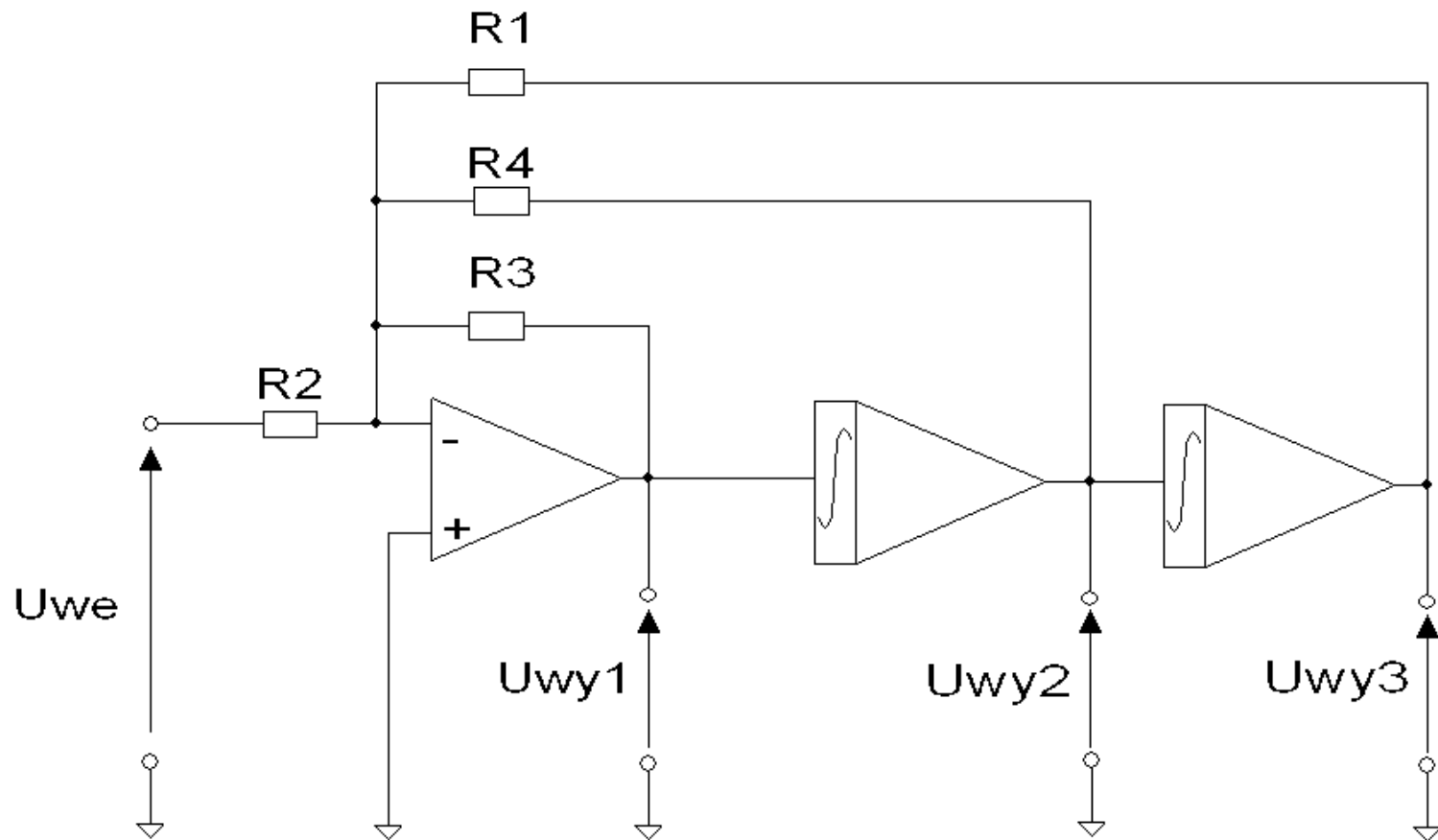
$$\frac{U_{wy}}{U_{wy}} = \frac{f_s C_s}{sC} = \frac{1}{\tau s}$$

gdzie:

$$\tau = CR_{ZAST} = \frac{C}{f_s C_s} = \frac{\eta}{2\pi f_s}$$



# Filtry aktywne - filtry C przełączane



Rys. 15. Filtry: dolno-, górno- i pasmowoprzepustowy z przełączanymi pojemnościami

# Filtry aktywne - filtry C przełączane

Filtr dolnoprzepustowy

Transmitancja filtru:

$$\frac{U_{wy3}}{U_{we}} = \frac{-\frac{R_1}{R_2}}{\frac{R_1}{R_3}\tau^2\omega_0^2s^2 + \frac{R_1}{R_4}\tau\omega_0s + 1}$$

Pulsacja charakterystyczna:

$$\omega_0 = \frac{2\pi f_s}{\eta}$$

# Filtry aktywne - filtry C przełączane

Filtr górnoprzepustowy

Transmitancja filtru:

$$\frac{U_{wy1}}{U_{we}} = \frac{-\frac{R_3}{R_2}}{\frac{R_3}{R_1 \tau^2 \omega_0^2} \frac{1}{s^2} + \frac{R_3}{R_4 \tau \omega_0} \frac{1}{s} + 1}$$

Pulsacja charakterystyczna:

$$\omega_0 = \frac{2\pi f_s}{\eta}$$

# Filtry aktywne - filtry C przełączane

Filtr pasmowoprzepustowy

Transmitancja filtru:

$$\frac{U_{wy2}}{U_{we}} = \frac{-\frac{R_1}{R_2}\tau\omega_0 s}{\frac{R_1}{R_3}\tau^2\omega_0^2 s^2 + \frac{R_1}{R_4}\tau\omega_0 s + 1}$$

Pulsacja środkowa:

$$\omega_0 = \frac{2\pi f_s}{\eta}$$

# Filtry aktywne - zagadnienia

1. Filtry aktywne: rodzaje i parametry
2. Rodzaje charakterystyk częstotliwościowych filtrów aktywnych. Współczynnik tłumienia
3. Sekcja bikwadratowa: dolno-, górno-, pasmowoprzepustowa i pasmowozaporowa.
4. Filtr aktywny Sallena - Key'a
5. Filtr aktywny z wielokrotnym ujemnym sprzężeniem zwrotnym
6. Symulacja rezystancji za pomocą przełączanej pojemności
7. Filtry aktywne C - przełączane