

# Metoda wyznaczania klasy dynamiki obiektów liniowych

Jacek Wesołowski \*

Publikacja zawiera definicję i koncepcję metody siatek identyfikacyjnych. Zaproponowana metoda umożliwia wybranie jednego właściwego typu transmitancji operatorowej ze zbioru możliwych i może mieć praktyczne zastosowania nie tylko w identyfikacji charakterystyk skokowych przetworników lub torów pomiarowych, ale również do prezentacji wyników badań, gdy model jest znany. Każda z krzywych identyfikacyjnych ma cechy szczególne, które są różne w zależności od wyboru klasy dynamiki. Wybrano i omówiono trajektorie pomiaru wybranej grupy modeli.

**Method of Linear Object Dynamics Class Determination.** The article presents the definition and concept of pattern identification nets method. The method presented enables the selection of the one, appropriate operator transmittance from a set of available transmittances and may be practically applied not only for identification of step characteristics of converters or measurement trajectories but also, when a model is known, for the purpose of research result presentation. Each identification curve reveals specific features which prove to be different depending on the selection of dynamics class. The article contains also the description of measurement trajectories for a selected model group.

## Wstęp

Na obecnym poziomie nauki, ze względu na ograniczoną poznanie zjawisk fizycznych, nie jest możliwe uzyskanie modeli idealnie odzwierciedlających realny świat, stanowiących klasę obiektów o tych samych cechach szczególnych. W związku z powyższym w świetle praw nauki są tworzone modele, które odzwierciedlają tylko w przybliżeniu cechy całych klas pochodnych obiektów i zjawisk. Praca dotyczy modelowania, które stanowi istotę w różnych opracowaniach technicznych i naukowych. Pokazana zostanie metoda tworzenia – drogą symulacji komputerowej – rodziny krzywych,

które dalej będą zwane „siatką identyfikacyjną wzorcową” [1], stanowiąc uniwersalne narzędzie umożliwiające wyróżnienie odpowiedniej klasy dynamiki obiektu, jakim może być przetwornik pomiarowy lub cały tor pomiarowy.

## Modele matematyczne obiektów – sformułowanie problemu

Tabela 1 zawiera podstawowe klasy modeli dynamiki [2, 3]. Jednak ze względu na obszerność materiału jaki można przekazać, zostaną rozważone tylko ich wybrane

Tabela 1. Podstawowe modele dynamiki przetworników pomiarowych [2, 3]

$K(s) = \frac{k_m}{(1+sT_1) \cdot \dots \cdot (1+sT_n)} \quad (1)$	$K(s) = \frac{k_m \omega_0^2}{s^2 + 2\xi \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (4)$
$K(s) = \frac{k_m (1+sT_{n-1})}{(1+sT_1) \cdot \dots \cdot (1+sT_n)} \quad (2)$	$K(s) = \frac{k_m (\omega_0^2 + 2\xi \omega_0 s)}{s^2 + 2\xi \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (5)$
$K(s) = \frac{k_m e^{-\tau s}}{(1+sT_1) \cdot \dots \cdot (1+sT_n)} \quad (3)$	$K(s) = \frac{k_m s^2}{s^2 + 2\xi \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (6)$

\* Mgr inż. Jacek Wesołowski – Politechnika Szczecińska, Instytut Automatyki Przemysłowej, Zakład Teorii Sterowania i Technik Symulacyjnych

typy. Zadanie polega na wybraniu z przedstawionego zbioru modeli, stanowiącego bazę, modelu odpowiedniego dla zarejestrowanej charakterystyki skokowej badanego toru pomiarowego.

Należy zaznaczyć, że identyfikacji mogą również podlegać tory pomiarowe, których modele powstają w skutek kombinacji szeregowo połączonych obiektów podstawowych. W takim wypadku należy mówić o modelach pochodnych. Pod względem analizy ciekawa jest transmitancja (6) powstała przez dwukrotne zróżniczkowanie modelu (4), opisująca m.in. dynamikę przetworników magnetoindukcyjnych [4], stosowanych do rejestracji i analizy drgań mechanicznych. Charakterystyka skokowa tej klasy modeli ma takie same cechy szczególne jak klasa modeli opisanych transmitancją (5).

### Koncepcja metody siatek identyfikacyjnych wzorcowych

Za podstawę do wykreślenia siatki identyfikacyjnej wzorcowej proponuje się wykorzystanie trójparametrowego modelu Strejca postaci (7), przy założeniu, że stała czasowa T oraz wzmocnienie statyczne  $k_m$  są równe jedności. Model ten będzie stanowić wzorzec w porównaniu z innymi modelami dynamiki.

$$h_n(s) = \frac{k_m}{s(1+sT)^n} = k_m \left( \frac{1}{s} - \dots - \frac{1}{T^{n-1} \left(s + \frac{1}{T}\right)^n} \right) \quad (7)$$

Po wykorzystaniu niezupełnej funkcji Gamma Eulera (8) postać modelu Strejca (7) daje się przedstawić za pomocą prostszej zależności (9), która może być stosowana do modelowania w różnych programach matematycznych.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt, \quad \Gamma\left(n, \frac{t}{T}\right) = \int_{t/T}^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \quad (8)$$

$$h_n(t) = k_m \left( 1 - \frac{\Gamma(n, t/T)}{\Gamma(n)} \right), \quad \text{gdzie } \bar{T} = \frac{T}{n} \quad (9)$$

Rodzinę krzywych wzorcowych wykreśla się, przyjmując kolejne całkowite wartości rzędu n charakterystyki skokowej modelu. Każda charakterystyka skokowa jest przekształcana do postaci siatki wzorcowej za pomocą równań danych parametrycznie (10), zwanych dalej algorytmem identyfikacyjnym.

$$\begin{aligned} X &= F_1(\varphi_n(t), \varphi_n(t/a)) , \\ Y &= F_2(\varphi_n(t), \varphi_n(t/a)) \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie:

$$\varphi_n(t/a) = \frac{h_n(t/a) - h_n(0)}{h_n(\infty) - h_n(0)} \quad (11)$$

Ograniczoność każdej z siatek, na którą składa się rodzina krzywych wzorcowych, wynika z istnienia granic (12)

$$\left( \lim_{t \rightarrow 0} X(t), \lim_{t \rightarrow 0} Y(t) \right)$$

oraz

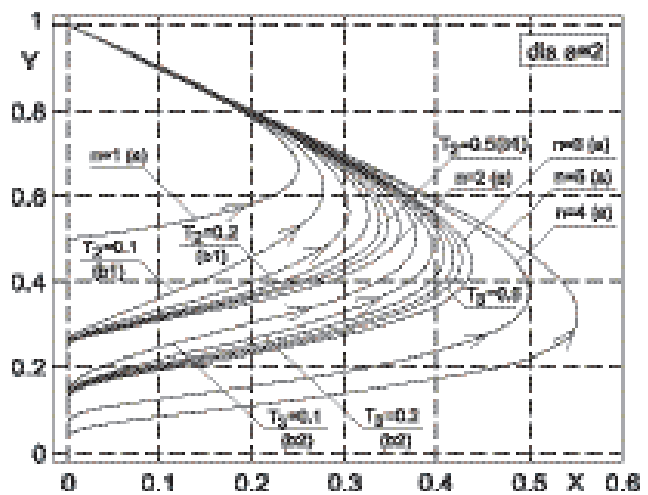
$$\left( \lim_{t \rightarrow \infty} X(t), \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) \right) \quad (12)$$

w otoczeniu punktów krańcowych siatki.

Przykładową siatkę identyfikacyjną wzorcową powstałą przy wykorzystaniu algorytmów identyfikacyjnych zawartych w tabeli 2 przedstawiono na rys. 1.

Tabela 2. Algorytmy identyfikacyjne rozważanych siatek wzorcowych (a = 2)

Algorytm (13)	Algorytm (14)
$X = \varphi_n(t) - \varphi_n(t/a)$	$f(z) = \frac{z + 0,5}{z - 1}$
$Y = \sqrt{\frac{\varphi_n^2(t/a)}{\varphi_n^2(t) + c}}$	



Rys. 1. Trajektorie pomiaru dla klasy obiektów inercyjnych

Jeżeli siatka identyfikacyjna wzorcowa powstała w wyniku przekształcenia danych jako funkcja zmiennej zespolonej, to równania (10) przedstawiają się w postaci (15).

$$\begin{aligned} f &= g(z), \quad X = \text{Re}[f(z)] \\ Y &= \text{Im}[f(z)] \end{aligned} \quad (15)$$

oraz

gdzie:  $z = \varphi_n(t) + j\varphi_n(t/a)$

Przykład stanowi druga siatka przedstawiona na rys. 4, której odpowiada algorytm (14). Podczas badań stwierdzono, że dla siatek tego typu obserwuje się znaczny wpływ zakłóceń, które są związane ze znacznym skomplikowaniem algorytmu identyfikacyjnego. W związku z powyższym charakterystyki skokowe muszą być rejestrowane z dużą dokładnością. Pojęcie dużej dokładności nie jest tu jednoznaczne, bowiem zależy od wielu czynników zewnętrznych i może być różnie interpretowane. Jednak nieustanny rozwój aparatury kontrolno-pomiarowej, decydującej o jakości rejestracji sygnałów może sugerować, że siatki te mogą znaleźć praktyczne zastosowania. Pierwsza z siatek przedstawiona na rys. 1 została oparta na mniej skomplikowanym algorytmie i może być wykorzystana do analizy większości przebiegów przejściowych, na które nie nakłada się dodatkowych wymagań decydujących o jakości rejestracji przebiegu przejściowego. Cechą szczególną drugiej z siatek jest zależność współczynnika kierunkowego w otoczeniu punktu początkowego od rzędu dynamiki, co potwierdza założenia postawione w pracy [5]. W przypadku pierwszej z siatek od rzędu dynamiki są zależne początkowe fragmenty trajektorii pomiaru (krzywych wzorcowych).

Obliczone współczynniki kierunkowe stycznych oraz wartości początkowe trajektorii pomiaru przedstawiono w tab. 3.

**Tabela 3.** Współczynniki kierunkowe stycznych oraz wartości początkowych fragmentów trajektorii pomiaru rozważanych siatek wzorcowych

dla algorytmu (13)	dla algorytmu (14)
$Y(0) = \frac{1}{a^n}$	$\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=0} = \frac{1}{a^n}$
$tg(\alpha) = \left. \frac{dy}{dx} \right _{x=\infty} = -1$	$\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=\infty} = \infty$

Ponadto niektóre z krzywych wzorcowych dają się przedstawić w postaci funkcji Y(X) lub X(Y) przykładowo określonej wzorem (16) dla pierwszej trajektorii wzorcowej (tzn. n = 1) z rys. 1.

$$X(Y) = \frac{-(Y-1)(2Y-1)}{Y^2} \quad (16)$$

Istotny jest wybór wartości parametru „a” dla algorytmów identyfikacyjnych. Wraz ze wzrostem wartości „a” zmniejszeniu ulega liczba wykorzystanych dyskretnych próbek charakterystyki skokowej. Za najbardziej optymalne uważa się przyjęcie a = 2.

## Cechy szczególne krzywych wzorcowych

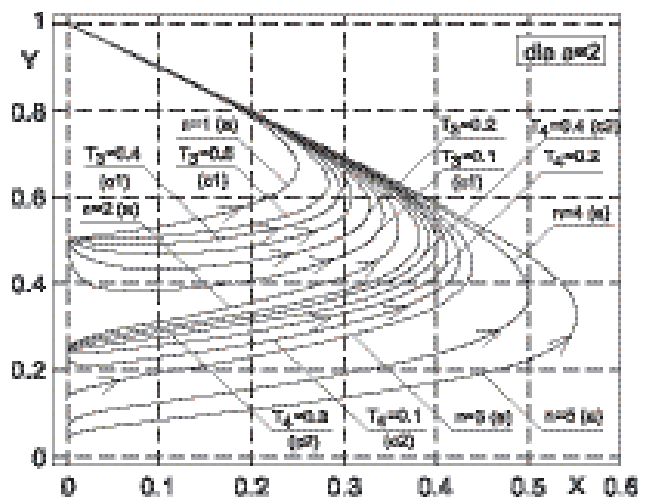
Do dalszej analizy trajektorii pomiaru, której wykres na płaszczyźnie X-Y nie zależy od skali czasu oraz która wskutek przeprowadzonego eksperymentu praktycznego jest wykreślona na tle siatki wzorcowej, niezbędna jest znajomość cech szczególnych krzywych reprezentujących różne grupy modeli. W dalszej części niniejszej pracy opisano cechy szczególne krzywych wybranej grupy modeli, które uznano za najczęściej wykorzystywane do opisu dynamiki przetworników pomiarowych.

## Klasa obiektów wieloinercyjnych

Charakterystyce skokowej klasy elementów inercyjnych pierwszego rzędu odpowiada po przekształceniu ta sama krzywa identyfikacyjna, której trajektoria pokrywa się z trajektoria krzywej wzorcowej wykreślonej przy przyjęciu n = 1. W związku z powyższym wartość stałej czasowej inercji pierwszego rzędu nie ma wpływu na kształt trajektorii. Na rys. 1 jako (b1) oznaczono rodzinę krzywych identyfikacyjnych klasy elementów inercyjnych drugiego rzędu, zaś jako (b2) oznaczono rodzinę krzywych identyfikacyjnych klasy elementów inercyjnych trzeciego rzędu. We wszystkich trzech wypadkach w zależności od typu dynamiki można wyszczególnić różne wartości współczynników kierunkowych do odpowiednich fragmentów początkowych trajektorii dla kolejnych n. Jeśli połączy się punkty końcowe wybranej trajektorii pomiaru, dla danej klasy elementów otrzyma się pętlę zamkniętą o dwóch ostrych krawędziach, do których nie istnieje styczna.

## Klasa elementów minimalnofazowych

Jako (c1) na rys. 2 oznaczono rodzinę krzywych identyfikacyjnych klasy elementów minimalnofazowych

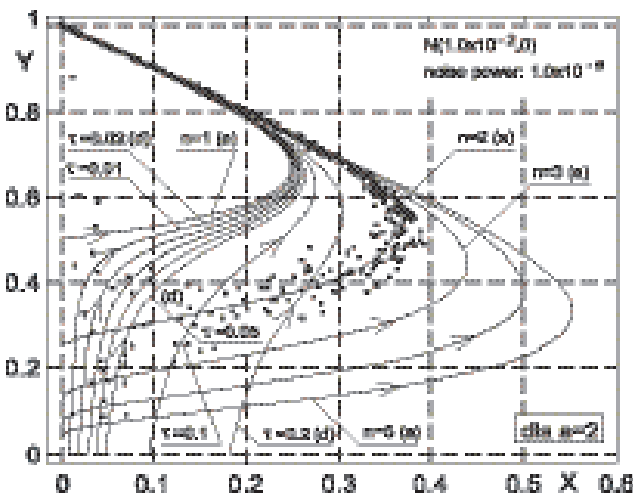


**Rys. 2.** Trajektorie pomiaru dla klasy obiektów minimalnofazowych

o dwóch biegunach i jednym zerze. Analogicznie jako (c2) oznaczono rodzinę krzywych identyfikacyjnych klasy elementów minimalnofazowych o jednej stałej czasowej licznika i trzech stałych czasowych mianownika. W wyniku połączenia punktu początkowego wybranej trajektorii pomiaru z punktem końcowym rozważanej klasy obiektów, otrzyma się jedną krawędź ostrą, do której nie istnieje styczna. Krawędź ta ma współrzędne (0,1). Należy podkreślić, że powyższe kryterium wyboru nie zawsze występuje, a tym samym istnieje ryzyko zakwalifikowania danej klasy obiektów do klasy obiektów wieloinercyjnych.

## Klasa elementów z opóźnieniem

Rodzinę krzywych jaką tworzy omawiana klasa obiektów oznaczono jako (d) i przedstawiono na rys. 3.

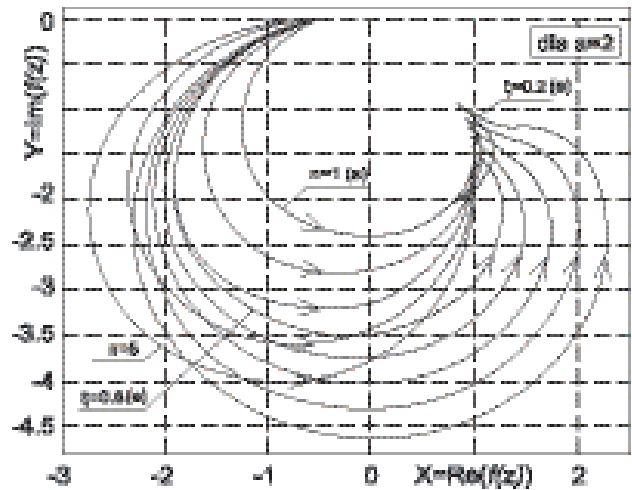


Rys. 3. Trajektorie pomiaru dla klasy obiektów z opóźnieniem oraz wpływ zakłóceń

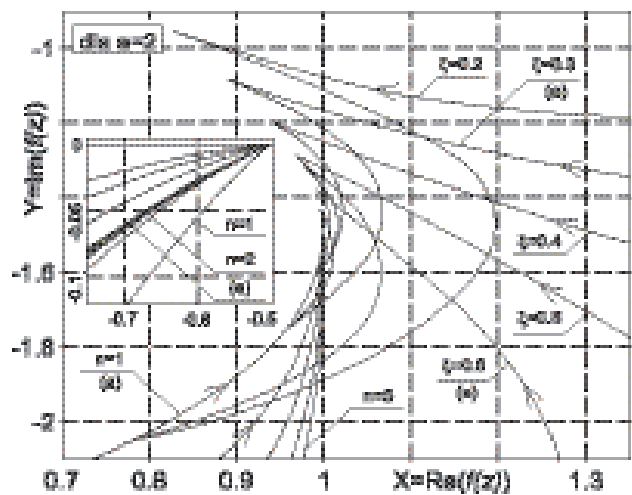
W zależności od wartości opóźnienia  $\tau$ , na osi X obserwuje się powstałe różnej długości odcinki (0,x). Długość ta jest tym większa im większe jest opóźnienie. Początkowy fragment trajektorii jest w przybliżeniu równoległy do osi y. O stopniu tej równoległości decyduje wartość stosunku wartości opóźnienia  $\tau$  do sumy wszystkich stałych czasowych. Podczas badań stwierdzono, że dla charakterystyk skokowych zarejestrowanych bez żadnego opóźnienia, przykładowo obiektów wieloinercyjnych, czas próbkowania  $\Delta t$  wprowadza dodatkowe opóźnienie. Ponieważ  $\Delta t$  jest kilkaset razy mniejszy od sumy wszystkich stałych czasowych, odcinek (0,x) jest nieobserwowalny, a tym samym są tworzone krzywe identyfikowane, które przedstawiono na rys. 1. Jednak zdarzają się sytuacje, w których zbyt długi czas próbkowania utrudnia identyfikację.

## Klasa elementów oscylacyjnych

Tę grupę obiektów mogą reprezentować wszelkiego rodzaju przyrządy wskazówkowe, a ich charakterystyki skokowe można zarejestrować poprzez cyfrową obróbkę obrazu wideo. Krzywe typowe dla rozważa-



Rys. 4. Trajektorie pomiaru dla klasy obiektów oscylacyjnych



Rys. 5. Trajektorie pomiaru dla klasy obiektów oscylacyjnych - powiększenie

nej klasy obiektów, przy różnej wartości współczynnika tłumienia, przedstawiono na rys. 4 i 5. Cechą szczególną jest utworzenie ostrzy, z których drugie opiera się na krzywej wykreślonej przy przyjęciu  $n = 1$  dla modelu wzorcowego. Liczba ostrzy jest uzależniona od liczby minimów lokalnych charakterystyki skokowej. Ponadto analiza początkowego fragmentu trajektorii wskazuje na taką samą wartość współczynnika kierunkowego do stycznej, jak dla trajektorii modelu wzorcowego wykreślonej przy przyjęciu parametru  $n = 2$ . Należy podkreślić, że wszystkie omówione cechy szczególne krzywych identyfikacyjnych każdej z klas modeli są takie same lub podobne dla większości tworzonych siatek wzorcowych.

## Wpływ zakłóceń

Na tle siatki wzorcowej przedstawionej na rys. 3 wykreślono za pomocą punktów pomiarowych trajektorie jaką można by uzyskać, dokonując odpowiedniej aproksymacji. Rozważana jest inercja drugiego rzędu o jedna-

kowych stałych czasowych. Do charakterystyki skokowej rozważanego modelu dynamiki toru pomiarowego dodano biały szum o rozkładzie normalnym  $N(1 \cdot 10^{-2}, 0)$ . Pierwszy parametr oznacza odchylenie standardowe, zaś drugi wartość średnią dodanego sygnału. Analizując omawianą krzywą, obserwuje się wyraźne zagęszczenie liczby punktów pomiarowych w otoczeniu fragmentu końcowego trajektorii pomiaru. Ponadto punkty tworzące początkowy fragment trajektorii mają charakter bardziej rozproszonych w porównaniu z odpowiednim fragmentem końcowym. Podczas badań stwierdzono, że w zależności od typu siatki wzorcowej obserwuje się rozkłady zakłóceń o różnym nasileniu, wynikającym z zastosowanego algorytmu identyfikacyjnego. Zatem projektując siatkę wzorcową, należy uwzględnić stopień skomplikowania algorytmu.

## Podsumowanie

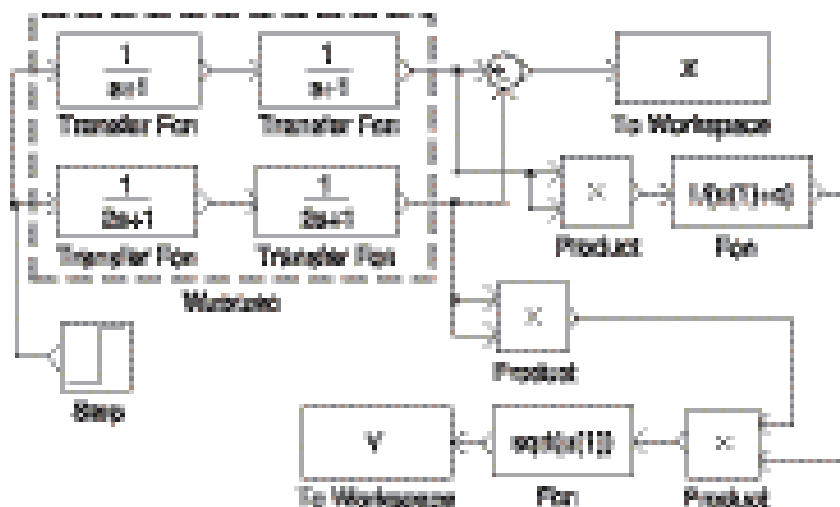
Ze względu na łatwość tworzenia siatek wzorcowych, do badań proponuje się używanie systemu pomiarowego składającego się z karty przetwornika A/C współpracującej z pakietem Simulink programu Matlab. Jednak nie wyklucza się możliwości zastosowania innych programów matematycznych takich jak MathCad, Maple czy LabView. Wykorzystując własność przekształcenia Laplace'a, każdą z siatek tworzy się, rysując odpowiedni schemat blokowy przedstawiony na rys. 6 dla algorytmu (13). Główną zaletą zaprezentowanej metody jest niezależność wykresu  $Y(X)$  oraz cech szczególnych krzywych od skali czasu. Przykładowo klasie modeli wieloinercyjnych o ustalonym tym samym rzędzie dynamiki i różnych stałych czasowych, pod warunkiem że stosunki wszystkich stałych czasowych są takie same, odpowiada na płaszczyźnie X-Y ta sama krzywa identyfikacyjna. W związku z powyższym, bezpośrednio na podstawie kształtu trajektorii pomiaru można wnioskować o typie dynamiki, a nie o wartościach sta-

łych czasowych, bowiem trajektoria poddana badaniu może reprezentować nieskończenie elementowy zbiór modeli w ramach tej samej klasy.

Obecnie są prowadzone również badania nad wykorzystaniem metody [1] do identyfikacji oraz analizy torów pomiarowych dających się przedstawić za pomocą nieliniowych równań różniczkowych.

## Bibliografia

- [1] Wesołowski J.: *Metoda wyznaczania klasy dynamiki liniowych obiektów*, XIII Sympozjum Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych, Kraków 2003.
- [2] Gajda J., Szyper M.: *Modelowanie i badania symulacyjne systemów pomiarowych*, Wyd. AGH, Kraków 1998.
- [3] Hagel R., Zakrzewski J.: *Miernictwo dynamiczne*, WNT Warszawa 1984.
- [4] Chwaleba A., Czajewski J.: *Przetworniki pomiarowe i defektoskopowe*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1998.
- [5] Skoczowski S.: *Identyfikacja rzędu na podstawie pomiarów dyskretnych początkowej fazy odpowiedzi skokowej*, VI Sympozjum Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych, Krynica 2000. ■



Rys. 6. Schemat blokowy umożliwiający tworzenie siatki identyfikacyjnej wzorcowej